УДК 517.977

В.М.Марченко, профессор

ОБЗОР СОВРЕМЕННОГО СОСТОЯНИЯ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В БЕЛАРУСИ

A survey of the state of the qualitative control theory in Belarus is presented.

Математическая теория управления (МТУ)- современный раздел общей математической теории систем, в основу которой положены понятия состояния, входных (входов) воздействий и выходных (выходов) реакций системы. В такой теории система задаётся посредством т.н. «черного ящика», точнее, переходным отображением «вход-состояние-выход». Если входное отображение оказывается сюръективным, система считается вполне управляемой; в случае инъективности выход - отображения система называется вполне наблюдаемой. Если процесс управления (или наблюдения) развёртывается во времени, систему называют динамической (дискретной, если моменты времени изолированы). Для динамической системы входные воздействия подразделяются на внешние, как правило, выбираемые из определённого класса – управления, и внутренние, характеризующие стартовые состояния системы - начальные данные, которые зачастую заданы. Строго говоря, каждая задача об управлении необходимо включает следующие характерные моменты:

1) уравнения движения – соотношения (обычно функционально - дифференциальные), устанавливающие связь между входными и выходными переменными и переменными состояния и, таким образом, задающие отображение «вход-выход»;

2) ограничения на фазовую траекторию - ограничения на переменные состояния;

3) ограничения на управления (описание класса допустимых управлений);

4) цель управления, которая может носить как количественный, так и качественный характер. В первом случае речь идёт об экстремизации (минимизации или максимизации) на множестве допустимых управлений некоторого количественного показателя эффективности управления- критерия (функционала) качества. Это задачи оптимального управления (оптимизации). Во втором случае такой количественный показатель, как правило, отсутствует и задачу относят к качественной теории управления и наблюдения (КТУН). Круг исследований по теории управления, ориентированных на разработку конструктивных алгоритмов построения искомых управлений с учётом возможностей современных ЭВМ, оформился к на-

стоящему моменту в конструктивную теорию управления. Разумеется, такая классификация задач управления в известной степени условна.

Одним из важнейших разделов современной КТУ, активно развиваемых в Беларуси, является КТУН в динамических системах. Её истоки лежат в классической теории регулирования и теории устойчивости движения. В этой связи необходимо отметить выдающуюся роль акад. Е.А. Барбашина как главного организатора и пропагандиста новой теории в Беларуси. Он способствовал переезду в в 60-х годах в Минск плодотворно работающих в области теории управления проф. Ф.М.Кирилловой и проф. Р.Габасова, оказавших решающее влияние на становление и развитие УМТ в нашей республике и которые сумели за короткий сравнительно срок создать самобытную Белорусскую научную школу по теории управления – в настоящее время одного из признанных мировым научным сообществом лидеров в своей области. Белорусскими специалистами по теории управления получены принципиальные результаты по многим напрвлениям КТУН, в частности, для систем управления и наблюдения с последействием, где эти результаты устанавливают международный приретет Белорусской научной школы. Приведём некоторые статистические данные. Если из 1330 работ по КТУН для конечномерных систем [1] только 276 опубликовано на русском языке и всего лишь 46 из них принадлежат белорусским авторам, то из 815 работ за тот же период по бесконечномерным системам [2] уже 228 публикаций из 395 «русскоязычных» имеют белорусское гражданство; белорусские специалисты по КТУН в качестве приглашённых докладчиков выступали на многих международных конференциях, симпозиумах и конгрессах и участвовали в руководстве их секциями (в частности, на XI и XII Конгрессах ИФАК (IFAC), 1990, 1996). Разумеется, в работе столь ограниченного объёма не представляется возможным подробно охарактеризовать всё многообразие публикаций по КТУН в Беларуси. В равной степени мы рассчитываем и на понимание читателей, нашедших в конце статьи список цитируемой литературы неполным. Поэтому ниже приводится лишь анализ основных направлений и полученных результатов (по возможности с указанием авторов) по КТУН в Беларуси. История этого вопроса до 1983 года достаточно полно представлена в обзорах[3-6] и библиографических указателях [1,2]. В развитии КТУН в Беларуси прослеживаются две основные тенденции: 1) направленность исследований на уточнение и обобщение постановок основных проблем и изучение новых, как правило, более глубоких свойств конечномерных управляемых и наблюдаемых систем и 2) вовлечение в рассмотрение более сложных систем управления и наблюдения, таких, как системы функционально-дифференциальных уравнений с последействием, системы уравнений с частными производными, бесконечномерные системы и др. Из работ первого направления отметим прежде всего исследования, непосредственно обобщающие классические результаты Р. Калмана по управляемости и наблюдаемости. Пусть, например, символ $x(t,t_0,x_0,u)$ означает состояние в момент $t>t_0$ некоторой конечномерной динамической системы с начальным состоянием $x(t_0)=x_0\in R^n$ в начальный момент $t=t_0$ и управлением $u=u(t)$, $t>t_0$. Тогда для заданных матриц $H\in R^{m\times n}$ и $M\in R^{n\times m}$ (подпространств $\{x\in R^n|Hx=0\}$ и $\{x\in R^n|x=My\}$ система считается (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова [7] 1) относительно управляемой, если $\exists t_*>t_0\ \forall x\in R^n\ \exists u\Rightarrow Hx(t,t_0,x_0,u)=0$. В [7] получены эффективные параметрические критерии как условной, так и относительной управляемости для линейных стационарных систем. Ограничения на множестве начальных и конечных состояний могут объединяться в одной задаче: система называется вполне МН-условно-относительно управляемой, если

