

## ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ИНФОРМАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ЛИНЕЙНЫХ СХЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

The article is devoted to development of the method, allowing to compare various schemes of organizational management. The direct purpose of work is definition of a method of calculation of resistance for various kinds of schemes of management. In the result the dependence between fractal dimension of information stream and intensity of a stream for linear schemes with different indices of management is received.

Важной задачей теории управления, имеющей также большое практическое значение, является построение методов, позволяющих сопоставить различные схемы управления между собой. Разработанные в настоящее время подходы для решения данной задачи опираются на расчет параметров, характеризующих структуру схем управления, таких как количество уровней управления, норма управляемости, степень сложности и т. п. [1]. Наряду с такого рода параметрами представляют интерес характеристики, которые опираются на определенные процессы, происходящие в схемах управления.

В работе для этих целей используется процесс распространения информации. Как указывается в [2], передача управляющего воздействия на нижележащий уровень сопряжена с необходимостью выбора одного из звеньев на этом уровне. Количество информации, которая должна быть обработана при этом, равно логарифму от нормы управляемости. При переходе от уровня к уровню количество информации будет расти. Необходимость обработки этой информации будет приводить к увеличению времени решения управленческой задачи. Таким образом, можно говорить о том, что в схеме управления существует «сопротивление» информационному потоку. Целью работы является разработка метода расчета этого сопротивления для различных видов схем управления.

В [2] устанавливается подобие между схемой управления и простейшей электрической цепью. В соответствии с ним функционально звено управления подобно участку электрической цепи с сопротивлением  $R$ . Если воспользоваться данной аналогией, то линейная схема управления на рис. 2 подобна электрической схеме на рис. 1.

Электрической схеме на рис. 1 может быть сопоставлен реальный физический объект, имеющий структуру, описываемую канторовским множеством типа, приведенного на рис. 3. Например, в работе [3] электрическая схема на рис. 1 является эквивалентной схемой при расчете сопротивления шероховатой поверхности, моделируемой канторовским множеством.

Канторовское множество строится следующим образом [4]. На каждой последующей стадии построения множества удаляется часть исходного отрезка, а оставшиеся два отрезка имеют размер, составляющий  $1/a$  ( $a > 2$ ) от длины исходного отрезка. Построенное таким образом канторовское множество является фрактальным объектом, при этом его фрактальная размерность  $D < 1$ . Каждая новая стадия построения канторовского множества соответствует разветвлению электрической цепи. При этом сопротивление каждой последующей ветви увеличивается в  $a$  раз (рис. 1), поскольку во столько же раз уменьшается толщина соответствующего выступа поверхности [3].

