УДК 512.812.4

Н.П. Можей, старший преподаватель

ГРАДУИРОВАННЫЕ ТРАНЗИТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

This paper is devoted to the complete description of all transitive graded Lie algebras. We classify finite-dimensional real graded Lie algebras such that $g_{-1} = V$, $\dim V = 3$.

Проблема описания всех конечномерных алгебр Ли векторных полей – стартовая точка для симметрийного анализа обыкновенных дифференциальных уравнений, так как, найдя решение этой задачи, можно получить все алгебры симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанная задача также тесно связана с задачами описания максимальных эффективных пар, примитивных действий, однородных подмногообразий. Проблемы описания алгебр векторных полей могут быть сформулированы естественным образом в терминах градуированных алгебр Ли.

Под градуированной алгеброй Ли мы понимаем градуированное векторное пространство

$$g = \oplus_{p=-\infty}^{+\infty} g_p ,$$

наделенное такой структурой алгебры Ли, что $\left[g_i, g_j\right] \subset g_{i+j}$ для всех $i, j \in Z$.

Градуированная алгебра называется *транзитивной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$- \; g_{-p} = \{0\} \text{ для всех } p > 1 ;$$

если $x \in g_p$ и $[x, g_{-1}] = \{0\}$, то $x = 0$.

Из данного определения следует, что g_{-1} является коммутативной подалгеброй алгебры Ли g (см. работы Танаке [1, 2]).

Пусть $g_{-1} = V$, $\dim V = 3$. Определим структуру транзитивной градуированной алгебры Ли на $g(V) = V \otimes S(V^*)$ следующим образом. Пусть $g_p(V) = V \otimes S^{p+1}(V^*)$ для всех $p \in \mathrm{Z}$. Тогда, очевидно, $g_p(V) = \{0\}$ для $p \le -2$ и $g_{-1}(V)$ можно отождествить с V. Пусть x, y, z – базис V^*, а $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$ – дуальный базис V. Тогда элементы $S^p(V^*)$ можно описать полиномами степени p от x, y, z. Таким образом, $g(V)$ – пространство полиномиальных векторных полей, что позволяет наделить его структурой алгебры Ли. Легко проверить, что структура алгебры Ли согласована с градуировкой, т. е. $g(V)$ – градуированная алгебра Ли. При этом $g_0(V)$ является подалгеброй в $g(V)$ и может быть естественным образом отождествлена с $gl(V)$.

Любая транзитивная градуированная алгебра может быть отождествлена с некоторой градуированной подалгеброй алгебры Ли $g(V)$, для которой $g_{-1} = g_{-1}(V)$. Для нахождения всех таких подалгебр применим следующий алгоритм классификации:

1. Описать с точностью до сопряженности все подалгебры $g_0 \subset g_0(V) = gl(3, R)$. Перейти к шагу 3.

2. Пусть для некоторого $k \in N$ построена последовательность подпространств $g_i \subset g_i(V)$ такая, что $\left[g_i, g_j\right] \subset g_{i+j}$ для всех $i, j, i + j \le k$. Описываем все подпространства g_{k+1} в $g_{k+1}(V, g_0, \ldots, g_k) = \{x \in g_{k+1}(V) \mid [x, V] \subset g_k\}$, такие, что

$\widetilde{g}_{k+1}(V,g_0,...,g_k)=\oplus_{i+j=k+1,1\le i,j\le k}[g_i,g_j]\subset g_{k+1}$, и алгебра $\widetilde{g}(V,g_0,...,g_{k+1})$ конечномерна. Все подпространства $g_p\subset g_p(V)$ инвариантны относительно естественного действия g_0 на $g_p(V)$ для $p\ge 1$.

3. Найти подалгебры $\widetilde{g}(V,g_0,...,g_{k+1})$ и $g(V,g_0,...,g_{k+1})$. Если они не совпадают, то перейти к шагу 2. Иначе подалгебра $g=\widetilde{g}(V,g_0,...,g_{k+1})= =g(V,g_0,...,g_{k+1})$ является одной из таких подалгебр.

Все возможные подалгебры $g_0\subset g_0(V)$ описаны в следующей лемме.