$$\forall x_0=My_0\ \exists t_*>t_0\ \exists u\Rightarrow Hx(t,t_0,x_0,u)\equiv 0,\ u(t)\equiv 0, t\geq t_*.$$

Эффективный параметрический критерий такой управляемости (В.М. Марченко, В.Л. Мережа), а также двойственные задачи условной и относительной наблюдаемости (Р. Габасов, Р.М. Жевняк, Ф.М. Кириллова, Т.Б. Копейкина) можно найти в [1-4] для случая линейных стационарных систем. Заметим, что это свойство вполне условно-относительной управляемости инвариантно по отношению к тому, считать ли в определении конечный момент $t_*=t_*(x_0)$ зависящим от начальных данных или нет, в отличие от определения относительной управляемости, где это допущение, как показывают примеры, является существенным [3].

Ряд исследований по КТУН связан с выяснением "минимальных" свойств управляемых динамических систем, в частности, с управляемостью в специальных (простейших) классах функций, таких, как релейные управления, алгебраические и тригонометрические многочлены, решения линейных дифференциальных уравнений (Б.Ш. Шкляр), и более общо: в классе выходов динамических регуляторов (В.В. Игнатенко) и в классе функций Чебышёва (А.И. Астровский). Общий результат этих исследований можно сформулировать следующим образом: условие управляемости в классе кусочно-непрерывных управлений обеспечивает управляемость обыкновенных линейных стационарных систем в значительно более узких классах функций. Двойственные результаты наблюдаемости можно найти в работах В.В.Мулярчика [1-4]. Выяснение условий управляемости в классе положительных управлений предпринято Р. Габасовым, Ф.М. Кириловой

[7] и Т.Н. Гуриной (Антонович) [1-4]. Вопрос о минимальном числе входов для линейных стационарных систем поднимался Р. Габасовым [7]. Здесь результат таков: минимальное число входов управляемой системы равно числу нетривиальных (не равных тождественно единице) инвариантных полиномов матрицы, задающей структуру собственной динамики системы. Обобщение этого результата на относительную управляемость и системы с ограничениями можно найти в работах Б.Ш. Шкляра и В.М. Марченко [1-4, 8]. Последним предложен также метод вычисления минимального числа входов для различных классов динамических систем.

Влиянию линейной обратной связи на спектр линейных стационарных систем (задача модального управления, управление спектром – в другой терминологии) посвящены работы И.К. Асмыковича и В.П. Булатова [1-4], где дано, в частности, описание инвариантных (недостижимых) собственных значений при воздействии различных видов обратной связи. К этой тематике следует отнести и результаты Л.Е. Забелло [1,9] по управлению показателем Ляпунова для нестационарных систем. Дальнейшим обобщением задачи управления спектром системы служит задача реконструкции её динамики, когда выбором линейной обратной связи осуществляется управление не только собственными значениями, но и структурой элементарных делителей матрицы, задающей собственную динамику системы. Эти исследования нашли отражение в работах В.И. Яновича [1-4].