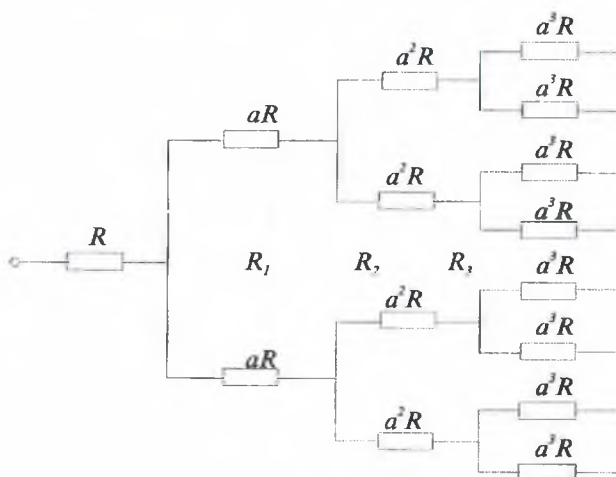


Рис. 1. Электрическая схема, эквивалентная схеме управления

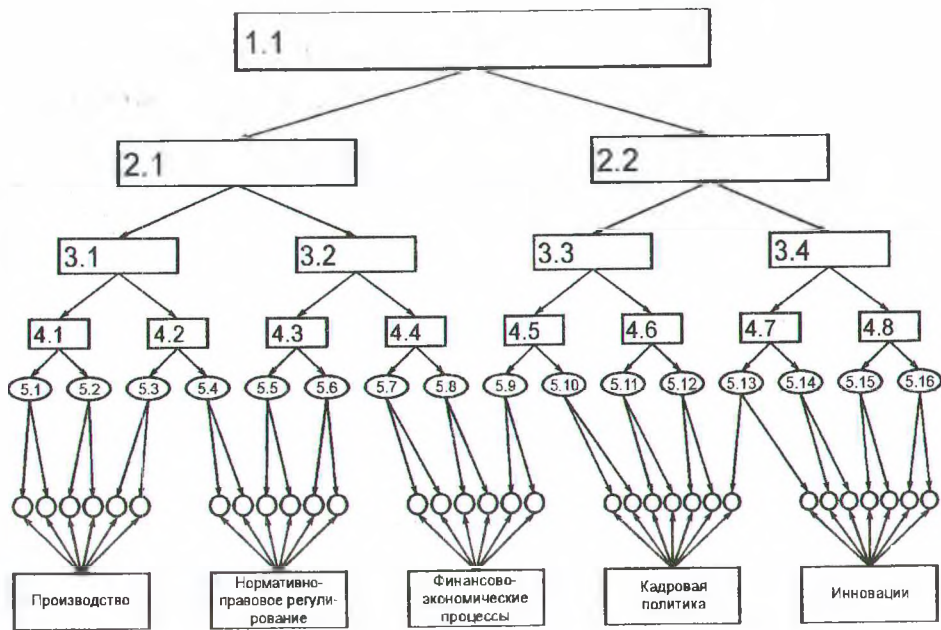


Рис. 2. Линейная схема управления с нормой управляемости  $\lambda = 2$

Если проводить аналогию со схемой управления, то фрактальная размерность канторовского множества  $D$  может быть использована в качестве меры «сопротивления» информационному потоку. Поскольку при уменьшении фрактальной размерности  $D$  уменьшается «толщина» проводников информационного тока, то «сопротивление» в схеме управления будет возрастать. В практическом плане это означает, что будут возрастать потери при прохождении управленческой информации по уровням схемы управления.

В свою очередь, чем меньше «сопротивление» схемы управления информационному потоку, тем она эффективнее.

Общее сопротивление электрической цепи на рис. 1 для постоянного тока

$$R_{об} = R + R_1 + R_2 + \dots + R_{n-1}, \quad (1)$$

где  $R$  — сопротивление звеньев электрической цепи;  $n$  — номер уровня.

При параллельном соединении проводников на втором уровне схемы на рис. 1 для сопротивления выполняется соотношение

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{aR} + \frac{1}{aR}. \quad (2)$$

Из (2) получаем общее сопротивление на втором уровне:

$$R_1 = aR / 2. \quad (3)$$

По аналогии с (2) общее сопротивление на третьем уровне

$$\frac{1}{R_2} = \frac{2}{a^2R} + \frac{2}{a^2R}. \quad (4)$$

Соответственно из (4) получаем

$$R_2 = \frac{a^2R}{2^2}. \quad (5)$$

Подставим в (1) соотношения (3) и (5):

$$R_{об} = R \left[ 1 + \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} \right]. \quad (6)$$

Введем обозначение  $b = a/2$ , тогда (6) можно переписать в виде

$$R_{об} = R(1 + b + b^2 + \dots + b^{n-1}). \quad (7)$$

Выражение (7) представляет собой геометрическую прогрессию, сумма первых  $n$ -членов которой определяется по формуле

$$S_n = \frac{b^{n-1} - 1}{b - 1}. \quad (8)$$

С учетом (8) формулу (7) можно привести к виду

$$R_{об} = \frac{2R \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^{n-1} - 1 \right]}{a - 2}. \quad (9)$$

Количество элементов  $N$  в схеме управления (рис. 2) на уровне  $n$  при норме управляемости  $\lambda = 2$  определяется по формуле [1]

$$N = 2^{n-1}. \quad (10)$$

По определению, приведенному в [2], собственная сложность схемы на рис. 2

$$C_c = \log_2 N. \quad (11)$$

Подставим  $N$  из формулы (10) в (11):

$$C_c = n - 1. \quad (12)$$

Выразим  $n-1$  из (9):

