ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич И.И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред // Дис. докт. физ.-мат. наук. - С-П.: СПГУ, 1993.
2. Ротт Л.А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979.
3. Evans R. The nature of the liquid-vapors interface and other topics in the statistical mechanics of nonuniform, classical fluids // Advances in Physics. - 1979. - Vol. 28, № 2. - P. 143-200.
4. Жаркевич А.В., Клинцевич С.И., Наркевич И.И. Единое статистико-механическое описание структурных, термодинамических свойств неоднородной молекулярной среды // Весцi АН РБ, сер. фiз.-мат. навук (в печати).
5. Narkevich I.I. A statistical study of the defect crystal lattice relaxation // Physica A. - 1988, № 150. - P. 659-571.
6. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошной среды. М., 1974.
7. Наркевич И.И., Клинцевич С.И., Ротт Л.А. Влияние флуктуаций поля плотности на взаимодействие частицы со средой в приближении линейной реакции. I. Постановка задачи и метод ее решения // Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук. - 1984, № 5. - С. 91-94.

УДК 537.84

А.Н.Вислович, доцент;
М.М.Тихонов, студент

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОКОВ И МАГНИТОВ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

The general expression to the description of interactions of flat sources of a magnetic field has been developed. From the expression received it simple follows basic effects of influence of a magnetic fluid on interactions

Одной из немногих точных моделей,которые позволяют составить представление о силах магнитостатического взаимодействия в текучей среде с высокой магнитной проницаемостью, является модель неограниченных плоских источников, с периодическим распределением намагниченности либо тока. Эта модель использовалась в ряде работ для изучения различных частных аспектов магнитостатических сил в магнитных жидкостях [1, 2]. В настоящей работе разработан наиболее общий подход к описанию взаимодействия плоских источников поля.

1. **Постановка задачи**. Каждый из источников представляет собой плоскопараллельный слой вещества (см. рис. 1), для которого закон намагничивания имеет вид **B** $= \mu_0(\mathbf{M}+\mu\mathbf{H})$, где **B**, **H** - вектора индукции и напряженности магнитного поля; μ_0 -магнитная постоянная; μ=const - магнитная проницаемость. Компоненты вектора **M**-известные периодические функции координаты x, направленной в плоскости слоя. На близлежащих поверхностях слоев может протекать поверхностный ток с известным периодическим распределением линейной плотности тока $j_y=j_y(x)$. Магнитная жидкость в зазоре между источниками, магнитная среда за источниками и другие элементы представляют собой многослойную систему. В общем случае количество слоев с различной магнитной проницаемостью может быть сколь угодно большим.

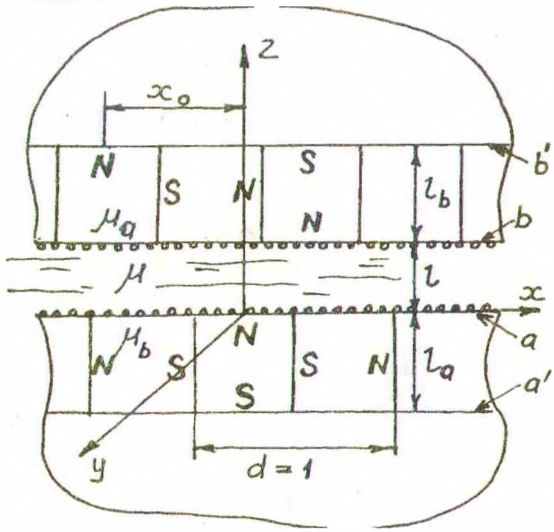

Рис. 1. Геометрия задачи

1 - источник "a"; 2 - источник "b"; 3 - токовые поверхности; 4 - постоянные магниты.