Завершая анализ работ, относящихся к первому направлению, отметим исследования [1-4,7] по управляемости и наблюдаемости дискретных и квантованных систем (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В. Крахотко, С.А. Минюк, Р.Ф. Наумович), игровым задачам управляемости (В.М. Марченко), управляемости и наблюдаемости нестационарных систем (А.И. Астровский , Л.Е. Забелло, Т.Б. Копейкина и др.), управляемости систем с переменной структурой (Б.С. Калитин), вариационным подходам к задачам управляемости и наблюдаемости (Б.Ш. Мордухович), управляемости и наблюдаемости нелинейных систем (Р. Габасов, С.Я. Гороховик, Ф.М. Кириллова, Т.Б. Копейкина и др.) в основном с точки зрения управляемости и наблюдаемости их линейных приближений. В последние годы начинают интенсивно изучаться т.н. дескрипторные системы, т.е. системы неразрешённые относительно производной. Исследованию КТУН для таких систем посвящены работы В.И. Булатова, В.В. Игнатенко, В.В. Крахотко, Т.С. Трофимчук (Калюжной) и др. (см. [1-4]). Отметим также работы А.И. Астровского и С.К. Корженевича по описанию информационных множеств в задачах наблюдения с «нечёткими» помехами.

Характеризуя вторую тенденцию в развитии КТУН в Беларуси, необходимо в первую очередь отметить исследования фундаментального характера в изучении качественных свойств систем управления и наблюдения с последействием, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями. Результаты, полученные в этом направлении, заслуживают отдельного рассмотрения, поскольку именно они снискали международное признание Белорусской математической школе по теории управления, и о них речь пойдёт ниже.

Из других направлений отметим оригинальные разработки [1-4] проф. Ю.К. Ландо и его учеников (В.Т. Борухова, В.К. Бойко, Ю.А. Быкадорова, Г.И. Кабака и др.), успешно применивших сформулированный Ю.К. Ландо принцип сопряженного соответствия в теории нормальных краевых задач с управлением для исследования КТУН в системах интегро-дифференциальных уравнений, в частности, им сформулированы критерии управляемости для различных классов таких систем.

Принципиальные результаты по КТУН для систем с многомерным временем получены акад. И.В. Гайшуном и его учениками (В.В. Горячкиным, Хуагом Ван Куангом), в частности, для линейных невырожденных дискретных двухпараметрических систем ими получены критерии управляемости и наблюдаемости в классах произвольных и ограниченных последовательностей, исследована задача управления спектром для таких систем и др. Полученные результаты позволили разработать операторные методы исследования КТУН для систем Россера, имеющих широкое применение в обработке многомерных массивов информации.

Исследованию различных структурных характеристик динамических систем, задаваемых отображением «вход-состояние-выход», посвящены работы В.Т. Борухова [1-4], в частности, им получены критерии обратимости и способы построения обратных систем для регулярных классов линейных сосредоточенных и распределённых систем, указаны соответствия между обратными задачами математической физики и такими структурными характеристиками, как управляемость, наблюдаемость, обратимость, реализация, а также предложен подход к изучению таких характеристик на основе бинарных линейных отношений.

Имеются отдельные публикации [1-4,10] по КТУН для бесконечномерных систем, таких, как системы уравнений с частными производными, и системы в банаховых пространствах (А.И. Астровский, Р.Ф. Наумович, Я.В. Радыно и др.). Однако говорить об исчерпывающих результатах в этом направлении представляется преждевременным, поскольку многие задачи КТУН для этих систем приводят к изучению таких «тонких» вопросов функционального анализа и теории функций, как замкнутость, базисность определённых систем функций в функциональных пространствах, интерполяция в классе целых функций конечной степени с узлами в корнях трансцендентных уравнений и др. Чтобы обойти эти затруднения, приходится накладывать дополнительные существенные требования на параметры рассматриваемых систем управления и наблюдения, например, требовать разложимость решений таких систем по собственным (и корневым) векторам (функциям) соответствующих операторов, задающих собственную динамику системы, и т.п.

