

9. Универсальная десятичная классификация. Алфавитно-предметный указатель П-Я; А-Z. - М.: Издательство стандартов, 1986. - Ч.2.

УДК 681.3:539.3

Т. А. Долгова, ст. преп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ О ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕХМЕРНОМ КОНЕЧНОМ ЭЛЕМЕНТЕ

The paper deals with the incompatible 3-dimensional finite element in which face arrangement and face number are variable. Geometrical description and algorithms for the analysis of finite element form are discussed.

Метод конечных элементов является мощным и гибким средством решения большого круга научно-технических задач. Широкое его применение для создания высокопроизводительных программных комплексов, входящих в системы автоматизированного проектирования, предъявляет жесткие требования к новым конечноэлементным подходам. Разработанные на их основе вычислительные алгоритмы должны обеспечивать высокую точность и надежность расчетов при сокращении необходимых ресурсов ЭВМ и универсальности использования. Снижение вычислительных затрат особенно важно при решении трехмерных задач из-за их большой размерности.

Для решения задач механики деформированного твердого тела таким современным и перспективным является метод внешних конечно-элементных аппроксимаций (МВКА) [1]. В методе строятся несовместные конечные элементы, что дает свободу выбора аппроксимирующих функций и формы конечного элемента (КЭ) [2]. Метод позволяет значительно сократить как число степеней свободы отдельного конечного элемента, так и общее число этих элементов. При этом обеспечивается высокая точность расчетов напряженно-деформированного состояния различных конструкций. Отсутствие связи между типом аппроксимирующих функций и формой элемента дает право выделить анализ геометрии такого КЭ как относительно самостоятельную задачу.

Рассмотрим трехмерный конечный элемент в форме произвольного, не обязательно выпуклого многогранника. Его грани представляют собой плоские выпукло-вогнутые многоугольники. Такие КЭ, по сравнению с криволинейными, позволяют наиболее простым способом описать и проанализировать форму элементов и являются более удобными с вычислительной точки зрения. В то же время произвольное число и расположение граней элементов позволяет с достаточной степенью точности аппроксимировать и криволинейные границы расчетной области.

При конечноэлементном разбиении всем КЭ, граням, ребрам и узловым точкам разбиения присваиваются последовательные номера. Геометрическое описание включает описание топологии и метрические данные. Информация о форме элемента структурирована по уровням — от КЭ до его узловых точек:

- область конечного элемента задается списком номеров граней;
- грань задается списком номеров ограничивающих ее ребер;
- ребро задается номерами двух узловых точек, являющихся его концами.

Списки являются неупорядоченными и содержат глобальные ссылочные номера, по которым можно получить информацию об объекте. Метрические данные представляют собой трехмерные координаты всех узлов в глобальной декартовой системе координат. Такая структура входных данных позволяет без больших преобразований информации использовать применяемые в системах автоматизированного проектирования препроцессоры, базирующиеся на формальных конструкторско-технологических языках описания конструкции [3].

Вычислительная технология МВКА включает этап формирования матрицы жесткости конечного элемента, для которого необходимы значения интегралов по области трехмерного КЭ. По формуле Остроградского тройной интеграл по пространственной области сводится к поверхностным интегралам первого рода по границе этой области, при этом в качестве коэффициентов используются направляющие косинусы внешней нормали к поверхности.

Начального описания геометрии недостаточно для того, чтобы сразу ответить на вопрос, какая из поверхностей грани является внешней по отношению к рассматриваемому КЭ. Таким образом, возникает необходимость доопределения топологической информации о конечном элементе. Рассмотрим подробнее задачу определения внешней нормали к граням, составляющим границу элемента.

Вектор, перпендикулярный плоскости грани, можно найти как векторное произведение двух векторов, лежащих в этой плоскости. Для определенности эти вектора удобно направить из первого узла вдоль первого и последнего ребер многоугольной грани. После нормирования полученного вектора на его длину будем иметь направляющие косинусы нормали n_1, n_2, n_3 . Для решения поставленной задачи необходимо определить, в какую сторону по отношению к внутренней области КЭ направлен построенный вектор n .

