УДК 519.2

Гончаров В. Н., доцент; Гончарова В. А., доцент

ВЫБОР КРИТЕРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ПРОЦЕССА КАК СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

The article analyzes the system of printing enterprise maintenance. It presents a method of optimization of a number of channels for maintenance.

Математическая постановка задачи. Рассматривается математическая модель процесса выполнения случайного потока заказов издательским предприятием как n-канальная система массового обслуживания (СМО) с ожиданием и с полной взаимопомощью между каналами. Под каналами понимаются рабочие бригады, охватывающие весь комплекс работ по выполнения заказов. Все бригады считаются равноценными.

В случайные моменты времени в систему поступают заказы на выполнение издательских работ. Длительность обслуживания заказов также является случайной величиной. Поступление заказов и их обслуживание представляются как пуассоновские потоки событий. Известны интенсивности: λ — для потока заказов и μ — для потока обслуживания.

Если число поступивших заказов не превышает число каналов n, то заказы обслуживаются всеми каналами с одинаковой общей интенсивностью, равной $n\mu$. Если поступает заказ, когда все n каналов заняты, то он становится в очередь. Предполагается, что максимальное число заказов в очереди ограничено некоторой величиной m.

Если поступивший заказ застает все каналы занятыми и при этом заняты все места в очереди, то заказ покидает систему без обслуживания (получает отказ или уходит самостоятельно).

Ставится задача построить статистическую модель системы массового обслуживания с целью оптимизации числа каналов обслуживания заказов на издательские работы.

Математическая модель системы массового обслуживания. Поведение любой СМО характеризуется совокупностью состояний, под которыми понимаются вероятности нахождения в системе определенного числа заказов.

Для рассматриваемой системы массового обслуживания число состояний равно величине $n + m + 1$, включая состояние, при котором в системе отсутствуют заказы и все каналы свободны. Алгоритм работы СМО может быть

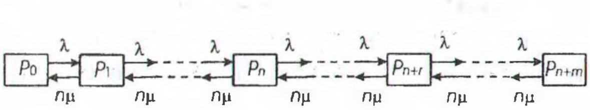

Рис. 1. Граф состояний системы массового обслуживания

построен на основе графического изображе-ния, называемого графом состояний. Для ука-занной постановки задачи строится граф со-стояний, приведенный на рис. 1.

На графе прямоугольниками обозначен возможные состояния системы. Так как зако распределения потока заказов и потока об служивания является пуассоновским, то из менение числа заказов в системе в кажды момент может происходить только на едини цу и система может переходить только соседнее состояние. Стрелки, направленны вправо, связаны с событиями, когда в слу чайные моменты времени с интенсивносты λ. поступают очередные заказы. В этом слу чае система переходит в соседнее справа со стояние.

Стрелками, направленными влево, обозна чены случайные события, связанные с обслу живанием заказов. Интенсивность потока об служивания заказов при полной взаимопомо щи между каналами равна $n\mu$. При наступле нии события, связанного с завершением об служивания заказа, происходит переход сис темы в соседнее слева состояние.

Через P_i (i = 0, 1, …, 6) обозначены состоя ния СМО, связанные с количеством заказо поступивших в систему, а именно:

P_0 — заказы отсутствуют. Все каналы сво бодные.

P_1 — в систему поступил один заказ. Все ка налы обслуживают этот заказ с общей интен сивностью $n\mu$.

P_i (i = 1, 2, …, n) — в системе находятся заказов. Все они обслуживаются всеми кана лами с общей интенсивностью $n\mu$.

P_{n+r} (r = 1, 2, …, m) — в систему поступи заказ, когда все каналы заняты. Заказ стано вится в очередь. В системе $n + r$ заказов, и которых n заказов обслуживаются всеми ка налами с интенсивностью $n\mu$, а r заказов очереди.

P_{n+m} — в системе находится максимально число заказов $n + m$.

Если в состоянии P_{n+m} на вход системы поступают еще заказы, то они не принимают ся на обслуживание (безразлично по како причине).

Из графа состояний получается систем дифференциальных уравнений Колмогорова Чепмена по правилам, описанным в [2]. Дл данного графа получается система уравнений

$$
\begin{cases}
dP_0 = -\lambda P_0 + n\mu P_1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
dP_k = -(\lambda + n\mu)P_k + \lambda P_{k-1} + n\mu P_{k+1}, \ (k = 1, 2, ..., n+m-1), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
dP_{n+m} = -n\mu P_{n+m} + \lambda P_{n+m-1}.
\end{cases} \quad (1)
$$

Решение дифференциальных уравнений выполняется в Mathcad с помощью функции rkfixed при заданных начальных условиях. Запишем начальные условия в виде вектора

$$P0 = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n+m} \end{pmatrix}^T.$$

Набор всех состояний образует полную группу событий.