Будем рассматривать источники с одинаковым периодом d распределения намагниченности и тока,однако эти распределения могут быть смещены на некоторое расстояние x_0. При $x_0 = 0$ намагниченные перпендикулярно слою магниты ориентированы друг относительно друга противоположными полюсами, при x_0 = d/2 - одноименными полюсами, при $x_0 \neq 0$, d/2 - реализуется промежуточная ситуация. Распределение постоянной составляющей намагниченности и тока в источниках можно представить в виде разложения в ряды Фурье

$$M_x=-\sum_n M_{xn}\sin\varphi_n,\quad M_z=\sum_n M_{zn}\sin\varphi_n,\quad j_y=\sum_n J_n\sin\varphi_n, \qquad (1)$$

где $\varphi_n = 2\pi n(x+x_0)/d$, $n = 1,2,...$ Для системы выполняется принцип суперпозиции,что позволяет рассматривать поле,создаваемое магнитами,как суперпозицию полей, создаваемых отдельными гармоническими составляющими распределений (1). Основные эффекты взаимодействия источников можно изучить,оставив в распределении (1) только основную гармонику ($n = 1$). Таким образом, полагаем

$$M_x = -M_{xa}\sin x,\ M_z=M_{za}\cos x,\ j_y=j_a\sin x \quad \text{-для источника “a”}, \tag{2}$$

$$M_x = -M_{xb}\sin(x+x_0),\ M_z=M_{zb}\cos(x+x_0),\ j_y=j_b\sin(x+x_0)\ - \tag{3}$$

- для источника “b”.

Здесь и далее индексами “a”, “b” отмечены величины, относящиеся к различным источникам; в качестве единицы измерения пространственных переменных выбраны величины $d/2\pi$, ($x = 2\pi x/d$).

В дальнейшем для определенности будем рассматривать силу σ, которая действует на единицу площади поверхности источника “a” (сила, действующая на источник “b”, может быть рассмотрена аналогично). Эта сила обусловлена давлением жидкости на поверхность источника и максвелловскими напряжениями. В конечном счете ее компоненты выражаются через компоненты напряженности поля по формулам [2, 3]:

$$\sigma_z=\mu_0\, \mu(H_z^2-H_x^2),\ \sigma_x=\mu_0\, \mu H_x H_z\ . \tag{4}$$

Компоненты вектора напряженности **H** находятся из уравнений Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \times \mathbf{H} = 0$ с учетом условий непрерывности нормальной составляющей вектора индукции B_z и скачка касательной составляющей напряженности H_z на границе раздела сред с различными магнитными свойствами.

2. **Расчет магнитного поля плоского источника в слоистой среде**. В соответствии с уравнениями Максвелла, поле, создаваемое источником, в любом (i-ом) слое рассматриваемой многослойной системы можно представить в виде

$$H^{(i)} = L_i e^{-(z-z_i)}(\mathbf{i}\,\sin x+\mathbf{k}\cos x)+R_i\, e^{(z-z_i)}(-\mathbf{i}\sin x+\mathbf{k}\cos x) - \mathbf{i}\, M_x^{(i)} / \mu^{(i)}, \tag{5}$$

где **i**,**k**- единичные векторы x и z-осей соответственно,постоянные L_i и R_i определяются из условий на границах раздела.

Рассмотрим поле, создаваемое источником “a”. Величины, относящиеся к поверхности источника “a”, близлежащей к источнику “b”, будем обозначать индексом “a”, а величины, относящиеся к удаленной поверхности, индексом - “a”. Для поверхности “*a*” условия на границе раздела имеют вид

$$\mu H_z=M_z+\mu_a H_{za}, \quad H_x-H_{xa}=j_y - M_x/\mu_a\ , \tag{6}$$

где H_x, H_{xa} - проекция напряженности поля вблизи поверхности "*a*" снаружи и внутри источника соответственно.

С учетом (5), (2) из (6) следует

$$m_a(L+R)-(L_a+R_a)=M_{za}/\mu_a\,,\quad m_a=\mu/\mu_a\,,$$

$$L+R-(L_a+R_a)=M_{xa}/\mu_a+j_a. \tag{7}$$

Отсюда находим

$$L_a=(L+r_aR)/(1-r_a)-M_{La}/\mu_a+j_a/2,$$

$$R_a=(r_aL+R)/(1-r_a)-M_{Ra}/\mu_a+j_a/2, \tag{8}$$

где

$M_{La}=(M_{xa}+M_{za})/2, M_{Ra}=(-M_{xa}+M_{za})/2;\ r_a=(m_a-1)/(m_a+1)=(\mu-\mu_a)/(\mu+\mu_a)$.