К числу важнейших следует отнести результаты белорусских учёных в области КТУН для динамических систем управления и наблюдения, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ) с последействием как запаздывающего, так и нейтрального типа (как в случае сосредоточенного, так и распределённого запаздывания). Начало исследований в этой области датируется (1963) докладом Н.Н. Красовского на II конгрессе ИФАК (IFAC), где была сформулирована задача полного успокоения- полной управляемости системы с запаздывающим аргументом. В целом возглавляемая акад. Н.Н. Красовским Свердловская школа по теории управления, подготовившая таких ведущих в своей области специалистов, как академики А.Б. Куржанский, Ю.С. Осипов, профессора Р. Габасов, Ф.М. Кириллова и др., является основоположницей КТУН в системах с запаздыванием. Этой школе принадлежит мировой приоритет в постановке таких основных проблем КТУН как полная управляемость (Н.Н. Красовский, А.Б. Куржанский (1963, 1966)), стабилизация при воздействии интегральной обратной связи (Н.Н. Красовский, Ю.С. Осипов (1963, 1965)), относительная управляемость (Ф.М. Кириллова, С.В. Чуракова (1967) и независимо L. Weiss (1967, 1970)) и др. Начиная со второй половины шестидесятых центр исследований в области КТУН в системах с последействием постепенно перемещается в Минск. Главные результаты в эти годы относились в основном к относительной управляемости таких систем. Проследим основные этапы развития КТУН в Беларуси для систем с последействием на примере простейшей системы с запаздывающим аргументом:

$$\mathrm{x}(\mathrm{t})=\mathrm{Ax}(\mathrm{t})+\mathrm{A}_1\mathrm{x}(\mathrm{t}-\mathrm{h})+\mathrm{Bu}(\mathrm{t}),\mathrm{t}>\mathrm{t}_0 \qquad (1)$$

($A\in R^{n\times n}$, $A_1\in R^{n\times n}$,$B\in R^{n\times r}$,$0<h=const$ -запаздывание);

с начальными условиями:

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}_0+\tau)=\varphi(\tau),\tau\in[-\mathrm{h},0],\mathrm{x}(\mathrm{t}_0+0)=\varphi_0 \qquad (2)$$

(здесь $\varphi=\varphi(.)$ - некоторая функция (например, непрерывная на $[-h,0]$) заданного класса Ω).

Система (1) называется относительно t_1- управляемой [5,7], где $t_1>t_0$, если для любых начальных данных φ,φ_0 из (2) и любого n-вектора $x_1\in R^n$ найдётся кусочно-непрерывное управление $u=u(t),t\in[t_0,t_1]$, при котором соответствующее решение $x(t)=x(t,t_0,\varphi_0,\varphi,u)$, $t>t_0$ системы (1) обладает свойством $x(t)=x_1$. Если в этом определении положить $x_1=0\in R^n$, получим задачу относительной нуль- управляемости. В отличие от калмановских систем ($A_1=0$) эти задачи, как показывают примеры, для систем с последействием не являются эквивалентными, что не в полной мере учитывалось в первых работах по этой тематике (см. [5,7]). Задача относительной управляемости получила эффективное и исчерпывающее решение в рамках разработанного Ф.М.Кирилловой и Р.Габасовым метода определяющего уравнения [2,5,7,8,11]. Оказывается, система (1) относительно t_1- управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left[X_k(jh);\, k=0,1,\ldots,n-1;\, j=0,1,\ldots,\alpha\right]=n, \tag{3}$$