Лемма. Любая подалгебра g_0 в $gl(3,R)$, не имеющая двумерных инвариантных подпространств, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

$$1.\begin{pmatrix} x & y & 0\\ z & 0 & y\\ 0 & z & -x\end{pmatrix};\qquad 2.\begin{pmatrix} 0 & y & x\\ -y & 0 & z\\ -x & -z & 0\end{pmatrix};\qquad 3.\begin{pmatrix} \lambda x & x & 0\\ -x & \lambda x & 0\\ z & y & 0\end{pmatrix}\ \lambda\ge 0;$$

$$4.\begin{pmatrix} \lambda x & x & 0\\ -x & \lambda x & 0\\ z & y & \mu x\end{pmatrix}\ \mu>0;\qquad 5.\begin{pmatrix} x+y & z & 0\\ u & x & z\\ 0 & u & x-y\end{pmatrix};\qquad 6.\begin{pmatrix} x & z & y\\ -z & x & u\\ -y & -u & x\end{pmatrix};$$

$$7.\begin{pmatrix} \lambda x & x & 0\\ -x & \lambda x & 0\\ z & y & u\end{pmatrix}\ \lambda\ge 0;\qquad 8.\begin{pmatrix} y & x & 0\\ -x & y & 0\\ z & u & \lambda x+\mu y\end{pmatrix}\ \lambda\ge 0;$$

$$9.\begin{pmatrix} x & y & 0\\ z & -x & 0\\ v & u & 0\end{pmatrix};\qquad 10.\begin{pmatrix} x & y & 0\\ -y & x & 0\\ v & u & z\end{pmatrix};\qquad 11.\begin{pmatrix} x & z & 0\\ u & y & 0\\ v & w & 0\end{pmatrix};$$

$$12.\begin{pmatrix} \lambda x+y & z & 0\\ u & \lambda x-y & 0\\ v & w & x\end{pmatrix};\qquad 13.\begin{pmatrix} x & u & 0\\ v & y & 0\\ t & w & z\end{pmatrix};$$

$$14.\begin{pmatrix} x & z & v\\ w & y-x & u\\ t & s & -y\end{pmatrix};\qquad 15.\begin{pmatrix} x & y & w\\ z & u & v\\ t & s & p\end{pmatrix}.$$

Здесь переменные обозначены латинскими буквами и должны принадлежать R, а параметры – греческими буквами. Подалгебры с различными значениями параметров не сопряжены друг с другом.

Замечание. Подалгебры 3, 4, 7, 8 и 10 являются разрешимыми и имеют инвариантные подпространства над полем C. Кроме этого, над полем C сопряжены между собой подалгебры 1 и 2, а также 5 и 6.

Используем описанный выше метод для классификации градуированных подалгебр g в $gl(V)$, таких, что $\dim g_{-1}=3$.

Теорема. *Любая конечномерная транзитивная градуированная алгебра g над полем R такая, что* $\dim g_{-1}=3$ *и* g_0 *не имеет двумерных инвариантных подпространств, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:*

а) Алгебра g_0 неразрешима:

$$1)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial x}+z\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle;$$

$$2)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},-z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$3)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$4)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-z\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z},x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+y^2/2\frac{\partial}{\partial z},xy\frac{\partial}{\partial x}+(xz+y^2/2)\frac{\partial}{\partial y}+yz\frac{\partial}{\partial z},\ y^2/2\frac{\partial}{\partial x}+yz\frac{\partial}{\partial y}+z^2\frac{\partial}{\partial z},\right\rangle;$$

$$5)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},-z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$6)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},-y\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial y},-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},-z\frac{\partial}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z},\right.$$
$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}+2xz\frac{\partial}{\partial z},\ 2xy\frac{\partial}{\partial x}+(y^2-x^2-z^2)\frac{\partial}{\partial y}+2yz\frac{\partial}{\partial z},\ 2xz\frac{\partial}{\partial x}+2yz\frac{\partial}{\partial y}+$$
$$\left.+(z^2-x^2-y^2)\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$7)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$8)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z},x^{k+1-p}y^p\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,$$
$p=0,1,\ldots,k+1,k=1,2,\ldots;$

$$9)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x},y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$10)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x},y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z},x^{k+1-p}y^p\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,$$
$p=0,1,\ldots,k+1,k=1,2,\ldots;$

$$11)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x},y\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z},x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y},\ xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y},\right.$$
$$\left.x^{k+1-p}y^p\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,\ p=0,1,\ldots,k+1,k=1,2,\ldots;$$