Для поверхности "*a'* " граничные условия имеют вид, аналогичный (6), с той лишь разницей, что μ необходимо заменить на магнитную проницаемость μ' прилегающего к "*a'* " слоя и положить $j = 0$. Тогда вместо (8) получим

$$L_{a'} = (L' + r_{a'}R')/(1-r_{a'}) - M_{La}/\mu_a\,,$$

$$R_{a'} = (r_{a'}L' + R')/(1-r_{a'}) - M_{Ra}/\mu_a. \tag{9}$$

Как следует из (5), постоянные,определяющие поле внутри одного слоя, связаны соотошениями

$$L_a=L_{a'}\,e^{-la},\ \ R_a=R_{a'}\,e^{la}\,. \tag{10}$$

Для поверхности "*a*" основным параметром является параметр L, определяющий убывающую по мере удаления от поверхности магнита составляющую поля. Параметр R определяет убывающую по мере приближения к поверхности магнита составляющую поля. Эта составляющая поля связана с отражением поля от других границ раздела в полупространстве поверхности а. Поэтому R можно выразить через L. Введем коэффициент отражения поля от полупространства, прилегающего к поверхности "*a*" (не включающего саму поверхность "*a*"), как отношение $s_{a+1}=R_{a+1}/L_{a+1}$, где R_{a+1}, L_{a+1} - параметры поля вблизи ближайшей к магниту а+1-ой границы раздела двух сред. Учитывая, что $R_{a+1}=Re^{l1}$,$L_{a+1}=Le^{-l1}$ (l_1 - расстояние от а-ой до а+1-ой границы), получим

$$s_{a+1} = Re^{2l_1}/L \quad\Rightarrow\quad R = s_{a+1}e^{-2l_1}\,. \tag{11}$$

Для поверхности "*a'* " основным параметром является параметр R', через которую можно выразить параметр отраженного поля *L'*. Используя коэффициент отражения $s_{a'+1} = L_{a'+1}/R_{a'+1}$,получим соотношение, аналогичное (11):

$$s_{a'+1}=L'\,e^{2l_1}/R' \Rightarrow L'=s_{a'+1}R'\,e^{2l_1}. \qquad (12)$$

С учетом (11), (12) система (8), (9) принимает вид

$$L_a=L/q_a-M_{La}/\mu_a-j_a/2, \qquad R_a=s_aL/q_a-M_{Ra}/\mu_a+j_a/2, \qquad (8')$$

$$L_{a'}= R's_{a'}/q_{a'}-M_{La}/\mu_a, \qquad R_{a'}=R'/q_{a'}-M_{Ra}/\mu_a, \qquad (9')$$

где

$$q_a= (1-r_a)/(1+r_as_{a+1}\,e^{-2l_1}),\ q_{a'}= (1-r_{a'})/(1+r_{a'}s_{a'+1}\,e^{-2l_1}), \qquad (13)$$

$$s_a=(r_a+s_{a+1}\,e^{-2l_1})/(1+r_as_{a+1}\,e^{-2l_1}),\quad s_{a'}=(r_{a'}+s_{a'+1}\,e^{-2l_1})/(1+r_{a'}s_{a'+1}\,e^{-2l_1}). \qquad (14)$$

Параметры sa ,sa' представляют коэффициенты отражения от полупространств, включая сами поверхности источника "a"и "a' ".

Если в полупространствах, прилегающих к поверхностям источника, не имеется границ раздела сред с различными μ , то $s_{a+1} = 0$, $s_{a'+1} =0$ и, следовательно, $s_a = r_a$, $s_{a'} = r_{a'}$. Если в полупространствах имеется несколько границ раздела, то формулы (14) представляют собой рекурентные формулы для расчета интегральных коэффициентов отражения поля от полупространств. Пусть, к примеру, *n*-номер наиболее удаленной границы раздела. Тогда $s_{a+n+1}=0$ и рекурентный ряд для расчета s_a имеет вид

$$s_{a+n}=r_{a+n}\ ,\ s_{a+n-1}=(r_{a+n-1}+r_{a+n}e^{-2ln})/(1+r_{a+n-1}\,r_{a+n}e^{-2ln}),\ s_{a+n-2}=\ldots \qquad (15)$$

Аналогичным образом рассчитываются коэффициенты отражения от полупространства *a'*.

