УДК 517.91

В.М. Марченко, профессор

О СТРУКТУРЕ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ[1]

The paper deals with a linear stationary descriptor system of control. Under general assumption, it is shown that such a system can be regarded as an ordinary dynamical control system with internal limitations.

Рассмотрим линейную стационарную дескрипторную динамическую управляемую систему вида

$$H\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ \ t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Hx(+0) = Hx_0. \tag{2}$$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}^r$, $t > 0$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, H, A, B – постоянные матрицы, $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times r}$; компоненты r-вектор-функции $u(\cdot)$, характеризующей внешнее воздействие (управление), являются кусочно-непрерывными функциями.

Используя левые и правые элементарные операции над матрицами [1], систему (1) можно преобразовать к виду

$$PHQQ^{-1}\dot{x}(t) = PAQQ^{-1}x(t) + PBDD^{-1}u(t) \tag{3}$$

с начальными условиями

$$PHQQ^{-1}x(+0) = PHQQ^{-1}x_0, \tag{4}$$

где $(m \times m)$-матрица P, $(n \times n)$-матрица Q и $(r \times r)$-матрица D выбраны так, что

$$PHQ = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ PAQ = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ PBD = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Здесь I_1, I_2, I_3 – единичные матрицы размеров n_1, n_2, r_1 соответственно, $A_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_{13} \in \mathbf{R}^{n_1 \times r_1}$ $A_{13} \in \mathbf{R}^{n_1 \times r_1}$, $A_{31} \in \mathbf{R}^{r_1 \times n_1}$, $A_{14} \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_3}$, $A_{41} \in \mathbf{R}^{n_3 \times n_1}$, $B_{11} \in \mathbf{R}^{n_1 \times r_1}$, $B_{21} \in \mathbf{R}^{n_2 \times r_1}$, $B_{12} \in \mathbf{R}^{n_1 \times r_2}$, $B_{22} \in \mathbf{R}^{n_2 \times r_2}$, где $n_3 = n - n_1 - n_2 - r_1$, $r_2 = r - r_1$, причем матрицы A_{14} и A_{41} могут быть выбраны треугольными.

Введем обозначения: $\left(Q^{-1}x(t)\right)' = \left[x_1'(t),\ x_2'(t),\ x_3'(t),\ x_4'(t)\right]'$, $\left(D^{-1}u(t)\right)' = \left[u_1'(t),\ u_2'(t)\right]'$, где $x_1(t) \in \mathbf{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbf{R}^{n_2}$, $x_3(t) \in \mathbf{R}^{r_1}$, $x_4(t) \in \mathbf{R}^{n_3}$, $u_1(t) \in \mathbf{R}^{r_1}$, $u_2(t) \in \mathbf{R}^{r_2}$, штрих $()'$ означает транспонирование.

Полагая

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

$$u_1(t) = -A_{31}x_1(t)\,, \tag{6}$$

систему (3)–(5) представим в виде

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & 0 & \overline{A}_{13} & \overline{A}_{14} \\ \overline{A}_{21} & I_2 & 0 & 0 \\ \overline{A}_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ 0 \end{bmatrix} u_2(t)\,, \tag{7}$$

где $\overline{A}_{11} = A_{11} - B_{11}A_{31}$, $\overline{A}_{21} = -B_{21}A_{31}$,

или, полагая

$$x_2(t) = -\overline{A}_{21}x_1(t) - B_{22}u(t)\,, \tag{8}$$

имеем

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A}_{11} & A_{13} & A_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + B_{12}u_2(t)\,, \tag{9}$$

причем

$$\overline{A}_{41}x_1(t) = 0\,, \tag{10}$$

или, вводя новое управление (внешнее возмущение)

$$v(t) = \left[x_3(t),\ x_4(t),\ u_2(t)\right]',\tag{11}$$

получаем

$$\dot{x}_1(t) = \overline{A}_{11}x_1(t) + \overline{B}v(t) \tag{12}$$

$$A_{41}x_1(t) = 0\,. \tag{13}$$

Таким образом, исследование дескрипторных систем вида (1), (2) может быть сведено к изучению обыкновенных динамических систем (12) с внутренними ограничениями (13) при начальных условиях

$$x_1(+0) = x_{10} \in \mathbf{R}^{n_1}\,, \tag{14}$$

при этом соотношения (8), (11) накладывают определенные ограничения типа гладкости на компоненты нового управления $v(t)$, $t > 0$. Однако, как нетрудно заключить из приведенных рассуждений, эти ограничения являются необходимыми для существования решений дескрипторной системы (1), (2). Их можно ослабить, если вместо системы (1) рассмотреть общую систему вида

$$\frac{d}{dt}\big(Hx(t)\big) = Ax(t) + Bu(t)\,.$$

Проводя аналогичные преобразования с выходом

$$y(t) = Cx(t), \quad C \in \mathbf{R}^{q\times n}\,, \tag{15}$$

системы (1), можем утверждать, что при некоторых предположениях (типа гладкости) на управление $u(t)$, $t > 0$, изучение дескрипторных управляемых динамических систем (1), (2), (15) можно свести, не ограничивая общности, к исследованию обыкновенных динамических систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \tag{16}$$

с начальным условием

$$x(+0) = x_0 \tag{17}$$

при внутренних ограничениях

$$Dx(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{18}$$

с выходом

$$y(t) = Cx(t) + Fu(t), \quad t > 0. \tag{19}$$

Такие системы рассматривались ранее как частный случай дескрипторных систем. Однако, как выше установлено, соотношения (16) – (19) без существенных ограничений можно считать общим представлением дескрипторных систем [2].