Рассмотрим вектор r , выходящий из некоторой точки C , коллинеарный исследуемому нормальному вектору и направленный в ту же сторону.

Причем точка C строго принадлежит внутренней области N -угольной грани (рис. 1). Точка P является концом вектора r . Длина вектора r должна быть меньше расстояния h от точки C до точки пересечения прямой (CP) и ближайшей грани КЭ. Тогда, если точка P не принадлежит внутренней области конечного элемента, n — искомый внешний вектор. В противном случае — нормальный вектор необходимо направить в противоположную сторону, и направляющие косинусы внешней нормали будут равны $-n_1, -n_2, -n_3$.

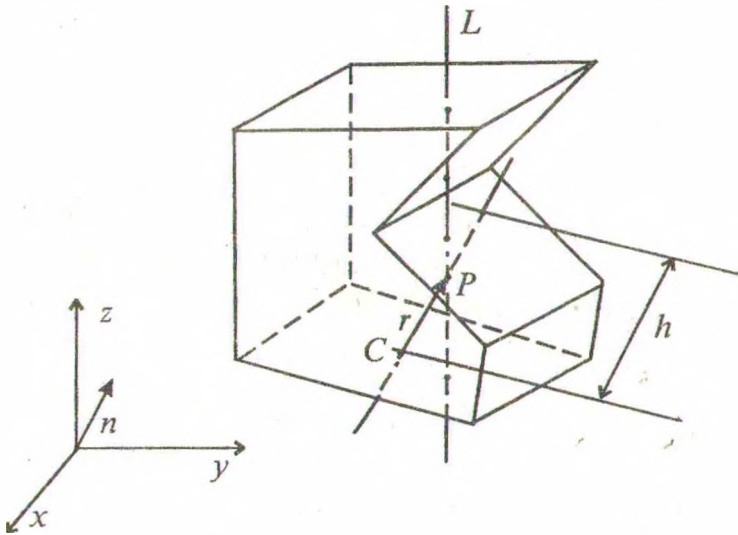


Рис. 1. Построение нормального вектора

Таким образом, стоит задача определения местоположения точки P относительно многогранника. Алгоритм решения этой задачи использует тот факт, что произвольная прямая пересекает замкнутую область четное число раз.

В процессе ее решения возникает относительно самостоятельная подзадача о местоположении точки и многоугольника, принадлежащих одной плоскости. Алгоритмы решения этих задач во многом схожи, поэтому рассмотрим «плоскую» задачу подробнее.

При ее решении находят точки пересечения прямой l , проходящей через исследуемую точку, с ребрами многоугольника. Все вычисления удобно выполнять, перейдя предварительно к локальной двумерной системе координат грани, а прямую l направлять вдоль одной из осей координат (например, вдоль оси абсцисс).

Известный алгоритм состоит из следующих шагов:

- построение прямой l , проходящей через заданную точку A , уравнение прямой l : $y = y_A$;
- нахождение пересекаемых прямой l ребер по условию:

$$y_i < y_A \leq y_{i+1} \text{ или } y_i > y_A \geq y_{i+1}, \quad (1)$$

где (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) — координаты узловых точек ребра;

— нахождение координаты x точек пересечения;

— сравнение координат x с x_A и подсчет точек пересечения, расположенных левее точки A ; если число таких точек нечетно, то исследуемая точка A принадлежит внутренней области грани.

По условию (1), в случае пересечения прямой l и узла k , учитывается одно из двух ребер, пересекающихся в этом узле (рис. 2 а). В некоторых случаях (рис. 2 б) это приводит к ошибкам.