Систему (8'), (9'), (10), которая определяет основные параметры поля L и R , на поверхностях источника "a", можно представить в виде

$$\frac{L_a}{q_a}-\frac{\bar{s}_a'}{q_a'}\cdot e^{-l_a}R_a'=\frac{M_{La}}{\mu_a}\left(1-e^{-l_a}\right)+\frac{j_a}{2}, \qquad (16)$$

$$-\frac{s_a}{q_a}e^{-l_a}L_a+\frac{R_a'}{q_a'}=\frac{M_{Ra}}{\mu_a}\left(1-e^{-l_a}\right)+\frac{j_a}{2}e^{-l_a}. \qquad (17)$$

Здесь сделано переобозначение величин $L \equiv L_a$, $R' \equiv R_a'$. Кроме того, чертой сверху здесь и в дальнейшем помечены коэффициенты отражения R-поля в отличие от коэффициентов отражения L-поля. Это упрощает формулировку общего выражения для силы. Из (16), (17) находим основной параметр поля на поверхности источника "a", обращенной к источнику "b".

$$L_a \equiv H_a = \frac{(1-r_a)\left(\left(M_{La}+\bar{s}_a\cdot M_{Ra}e^{-la}\right)\left(1-e^{-la}\right)/\mu_a + j_a\left(1+\bar{s}_a\cdot e^{-2la}\right)/2\right)}{\left(1+r_a s_b e^{-2l}\right)\left(1-s_a\bar{s}_a\cdot e^{-2la}\right)}. \qquad (18)$$

3. **Общее выражение для силы взаимодействия плоских источников.** Для источника "b" можно обосновать систему, аналогичную (16), которая следует из (16), если в ней сделать замену индекса $a \to b$ и поменять местами токовые источники поля в уравнениях (16), (17). Тогда для основного параметра поля на поверхности источника "b", обращенной к источнику "a", получим выражение, аналогичное (18),

$$R_b \equiv H_b = \frac{(1-\bar{r}_b)\left(\left(M_{Rb}+s_b\cdot M_{Lb}e^{-l_b}\right)\left(1-e^{-l_b}\right)/\mu_b + j_b\left(1+s_b\cdot e^{-2l_b}\right)/2\right)}{\left(1+\bar{r}_b\bar{s}_a e^{-2l_b}\right)\left(1-s_b\cdot e^{-2l_b}\right)}. \qquad (19)$$

Параметры отраженных полей на обращенных друг к другу поверхностях источников рассчитываются по (11), (12), с учетом того, что ближайшей границей раздела в полупространстве поверхности "b'", является поверхность "a", и наоборот:

$$R_a = s_b e^{-2l}H_a \qquad L_b = \bar{s}_a e^{-2l}H_b, \qquad (20)$$

где l - расстояние между поверхностями "a" и "b".

Поле в выражениях (4) представляет суперпозицию полей, создаваемых источниками "a" и "b".

$$H_z = (L^{(a)} + R^{(a)})\cdot\cos x + (L^{(b)} + R^{(b)})\cdot\cos(x+x_0);$$

$$H_x = (L^{(a)} - R^{(a)})\cdot\sin x + (L^{(b)} - R^{(b)})\cdot\sin(x+x_0),$$

где $L^{(a)}$, $R^{(a)}$, $L^{(b)}$, $R^{(b)}$ - параметры поля при некотором фиксированном z^*, в зазоре между источниками. После подстановки этих соотношений в (4) и усреднении по пространственной переменной x, получим

$$\sigma_z = \mu_o\mu[\, L^{(a)}R^{(a)} + L^{(b)}R^{(b)} + (L^{(a)}R^{(b)} + L^{(b)}R^{(a)})\cos x_o],$$

$$\sigma_x = \mu_o\mu[R^{(a)}L^{(b)} - L^{(a)}R^{(b)}]\sin x_o.$$

Если предположить, что z^* - координата поверхности "a", то $L^{(a)}=H_a$, $R^{(a)} = R_a$, $R^{(b)} = e^{-l}H_b$, $L^{(b)} = e^{l}L_b$. С учетом (20) получим окончательное выражение для проекции силы, которая приходится на единицу площади источника "a":

$$\sigma_z = \mu_0\mu e^{-l}\left(H_a H_b\left(1+\bar{s}_a s_b e^{-2l}\right)\cos x_0 + \left(H_a^2 s_b + H_b^2 e^{-2l}\right)e^{-l}\right), \qquad (21)$$

$$\sigma_x = \mu_0 \mu e^{-l} H_a H_b \left(1 - \bar{s}_a s_b e^{-2l}\right) \sin x_0 . \qquad (22)$$