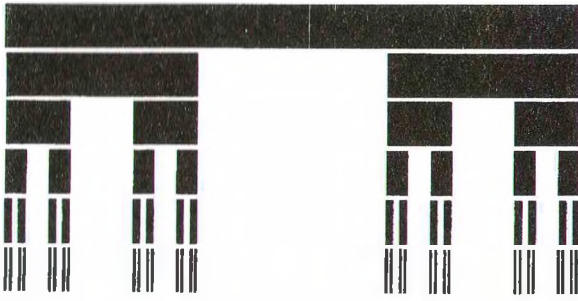


Рис. 3. Триадное канторовское множество с фрактальной размерностью  $D = \ln 2 / \ln 3 = 0,63$

$$n-1 = \log_a \left[ \frac{R_{об}(a-2)}{2R} + 1 \right]. \quad (13)$$

Определим область допустимых значений для логарифма в формуле (13):

$$\frac{a}{2} \neq 1; \quad a \neq 2; \quad \frac{R_{об}}{2R}(a-2) + 1 > 0. \quad (14)$$

Неравенство (14) выполняется всегда, так как для канторовского множества  $a > 2$ .

Далее подставляем  $n$  из (13) в (12):

$$C_c = \log_a \left[ \frac{R_{об}(a-2)}{2R} + 1 \right]. \quad (15)$$

По определению [4], фрактальная размерность канторовского множества

$$D = \frac{\ln 2}{\ln a}. \quad (16)$$

Преобразуем (16):

$$D = \frac{1}{\log_2 a}. \quad (17)$$

Выразим  $a$  из (17):

$$a = 2^{\frac{1}{D}}. \quad (18)$$

Подставим (18) в (15):

$$C_c = \frac{D}{1-D} \times \log_2 \left[ \frac{R_{об}}{2R} (2^{\frac{1}{D}} - 2) + 1 \right]. \quad (19)$$

Предположим, что управляющие воздействия образуют в системе управления информационный поток (по аналогии с электрической цепью — ток) с интенсивностью  $k$ , распределенный в соответствии с законом Пуассона [2]:

$$I(t) = f(t) = k \times e^{-kt}. \quad (20)$$

Уравнение аналогичной электрической цепи имеет вид

$$U = I \times R_{об}. \quad (21)$$

В схеме управления (информационной цепи) напряжению  $U$  соответствует информационная

энтропия Шеннона  $H$  [2]. С учетом этого факта подставим (20) в (21):

$$H = k \times e^{-kt} \times R_{об}. \quad (22)$$

Далее выразим из (22)  $R_{об}$ :

$$R_{об} = \frac{H}{k} \times e^{kt}. \quad (23)$$

Подставим  $R_{об}$  из (23) в (19) и учтем, что сопротивление связано с интенсивностью информационного потока  $R = 1/k$ :

$$C_c = \frac{D}{1-D} \log_2 \left[ \frac{H}{2} \times e^{kt} (2^{\frac{1}{D}} - 2) + 1 \right]. \quad (24)$$

Системная сложность схемы управления равна ее энтропии  $C_o \equiv H$ , поэтому (24) можно представить окончательно в следующем виде:

$$C_c = \frac{D}{1-D} \log_2 \left[ \frac{C_o}{2} \times e^{kt} (2^{\frac{1}{D}} - 2) + 1 \right]. \quad (25)$$

Для схемы управления с нормой управляемости  $\lambda = 3$  выражения (12) и (13) имеют соответственно вид

$$C_c = \log_2 3^{n-1}, \quad (26)$$

$$n-1 = \log_a \left[ \frac{R_{об}(a-3)}{3R} + 1 \right]. \quad (27)$$

Подставим (27) в (26):

$$C_c = \log_2 3^{\frac{\log_a \left[ \frac{R_{об}}{3R}(a-3) + 1 \right]}{3}}. \quad (28)$$

Учитывая (20), (21) и проведя аналогичные преобразования, получим

$$C_c = \log_2 3^{\left( \frac{D}{1-D} \log_3 \left[ \frac{C_o}{3} e^{kt} (3^{\frac{1}{D}} - 3) + 1 \right] \right)}. \quad (29)$$

Выражение (29) является аналогом (25), только оно получено для схемы с  $\lambda = 3$ . Данные выражения позволяют вычислить фрактальную размерность канторовского множества  $D$  и тем самым определить меру «сопротивления» информационному потоку в линейных схемах управления типа приведенной на рис. 2.