где $\alpha=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left[\dfrac{t_1-\varepsilon}{h}\right]$,символ $[a]$ означает целую часть числа a; $X_k(t),\ldots$, -решение соответствующего системе (1) определяющего уравнения:

$$X_{k+1}(t)=AX_k(t)+A_1X_k(t-h),\ t\geq 0,\ k=0,1,2,\ldots, \tag{4}$$

с начальными условиями: $X_0(0)=B, X_0(t)=0$, если $t\neq 0$. Впоследствии критерий (3) относительной управляемости был обобщен на системы со многими запаздываниями и системы нейтрального типа (Р. Габасов, В.В. Крахотко). Однако надо полагать, что значение определяющего уравнения в исследовании свойств систем с запаздыванием ещё не изучено полностью и не исчерпывается её ролью в исследовании проблемы относительной управляемости, а отражает определённые внутренние свойства [5] систем с запаздыванием, в частности, фундаментальная матрица F(t) решений соответствующей однородной разомкнутой системы (1) может быть выражена по формуле (Б.Ш. Шкляр)

$$F(t)=\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{p}X_i^1(jh)\frac{(t-jh)^i}{i!},\ t\in[ph,(p+1)h],\ p=0,1,2,\ldots,$$ где

$X_i^1(t)$ - решение уравнения (4) при $B=I_n$, I_n- единичная $(n\times n)$- матрица, что позволяет решение системы (1) представить в виде ряда по решениям определяющего уравнения. Прямой путь такого представления, уточняющего известное представление Беллмана и Кука [12] решения в виде контурных интегралов, предложен В.М. Марченко [8] на основе полученных им алгебраических свойств решения определяющего уравнения, из которых отметим

1) основное тождество

$$\left(A+mA_1\right)^k B=\sum_{j=0}^{k} m^j X_k\left(jh\right), m\in K,$$

где K - произвольное кольцо, элементы которого коммутируют с матрицами A, A_1 и B, в частности, K - поле комплексных чисел;

2) обобщённую теорему Гамильтона –Кэли: решение определяющего уравнения удовлетворяет своему характеристическому уравнению, т.е.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij} X_{m-i}^{1}\left(\left(\gamma-j\right)h\right)=0, m=n, n+1, n+2,\ldots; \gamma=0,1,2,\ldots;$$

где r_{ij} - коэффициенты характеристического уравнения

$$\det\left[\lambda I_n - A - A_1\exp(-\lambda h)\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} r_{ij}\lambda^{n-i}\exp\left(-\lambda jh\right)=0, \lambda\in C, \quad (5)$$

$$r_{00}=1,$$

разомкнутой системы (1) (отсюда при $A_1=0$ вытекает известная для матриц теорема Гамильтона-Кэли). Сформулированные результаты позволяют в линейной оболочке столбцов решения определяющего уравнения выделить конечное число образующих и, тем самым, открывают путь к описанию множества относительно управляемых (точнее, относительно достижимых) «состояний» системы (1).

Исследование проблемы относительной нуль - управляемости в системах с запаздыванием существенно осложняется тем, что они могут точечно вырождаться, т.е. в некоторый момент времени $t_1>t_0$ всевозможные решения соответствующей разомкнутой системы могут не заполнять всё пространство R^n. Системы, не являющиеся точечно вырожденными, называются точечно полными. В случае точечно полных систем требования относительной и относительной нуль - управляемости равносильны. Этот факт имеет место и для двухмерных (n=2) линейных стационарных систем с последействием общего вида, поскольку они точечно полны, но перестаёт быть верным для систем с распределённым запаздыванием, а также нейтрального типа с сосредоточенным запаздыванием уже при n=3. Известно (В.В. Карпук), что равносильность понятий относительной и относительной нуль - управляемости сохраняется для систем (1) с $n\le 5$ и нарушается при n=10. Вопрос о максимальной размерности n, при которой свойства относительной и относительной нуль –управляемости системы (1) эквивалентны, остаётся к настоящему времени открытым. Не найдены пока и параметрические условия относительной нуль – управляемости систем с запаздывающим аргументом, которые могли бы с точки зрения их эффективности и завершенности формы конкурировать с критерием (3). Дальнейшие результаты в этом направлении, в том числе поточечной (и функциональной) полноте и управляемости по начальной функции, можно найти [2,5,8,9,10] â работах Л.Е. Забелло, В.В. Карпука, Т.Б. Копейкиной, В.М. Марченко, А.В. Метельского, С.А. Минюка и др.