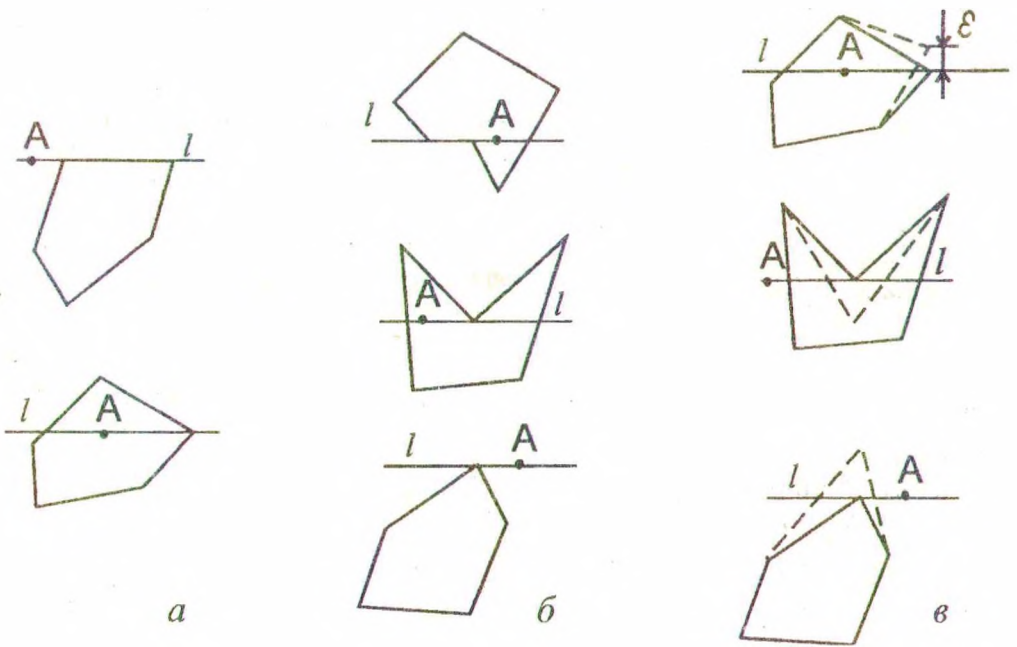


Рис. 2. Определение местоположения точки относительно многоугольника

Вероятность таких случаев невелика, однако полностью автоматизированный подход к расчетам требует учета всех возможных ситуаций. Выделим ситуации, когда $y_A = y_k$, и вместо узла k будем рассматривать точку с координатами $(x_k, y_k + \varepsilon)$ (рис. 2 в). Проверяемое затем условие — аналогично (1), но использует только строгие неравенства. Тогда для случаев *a* в рассмотрение включается одно из двух ребер, для случаев *б* — или оба, или ни одного. Величина ε выбирается произвольно, т. к. «сдвиг» узла используется только в конкретной ситуации и на дальнейшие вычисления не влияет.

Вернемся непосредственно к задаче определения положения точки относительно многогранного КЭ, ее решение состоит из следующих этапов:

- построение прямой L , проходящей через точку P параллельно оси OZ (см. рис. 1);
- нахождения точек пересечения L с гранями КЭ;
- определение их местоположения относительно точки P ;
- если число точек пересечения, лежащих выше P , четное, то P — внешняя, и наоборот.

Этап нахождения точек пересечения L с границей КЭ включает следующие шаги:

- грани, параллельные прямой L , исключаются из рассмотрения;
- отыскивается сначала точка K , являющаяся пересечением прямой и плоскости, в которой лежит рассматриваемая грань;
- определяется, принадлежит ли эта точка многоугольной грани, т. е. решается «плоская» подзадача.

Разработанные алгоритмы и программы прошли апробацию в составе комплекса конечноэлементных расчетов для большого числа разнообразных по форме КЭ.

Приведенные алгоритмы исключают необходимость последовательной нумерации ребер в заданном направлении или введения дополнительной информации для определения внешней поверхности грани КЭ. Это особенно важно ввиду того, что в настоящее время только ведется разработка алгоритмов для автоматизированного разбиения трехмерной области на произвольные элементы. Предлагаемый способ описания и анализа формы КЭ позволяет облегчить эту задачу и сократить объем вводимой информации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апанович В. Н. Метод внешних конечноэлементных аппроксимаций. - Мн.: Выш. шк., 1991.
2. Долгова Т.А. Несовместные трехмерные конечные элементы в задачах теории упругости // Труды БГТУ. Сер. IV, вып. 5.- Мн., 1997.- С. 66-71.
3. Цветков В.Д. Системно-структурное моделирование и автоматизация проектирования технологических процессов. - Мн., 1979.