При проведении конкретных расчетов учитывалось, что для схемы с  $\lambda = 2$  системная сложность  $C_o = 31$ , собственная сложность  $C_c = 4$ . Для схемы с  $\lambda = 3$  соответственно  $C_o = 20,6$  и  $C_c = 3$ . Интервал наблюдения  $t$  выбирался из условия, чтобы функция распределения информационного потока (20) практически затухала. Зависимости фрактальной размерности  $D$  от изменения интенсивности информационного потока  $k$  для рассмотренных схем приведены на рис. 4.



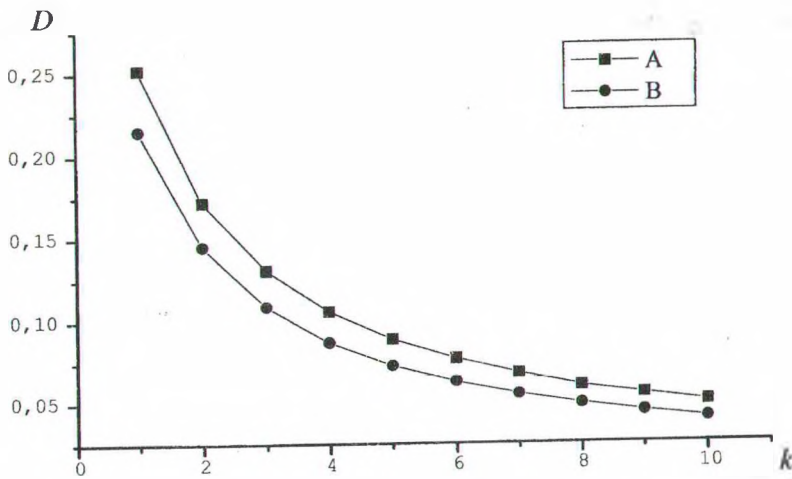


Рис. 4. Зависимость фрактальной размерности от интенсивности информационного потока для схем с нормой управляемости: А —  $\lambda = 2$ ; В —  $\lambda = 3$

Как видно на рис. 4, при увеличении интенсивности  $k$  фрактальная размерность  $D$  уменьшается. Геометрический смысл уменьшения  $D$  наглядно демонстрирует рис. 3.

В соответствии с формулой (16) уменьшению  $D$  сопутствует увеличение  $a$ . Таким образом, чем дальше  $D$  уходит от единицы, тем больше «сопротивление» схемы управления информационному потоку. Зависимости на рис. 4 свидетельствуют также, что с увеличением интенсивности потока «сопротивление», а следовательно, и потери информации возрастают. Результаты расчета показывают, что «сопротивление» схемы с нормой управляемости  $\lambda = 3$  в среднем на 17,9% больше, чем у схемы с  $\lambda = 2$ .

В заключение необходимо отметить, что в работе рассмотрены только два типа линейных схем организационного управления. Представля-

ет интерес исследовать с помощью разработанного подхода и другие более сложные схемы [2]. Построенная модель закладывает основы для такого рода исследований.

#### Литература

1. Трусевич Н. Э., Кулак М. И. Схемы линейных систем организационного управления в ИПК // Вестник издательско-полиграфического комплекса Беларуси, 2003. — № 1. — С. 79–84.
2. Волкова В. Н., Денисов А. А. Основы теории систем и системного анализа. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2003. — 518 с.
3. Лиу С., Каплан Т., Грэй П. Отклик шероховатых поверхностей на переменном токе // Фракталы в физике / Под ред. Л. Пьетронеро, Э. Тозатти. — М.: Мир, 1988. — С. 543–551.
4. Федер Е. Фракталы. — М.: Мир, 1991. — 254 с.