Задачи поточечной управляемости как многоточечные краевые задачи для систем, описываемых ФДУ с управлением ставились Р. Габасовым. Две из них: 1) управляемость в точках $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\gamma$ и 2) α- поточечная управляемость изучены С.А. Минюком. Система (1) называется управляемой в точках $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\gamma$ (строго упорядоченных по возрастанию), если существует такой момент $t_1 > t_0+\beta_\gamma$, что для любых начальных данных φ_0,φ и n – векторов $c_j, j=0,1,\ldots,\gamma$, найдётся кусочно – непрерывное управление, при котором $x(t_1-\beta_j,t_0,\varphi_0,\varphi,u)=c_j; j=0,1,\ldots,\gamma$; система считается α- поточечно управляемой ($\alpha \geq 0$), если она управляема в любых точках $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_\gamma$, таких, что $0=\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_\gamma\leq\alpha$. Параметрический критерий разрешимости сформулированных задач получается [2,5,10] по аналогии с (3) с использованием техники (и в терминах) определяющего уравнения, в очередной раз подтверждая его эффективность при исследовании конечномерных задач управляемости. Задача поточечной управляемости (α- поточечной управляемости при любом $\alpha \geq 0$) поставлена и решена В.М. Марченко [2,5,8]. Им доказано, что свойство α- поточечной управляемости насыщается: если система (1) α- поточечно управляема при $\alpha=\alpha_0=(n-1)(n-2)h:2$, то она и α- поточечно управляема при $\alpha\geq\alpha_0$, т.е. является поточечно управляемой. Более того, выяснено, что система (1) поточечно управляема в том и только в том случае, когда однопараметрическая система

$$\dot{x}(t)=(A+mA_1)x(t)+Bu(t), t>t_0 \tag{6}$$

без запаздывания управляема по Калману хотя бы при одном действительном значении параметра *m*. Этот результат позволяет обобщить на поточечную управляемость системы (1) многие положения КТУН калмановской теории систем, в частности, сформулировать двойственные задачи наблюдаемости и построить теорию двойственности в задачах поточечного управления и наблюдения. Изложенные результаты допускают [8] обобщение на системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа и системы со многими запаздываниями.

Одной из самых трудных проблем КТУН в системах с последействием является задача Красовского о полном успокоении за конечное время системы с запаздывающим аргументом. Общая схема исследования этой задачи, позволяющая для каждой конкретной системы (1) указать процедуру проверки её на полную управляемость, предложена Р. Габасовым и

Ф.М. Кирилловой [7]. Под их руководством были предприняты попытки дальнейшего развития этой схемы с целью использования возможностей современных ЭВМ (Г.П. Размыслович), а также отыскания (С.А. Минюк, А.В. Метельский, Н.Н. Степанюк и др.) условий разрешимости задачи, непосредственно выраженных через параметры системы. Многочисленные попытки получить явный (параметрический) критерий полной управляемости предпринимались и за рубежом. Впервые параметрический (спектральный) критерий полной управляемости как требование [5]

$$\operatorname{rank}[\lambda I_n - A - A_1 \exp(-\lambda h), B] = n, \forall \lambda \in C \qquad (7)$$

был высказан в качестве гипотезы В.М. Марченко в 1975 году на семинаре по процессам управления (рук. Р. Габасов и Ф.М. Кириллова), проверен им же и С.А. Минюком на примере двумерной (n=2) системы (1) и подтверждён в общем случае в 1977 году (В.М. Марченко). Дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в [5,8,10]. Весьма интересен тот факт [5,8], что условие (7) на общий случай системы нейтрального типа с распределённым запаздыванием не переносится (здесь оказывается существенной теоретико – числовая природа самих запаздываний).

