УДК 517.925.6

Е.Я. Кричавец, ассистент

О РЕШЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА

In the article common solutions of Hamilton's autonomous nonlinear systems are found. The movable singularities for these solutions are studied completely.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматриваемые как аналитические функции независимой комплексной переменной, характеризуются в основном особыми точками. Одной из важных задач аналитической теории дифференциальных уравнений является задача об исследовании подвижных особых точек решений нелинейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений [1–7].

Проведем исследование подвижных особенностей автономной системы Гамильтона вида

$$\frac{dx}{dz}=\frac{\partial \mathrm{H}(x,y)}{\partial y},\ \frac{dy}{dz}=-\frac{\partial \mathrm{H}(x,y)}{\partial x}, \tag{1}$$

где $z\in C$, $x, y\in C\bigcup\infty$.

Возьмем в качестве гамильтониана следующую функцию:

$$\mathrm{H}(x,y)=\frac{\tilde a_1x^2+\tilde a_2xy+\tilde a_3y^2}{\tilde b_1x^2+\tilde b_2xy+\tilde b_3y^2}, \tag{2}$$

где $\tilde a_1, \ldots, \tilde b_3$ – комплексные постоянные. Будем полагать, что $\tilde b_1\neq 0$. Разделим числитель и знаменатель гамильтониана на $\tilde b_1$ и введём новые коэффициенты: $a_1={}^{\tilde a_1}\!/_{\tilde b_1}$, …, $b_3={}^{\tilde b_3}\!/_{\tilde b_1}$. Построим систему дифференциальных уравнений типа (1)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}=\dfrac{(a_2-a_1b_2)x^3+2(a_3-a_1b_3)x^2y+(a_3b_2-a_2b_3)xy^2}{(x^2+b_2xy+b_3y^2)^2},\\[2ex] \dfrac{dy}{dz}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}=\dfrac{(a_2-a_1b_2)x^2y+2(a_3-a_1b_3)xy^2+(a_3b_2-a_2b_3)y^3}{(x^2+b_2xy+b_3y^2)^2}.\end{cases} \tag{3}$$

Из этой системы видно, что $\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\cdot\dfrac{y}{x}$. Значит, систему (3) можно записать так: $\begin{cases}\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y},\\ \dfrac{dy}{dz}=\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\cdot\dfrac{y}{x}.\end{cases}$ Откуда следует, что $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$, $y=cx$. После подстановки в первое уравнение системы (3) вместо y выражение cx получим

$$\frac{dx}{dz}=\frac{(a_2-a_1b_2)x^3+2(a_3-a_1b_3)x^2\cdot cx+(a_3b_2-a_2b_3)x\cdot(cx)^2}{(x^2+b_2x\cdot cx+b_3\cdot(cx)^2)^2}.$$

Или $\dfrac{dx}{dz}=F(c)\cdot\dfrac{1}{x}$, $x\cdot dx=F(c)\cdot dz$, $\dfrac{x^2}{2}=F(c)(z-c_1)$. В результате будем иметь общее решение системы (3)

$$\begin{cases} x=\sqrt{2F(c)(z-c_1)} \\ y=c\cdot\sqrt{2F(c)(z-c_1)} \end{cases}, \tag{4}$$

где c, c_1 – произвольные постоянные.

Дальше рассмотрим такой гамильтониан:

$$\mathrm{H}(x,y)=\frac{\alpha_1 x^3+\alpha_2 x^2 y+\alpha_3 xy^2+\alpha_4 y^3}{x^3+\beta_2 x^2 y+\beta_3 xy^2+\beta_4 y^3}, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \ldots, \beta_4$ – комплексные постоянные.

Решение системы дифференциальных уравнений, которая будет соответствовать этому гамильтониану, проведем другим образом. Запишем $\mathrm{H}(x,y)$ следующим образом: $\mathrm{H}(x,y)=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2\dfrac{y}{x}+\alpha_3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\alpha_4\left(\dfrac{y}{x}\right)^3}{1+\beta_2\dfrac{y}{x}+\beta_3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\beta_4\left(\dfrac{y}{x}\right)^3}$. Обозначим $\dfrac{y}{x}=\varphi(x,y)$. С учетом последнего системa типа (1) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz}=\dfrac{\partial}{\partial y}\mathrm{H}(\varphi(x,y))=\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}\cdot\varphi'_y=\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}\cdot\dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{dy}{dz}=-\dfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{H}(\varphi(x,y))=-\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}\cdot\varphi'_x=\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}\cdot\dfrac{y}{x^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, что $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$, откуда $\dfrac{y}{x}=c$. Ясно, что в таком случае $\dfrac{d\mathrm{H}}{d\varphi}$ будет определённой функцией относительно произвольной постоянной c, а $\dfrac{dx}{dz}=F(c)\cdot\dfrac{1}{x}$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений с гамильтонианом (5) имеет решение вида (4).

В результате можно утверждать, что подвижные особые точки в решениях автономных нелинейных дифференциальных систем Гамильтона с гамильтонианами (2) и (5) – это точки ветвления второго порядка, и только они.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939.
2. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л., 1950.
3. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
4. Еругин Н.П. Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
5. Мататов В.И. О характере подвижных особых точек некоторых систем Гамильтона // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. № 8. – С. 1502–1503.
6. Крычавец А.Я., Мататаў В.І. Аб аўтаномных сістэмах Гамільтона другога парадку з уласцівасцю Пенлеве // Весці БДПУ. 1998. № 3. – С. 121–124.
7. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987.– 478 с.