Здесь H_a, H_b - определяются соотношениями (18), (19). Коэффициенты отражения рассчитываются по соотношениям типа (14), (15).

4. **Влияние магнитной проницаемости среды на силу взаимодействия плоских магнитов.** Из (21), (22) следуют выражения для расчета сил взаимодействия для широкого круга различных частных случаев (для магнитов, для токов, для комбинированных источников поля и т.д.), которые могут иметь место в устройствах различного назначения. Рассмотрим более детально зависимость сил взаимодействия от магнитной проницаемости жидкости, заполняющей зазор между источниками. Упростим геометрию задачи. Считая источники достаточно широкими, можно полагать в (18), (19) $e^{-l_a} \to 0$, $e^{-l_b} \to 0$, а в (22)-(23) – $\bar{s}_a = \bar{r}_a$, $s_b = r_b = -\bar{r}_b$. Кроме того, полагаем, что магнитная проницаемость магнитов одинакова, т.е. $\mu_a = \mu_b = \mu_1$ и

$$\bar{r}_b = \frac{\mu - \mu_b}{\mu_b + \mu} = r_a = \frac{\mu - \mu_a}{\mu_a + \mu} = \frac{\mu - \mu_1}{\mu_1 + \mu} = r.$$

При этих предположениях из (21), (22) вытекает

$$\sigma_z = \frac{\mu_0 \mu (1-r)^2 e^{-l}}{\mu_1^2 \left(1 - r^2 e^{-2l}\right)^2} \left[\tilde{M}_a \tilde{M}_b \left(1 + r^2 e^{-2l}\right) \cos x_0 - r\left(\tilde{M}_a + \tilde{M}_b\right) e^{-l}\right];$$

$$\sigma_x = \frac{\mu_0 \mu (1-r)^2 e^{-l}}{\mu_1^2 \left(1 - r^2 e^{-2l}\right)} \tilde{M}_a \tilde{M}_b \sin x_0,$$

где $\tilde{M}_a = \left(M_{za} + M_{xa} + \mu_1 j_a\right)/2$, $\tilde{M}_b = \left(M_{zb} - M_{xb} + \mu_1 j_b\right)/2$.

Рассмотрим взаимодействие источников, для которых либо только $M_n = M_{za} + \mu_1 j_a = M_{zb} + \mu_1 j_b \neq 0$, либо $M_n = M_{xa} = M_{xb} \neq 0$. В этом случае для сил притяжения ($M_{zb} + \mu_1 j_b \neq 0$, $\cos x_o = 1$; $M_x \neq 0$, $\cos x_0 = -1$) получим

$$\sigma_z = \frac{\mu_0 \mu (1-r)^2 e^{-l} M_n^2}{\mu_1^2 \left(1 + r e^{-l}\right)^2 4} = \frac{\mu_0 \mu M_n^2 e^{-l}}{\left(\mu + \mu_1 + (\mu - \mu_1) e^{-l}\right)^2}; \qquad (23)$$

для сил отталкивания ($M_{zb} + \mu_1 j_b \neq 0$, $\cos x_o = -1$; $M_x \neq 0$, $\cos x_0 = 1$) получим

$$\sigma_z = -\frac{\mu_0\mu(1-r)^2 e^{-l} M_n^2}{\mu_1^2\left(1-re^{-l}\right)^2 4} = \frac{\mu_0\mu M_n^2 e^{-l}}{\left(\mu+\mu_1-(\mu-\mu_1)e^{-l}\right)^2}. \tag{24}$$

Тангенциальная сила равна

$$\sigma_x = \pm\frac{\mu_0\mu e^{-l} M_n^2 \sin x_0}{(\mu+\mu_1)^2-(\mu-\mu_1)^2 e^{-2l}}. \tag{25}$$