Вопрос об аналитическом представлении решений дескрипторных систем не является тривиальным и в общем случае остается открытым до настоящего времени. В этом отношении исследование представлений (16) – (18) видится более перспективным. Рассмотрим, например, для таких систем вопрос существования решения начальной задачи (17) при условии, что допустимые управления выбираются из класса векторных многочленов степени не выше $k \in N$.

Имеет место

Теорема. Пусть $m = n$, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Тогда для существования решения начальной задачи (16) – (18), т. е. вектор-функций $x(t)$, $u(t)$, $t > 0$, где $u(t)$ – векторный многочлен степени не выше k, удовлетворяющих соотношениям (16) – (18), необходимо и достаточно, чтобы начальное состояние x_0 системы (16) удовлетворяло соотношению

$$rank\begin{bmatrix} Dx_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ DAx_0 & DB & 0 & \cdots & 0 \\ DA^2x_0 & DAB & DB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ DA^{k+1}x_0 & DA^kB & DA^{k-1}B & \cdots & DB \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ DA^{k+n}x_0 & DA^{k+n-1}B & DA^{k+n-2}B & \cdots & DA^{n-1}B \end{bmatrix} =$$

$$= rank\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ DB & 0 & \cdots & 0 \\ DAB & DB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ DA^kB & DA^{k-1}B & \cdots & DB \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ DA^{k+n-1}B & DA^{k+n-2}B & \cdots & DA^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Доказательство. *Необходимость.* Последовательно дифференцируя соотношение (18) j раз ($j = 0, 1, \ldots$) и каждый раз полагая $t \to +0$, получаем

$$
\begin{aligned}
&Dx_0 = 0,\\
&DAx_0 + DBu(+0) = 0,\\
&\vdots\\
&DA^{k+1}x_0 + DA^k Bu(+0) + DA^{k-1}Bu'(+0) + \ldots + DBu^{(k)}(+0) = 0, \qquad (21)\\
&\vdots\\
&DA^{k+i}x_0 + DA^{k+i-1}Bu(+0) + \ldots + DA^{i-1}Bu^{(k)}(+0) = 0,\\
&i = 1,\ 2,\ \ldots,
\end{aligned}
$$

откуда вытекает справедливость соотношения (20).

Достаточность. Предположим, что (20) имеет место. Тогда существуют r-векторы $u(+0),\ u'(+0),\ \ldots,\ u^{(k)}(+0)$, такие, что соотношение (21) выполняется для $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Тогда с учетом известной из теории матриц теоремы Гамильтона – Кэли это соотношение имеет место при всех натуральных i. Полагая

$$
u(t) = \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!} u^{(j)}(+0)
$$

и применяя к (18) преобразование Лапласа, с учетом (21) получаем для изображения по Лапласу вектор-функции $Dx(t)$ выражение

$$
D(pI - A)^{-1}\left(x_0 + B\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{p^{j+1}} u^{(j)}(+0) \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p^{i+1}} DA^i \left(x_0 + B\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{p^{j+1}} u^{(j)}(+0) \right) =
$$

$$
= \frac{1}{p} Dx_0 + \frac{1}{p^2}\left(DAx_0 + DBu(+0)\right) + \ldots + \frac{1}{p^{k+2}}\left(DA^{k+1}x_0 + DA^k Bu(+0) + \ldots + DBu^{(k)}(+0)\right) + \ldots
$$

$$
\ldots + \frac{1}{p^{k+i+1}}\left(DA^{k+i}x_0 + DA^{k+i-1}Bu(+0) + \ldots + DA^{i-1}u^{(k)}(+0)\right) + \ldots \equiv 0, \qquad \operatorname{Re} p \ge \alpha,
$$

где α – достаточно большое положительное число. Переходя к оригиналам, имеем $Dx(t) \equiv 0,\ t > 0$, что завершает доказательство теоремы.

Отметим, что структура множества всех решений $x(t),\ u(t),\ t > 0$ системы (16), (18), соответствующих начальному состоянию x_0 в (17), при условии выполнения требования (20) описывается структурой решений неоднородной системы алгебраических уравнений (21) для $j = 1,\ \ldots,\ n$. Это замечание может оказаться полезным при изучении вопросов качественной теории управления в системах (1), (2), (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.
2. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 118. – Berlin, Springer-Verlag, 1989.