$$12)\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z},\ \lambda x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z},x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y},x\frac{\partial}{\partial y},y\frac{\partial}{\partial x},x\frac{\partial}{\partial z},y\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle;$$

$$13)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \lambda x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left. x^{k+1-p}y^{p}\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,\ p=0,1,\dots,k+1, k=1,2,\dots;$$

$$14)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle;$$

$$15)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, x^{k+1-p}y^{p}\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle,$$

$$p=0,1,\dots,k+1, k=1,2,\dots;$$

$$16)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+xz\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left. xy\frac{\partial}{\partial}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+yz\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle;$$

$$17)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, z\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+\lambda xz\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$$\left. xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+\lambda yz\frac{\partial}{\partial z}, x^{\lambda-p}y^{p}\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle,\ p=0,1,\dots,\lambda, \lambda=2,3,\dots;$$

$$18)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial x}, z\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle;$$

$$19)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial x}, z\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle;$$

$$20)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial z}, z\frac{\partial}{\partial x}, z\frac{\partial}{\partial y},\right.$$

$$\left. x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}+xz\frac{\partial}{\partial z}, xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}+yz\frac{\partial}{\partial z}, xz\frac{\partial}{\partial x}+yz\frac{\partial}{\partial y}+z^2\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle.$$

b) Алгебра g_0 разрешима:

$$21)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial z}, y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} w^i\,\overline{w}^j\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Im} w^i\,\overline{w}^j\frac{\partial}{\partial z} \right\rangle,$$

$w=x+iy$, $\lambda \geq 0$, $\forall\ i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $i_1, i_2, \dots, i_k, i, j \in \mathrm{N}\cup\{0\}$, $k \cup \mathrm{N}$, $i_l < i \leq i_{l+1}, j \leq i_{k-l}$ $(i_0=-1)$;

$$22)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y}+\mu z\frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial z}, \quad y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} w^i\,\overline{w}^j\frac{\partial}{\partial z},\right.$$

$\left.\operatorname{Im} w^i\,\overline{w}^j\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$; $w=x+iy$, $\mu>0$, $\forall\ i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $i_1, i_2, \dots, i_k, i, j \in \mathrm{N}\cup\{0\}$, $k \cup \mathrm{N}$, $i_l < i \leq i_{l+1}, j \leq i_{k-l}$ $(i_0=-1)$;

$$23)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \quad (\lambda x - y)\frac{\partial}{\partial x} + (x + \lambda y)\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial z}, \quad y\frac{\partial}{\partial z}, \quad z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z}, \right.$$

$$\left. \operatorname{Im} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \quad w = x + iy, \quad \lambda \geq 0, \quad \forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k \quad, i_1, i_2, \ldots, i_k, i, j \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad k \cup \mathrm{N},$$

$i_l < i \leq i_{l+1}, j \leq i_{k-l}$ $(i_0 = -1)$;

$$24)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + \mu z\frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + \lambda z\frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial z}, \quad y\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z}, \right.$$

$$\left. \operatorname{Im} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \quad w = x + iy, \quad \lambda \geq 0, \quad \forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k \quad, i_1, i_2, \ldots, i_k, i, j \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad k \cup \mathrm{N},$$

$i_l < i \leq i_{l+1}, j \leq i_{k-l}$ $(i_0 = -1)$;

$$25)\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial z}, \quad y\frac{\partial}{\partial z}, \quad z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \operatorname{Re} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z}, \right.$$

$$\left. \operatorname{Im} w^i \overline{w}^j \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle; \quad w = x + iy, \quad \forall\, i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \quad i_1, i_2, \ldots, i_k, i, j \in \mathrm{N} \cup \{0\}, \quad k \cup \mathrm{N},$$

$i_l < i \leq i_{l+1}, j \leq i_{k-l}$ $(i_0 = -1)$.

Замечание. *Любая конечномерная транзитивная градуированная алгебра g над полем C такая, что* $\dim g_{-1} = 3$ *и* g_0 *не имеет двумерных инвариантных подпространств, сопряжена одной и только одной из подалгебр 2, 5 – 20.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups.— J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970). P. 1–82.
2. Tanaka N. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.— Hokkaido Math. J., 8 (1979). P. 23–84.
3. Yamaguchi R. Differential systems associated with simple graded Lie algebras — Adv. Studies in Pure Math. V. 22 (1993). P. 413–494.