Рассмотрим пример. Пусть число каналов равно $n = 3$, максимальная очередь $m = 3$. Среднее время между поступлением заказов $t_\lambda = 5{,}1$ дня, откуда интенсивность поступления заказов $\lambda = 1/t_\lambda$. Средняя продолжительность обслуживания $t_\mu = 10$ дней, откуда интенсивность потоков обслуживания одним каналом $\mu = 1/t_\mu$.

Модель массового обслуживания, соответствующая этим требованиям, имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{dP_0}{dt} &= -\lambda P_0 + n\mu P_1, \\
\frac{dP_1}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_1 + \lambda P_0 + n\mu P_2, \\
\frac{dP_2}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_2 + \lambda P_0 + n\mu P_2, \\
\frac{dP_3}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_3 + \lambda P_3 + n\mu P_4, \qquad (2) \\
\frac{dP_4}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_4 + \lambda P_3 + n\mu P_5, \\
\frac{dP_5}{dt} &= -(\lambda + n\mu)P_5 + \lambda P_4 + n\mu P_6, \\
\frac{dP_6}{dt} &= -n\mu P_6 + \lambda P_5.
\end{aligned}
$$

Решение системы (2) при заданных начальных условиях позволяет определить переходный процесс изменения вероятностей состояний P_j, $j = 0, 1, \dots, n + m$ во времени в течение планового периода.

Решение системы уравнений Колмогорова–Чепмена. В классической теории массового обслуживания решение задачи ограничивается рассмотрением установившегося режима. Этот режим описывается системой алгебраических уравнений, которая получается, если приравнять нулю левую часть уравнений (2). Возможность такого упрощения связана с тем, что во многих задачах переходный процесс является кратковременным и достаточно быстро наступает установившийся режим.

В рассматриваемой системе массового обслуживания должен рассматриваться переходный режим работы СМО, т. к интенсивность потока событий соизмерима с периодом планирования, и за плановый месячный период установившийся режим работы СМО не наступает. Поэтому рассмотрение только установившегося режима неправомерно. Пакет Mathcad позволяет получать решение системы уравнений Колмогорова–Чепмена в переходном режиме, как это сделано в данной работе. Применяемый подход опубликован в [3].

Ниже приводится расчет характеристик системы массового обслуживания для следующих исходных данных: период интегрирования — 1 месяц, число дней в месяце — 30. Число точек на интервале интегрирования принято равным 3000 из соображения устойчивости решения.

Таким образом, матрица решения P имеет размерность 3000×7.

Существенным является вопрос о выборе начальных значений вероятностей состояний СМО. В теории массового обслуживания чаще всего рассматриваются начальные условия, при которых заказы в системе отсутствуют и каналы свободны.

Тогда вероятности состояний определяются вектором $P0 = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)^T$.

Однако такой подход не единственный. Если решать реальную задачу помесячно, то естественно в качестве начальных значений вероятностей принять состояние, которое было в конце предыдущего месяца.

В рассматриваемой задаче такие данные отсутствуют. Поэтому принимается другое допустимое решение, при котором в начальный момент все состояния равновероятны.

В этом случае будем считать вероятность каждого состояния равной $b = 1/(n + m + 1)$, или для рассматриваемой конкретной задачи $b = 1/7$. Результаты решения задачи приводятся ниже на рис. 2.

Полученная матрица P вероятностей состояний и ее графическое представление во времени на рис.2 полностью определяют статистику поведения системы массового обслуживания. В качестве следующего этапа анализа модели можно определить среднемесячные значения вероятностей состояний. Эти значения находятся по формуле

$$Q_j = \sum_{i=0}^{3000} P_{i,j} / 3000, \quad j = 0, 1, 2, ..., n+m. \quad (3)$$

$$n := 3 \qquad m := 3 \qquad b := \frac{1}{7} \qquad P0 := (b\ \ b\ \ b\ \ b\ \ b\ \ b\ \ b)^T$$

$$t_\lambda := 5.1 \qquad \lambda := \frac{1}{t_\lambda} \qquad \lambda = 0.196 \qquad t_\mu := 10 \qquad \mu := \frac{1}{t_\mu} \qquad \mu = 0.1$$

$$D(t,P) := \begin{bmatrix} -\lambda\cdot P_0 + n\cdot\mu\cdot P_1 \\ -(\lambda + n\cdot\mu)\cdot P_1 + \lambda\cdot P_0 + n\cdot\mu\cdot P_2 \\ -(\lambda + n\cdot\mu)\cdot P_2 + \lambda\cdot P_1 + n\cdot\mu\cdot P_3 \\ -(\lambda + n\cdot\mu)\cdot P_3 + \lambda\cdot P_2 + (n\cdot\mu)\cdot P_4 \\ -(\lambda + n\cdot\mu)\cdot P_4 + \lambda\cdot P_3 + (n\cdot\mu)\cdot P_5 \\ -(\lambda + n\cdot\mu)\cdot P_5 + \lambda\cdot P_4 + (n\cdot\mu)\cdot P_6 \\ -(n\cdot\mu)\cdot P_6 + \lambda\cdot P_5 \end{bmatrix}$$