Еще один характерный случай представляют силы нормального взаимодействия, при $\cos x_0 = 0$:

$$\sigma_z = -\frac{\mu_0\mu(1-r)^2 r e^{-2l} M_n^2}{\mu_1^2\left(1-r^2 e^{-2l}\right)^2 2} = -\frac{2\mu_0\mu\left(\mu^2-\mu_1^2\right)e^{-2l} M_n^2}{\left((\mu+\mu_1)^2-(\mu-\mu_1)^2 e^{-2l}\right)^2}. \tag{26}$$

В случае широких зазоров между источниками ($l \gg 1$, $e^{-l} \ll 1$) для сил отталкивания, сил притяжения и тангенциальной силы из (23)-(25) следует универсальное выражение

$$\sigma = \mu_0\mu M_n^2\ e^{-l}/(\mu+\mu_1)^2.$$

Как отсюда видно, с увеличением магнитной проницаемости жидкости сила взаимодействия сперва увеличивается, а затем уменьшается и при $\mu \to \infty$, $\sigma \to 0$.

В случае узких зазоров ($l \ll 1$, $e^{-l} \ll 1$) характер зависимости различается. Силы притяжения $\sigma_z = \mu_0 M_n^2\ e^{-l}/(4\mu)$ уменьшаются, а силы отталкивания $\sigma_z = \mu_0\mu M_n^2\ e^{-l}/(4\mu_1^2)$ увеличиваются с увеличением магнитной проницаемости жидкости. Тангенциальные силы $\sigma_x = \mu_0 M_n^2\ e^{-l}/(4\mu_1)$ вовсе не зависят от этого фактора.

В патентной литературе встречаются предложения заполнять зазор между статором и ротором электродвигателя текучей средой с высокой магнитной проницаемостью с целью увеличения индукции поля в зазоре, что, по мнению авторов, должно приводить к увеличению мощности электродвигателя при неизменных габаритах. Как следует из проведенного анализа, такие действия не приведут к ожидаемому результату, поскольку мощность электродвигателей определяется тангенциальными силами, на которые магнитная проницаемость среды в узких зазорах не оказывает влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Magnetic fluids and Application Handbook / Editor - in chief: B. Bercovsky, Editor: V. Bashtovoi /, Begell House Inc. Pablishers, New York, USA, 1996.
2. Розенцвейг Р. Ферродинамика. - М.: Мир, 1989.
3. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термодинамику магнитных жидкостей. - М.: ИВТАН, 1985.

УДК 539.3

И.А. Миклашевич, ассистент

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭТНОГЕНЕЗА
1. О ИЗОМОРФИЗМЕ ЭВОЛЮЦИИ

Mathematical approach for description of evolution of social structures is proposed. Ethnos is chosen as a model.

1. Введение

Теория открытых систем в связи с общим развитием синергетики в последнее время привлекает всё большее число исследователей [1]. Одним из наиболее интересных примеров открытых систем являются социальные системы. Создание непротиворечивой математической модели социогенеза могло бы представлять значительный интерес и в теоретическом, и в практическом плане.

Необходимо сделать несколько принципиальных замечаний. Конкретная физическая аксиоматика в теории социальных систем пока не существует, поэтому мы вынуждены будем использовать описательные дефиниции. В качестве социальной системы для расмотрения выбираем этнос. Под этносом понимаем совокупность людей, относящих себя к некоей выделенной группе, отличающейся от других по моральным критериям. Для этноса можно ввести определённые числовые характеристики: $N(t)$ - число членов этноса; $L_i(t)$ - продолжительность жизни *i-го* члена этноса. $Q_i(t,\tau)$ - интеллектуальный коэффициент. Далее будем считать, что индекс i нумерует текущего индивида (члена этноса), t -время. Время t имеет глобальный смысл, это время существования этноса $0 < t < 2000 \div 3000$ лет. τ имеет смысл локального времени, времени существования i -го члена этноса. $0 < \tau < 80 \div 90$.

Введём представление о коэффициенте репродукции информации ζ.

$$\zeta = \frac{I_e}{I_a}, \tag{1.1}$$