$$P := \mathrm{rkfixed}(P0, 0, 30, 3000, D)$$

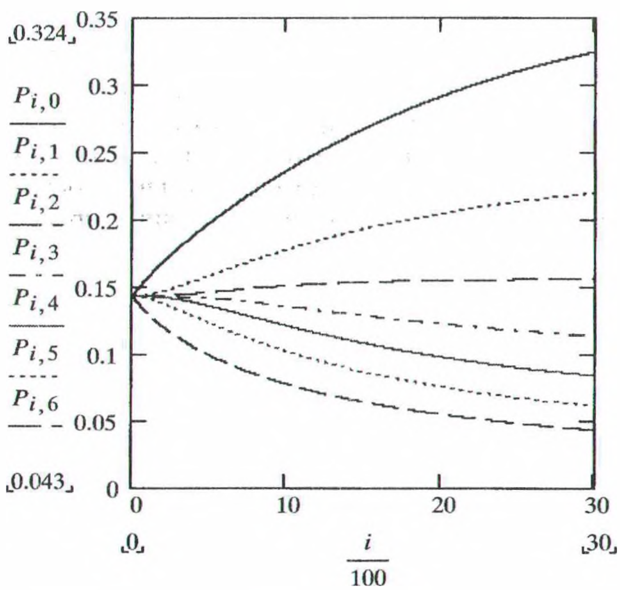

Рис. 2. Переходный процесс в системе массового обслуживания

Вероятности состояний Q_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n+m$ позволяют определить все эксплуатационные характеристики СМО издательского предприятия. В теории массового обслуживания рассматривается ряд параметров, характеризующих качество работы систем массового обслуживания [1, 2]. Среди них необходимо выбрать такие, которые могут быть использованы для оптимизации работы предприятия в плановом периоде.

Для системы массового обслуживания издательского предприятия представляется целесообразным оптимизировать число каналов обслуживания. Эту величину можно достаточно гибко изменять по месяцам, имея в виду возможность подключения дополнительных бригад со стороны или за счет дополнительных оплат.

Для оптимизации числа каналов необходимо выбрать критерий качества системы, связанный с вероятностями состояния СМО. Сформулируем обобщенный критерий оптимизации как комбинацию двух показателей в виде следующего выражения:

$$K = Q_0 + Q_{n+m}, \tag{4}$$

где Q_0 —средняя за месяц вероятность простоя одного канала; Q_{n+m} — средняя за месяц вероятность того, что все каналы заняты. С этой вероятностью вновь поступивший заказ покидает систему без обслуживания.

Таким образом, критерий K характеризует общую вероятность неблагоприятных ситуаций в системе, когда предприятие терпит материальный ущерб: за счет простоя каналов и вследствие ухода заказов из системы без обслуживания.

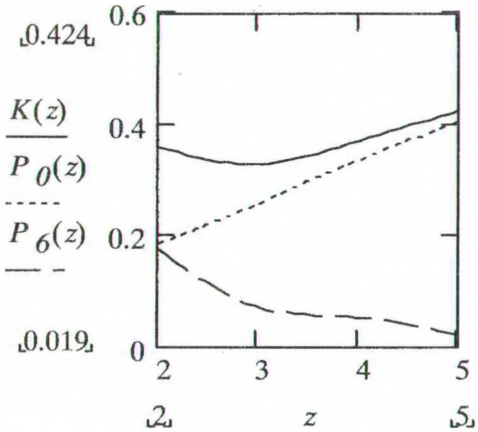

Рис. 3. Оптимизация числа каналов обслуживания

Задача оптимизации планирования состоит в том, чтобы определить такое оптимальное число каналов, при котором значение критерия K минимально.

Определение оптимального числа каналов производилось применительно к задаче, которая сформулирована в описании математической модели и с теми же численными параметрами. Варьировалось число каналов в пределах $n = 2, 3, 4$ и 5. Для каждого числа каналов строился граф состояний, составлялась и решалась система дифференциальных уравнений, подобная системе (2), но с разным числом каналов обслуживания. В результате моделирования получена зависимость критерия K от числа каналов обслуживания, приведенная на рис. 3.

На графике показано, что при увеличении числа каналов вероятность простоя каналов увеличивается, а вероятность выбития заказов без обслуживания уменьшается, что соответствует физическому смыслу этих показателей. Оптимальное число каналов при заданных параметрах и исходных данных находится в точке минимума критерия K и имеет значение $n = 3$.

Литература

1. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций. 6-е издание/ Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.

2. Вентцель Е. С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. — М.: Советское радио, 1980.

3. Гончаров В. Н., Гончарова В. А. Модель массового обслуживания для оптимизации планирования издательских работ // Труды международной научно-технической конференции «Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов». — Минск, 2003.