Важный цикл исследований выполнен по теории управления по типу обратной связи. Центральное место здесь занимает имеющая многочисленные приложения задача модального управления (МУ), по которой получен ряд результатов приоритетного характера. Начнём с постановки задачи: традиционная (W.M. Wonham, 1967) в калмановских системах задача управления спектром оказывается малопригодной в системах с запаздыванием по причине их бесконечномерности. Поэтому такие системы впервые с точки зрения их МУ были рассмотрены [2,5] лишь в 1974 году (В.И. Булатов, Т.С. Калюжная, Р.Ф. Наумович). Ими была поставлена и изучена задача частичного МУ (управления любой конечной частью спектра); в основу подхода была положена методика Красовского и Осипова исследования проблемы стабилизации. Общая постановка задачи МУ для системы (1) дана [2,5] И.К. Асмыковичем и В.М. Марченко (1976 год) как задача управления коэффициентами характеристического уравнения (5) и, таким образом, бесконечномерная по постановке задача управления спектром заменялась конечномерной. Для решения задачи они предложили линейную обратную связь в виде разностных регуляторов:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\theta} Q_j x(t - jh), t > t_0, Q_j \in R^{r \times n} \; (j = 0,1,\ldots,\theta) \qquad (8)$$

Оказывается, система (1) со скалярным входом (r=1) модально управляема в классе регуляторов (8) тогда и только тогда, когда

$$\det W(m) = \det\left[B, (A + mA_1)B, \ldots, (A + mA_1)^{n-1}B\right] \equiv \text{const} \neq 0, \quad (9)$$
$\forall m \in R$

Доказательство этого факта основывается на алгебраических свойствах оператора сдвига и решений определяющего уравнения. Аналогичный результат в терминах модулей независимо получен [2,5] â ÑØÀ (A.S.Morse, 1976) для многовходовой системы при ослабленной постановке задачи МУ как управления специальными цепочками корней уравнения (5). Методика решения задачи МУ в классе интегральных регуляторов с использованием аппарата теории целых функций конечной степени (в частности, теоремы Винера–Пэли) изложена в [5,8], где получено обобщение известной теоремы Уонэма (W.M. Wonham): система (1) модально управляема (в классе интегральных регуляторов) в том и только в том случае, когда она полностью управляема. Исследование частного случая задачи МУ – задачи стабилизации (в классе разностных регуляторов), а также различные обобщения задачи МУ на системы со многими запаздываниями, нейтрального типа, с распределённым запаздыванием в случае как полной, так и неполной информации о состоянии (здесь построено обобщение динамического регулятора Пирсона (J.B. Pearson)), а также исследование задачи реконструкции динамики системы можно найти [2,5,8] в работах И.К. Асмыковича, И.М. Борковской, В.М. Марченко и В.И. Яновича. К сожалению, не все из полученных в этом направлении результатов имеют столь завершенную форму как критерий (9).

Под влиянием абстрактного подхода к построению КТУН в общей теории систем в 70-е – первой половине 80-х годов усиливается тенденция к постановке и исследованию задач управляемости и наблюдаемости в системах с запаздыванием на основе метода пространства состояний. Суть подхода такова: множество $\Omega \ni \varphi$ начальных данных в (2) с условием «стыковки» $\varphi(0) = \varphi_0$ (или $(\varphi_0, \varphi) \in R^n \times \Omega$ в противном случае) отождествляется с пространством ξ начальных (а затем текущих) состояний системы; тогда ξ - управляемость (функциональная) интерпретируется как существование допустимого управления, порождающего траекторию, за конечное время соединяющую две произвольные наперёд заданные точки из ξ (при нулевых начальных данных – задача полной достижимости). Аналогично полная наблюдаемость характеризуется как возможность по измерениям выхода «различить» начальные данные, их породившие. Эта тема, чрезвычайно популярная за рубежом, в Беларуси активно развивалась [2,5,10] в школе Р. Габасова и Ф.М. Кирилловой (С.А. Минюк, А.В. Метельский, Б.Ш. Шкляр и др.). Оказалось, что задача ξ -управляемости даже в случае, когда ξ изоморфно пространству Соболева $W_2^{(1)}([-h,0], R^n)$, разрешима лишь в исключительных случаях. Поэтому свойства управляемости стали рассматривать в более слабом смысле: с одной стороны, стали изучаться задачи, в которых траекторию необходимо было «уложить» в произвольную окрестность (в топологии пространства ξ) конечного «состояния» (аппроксимативная управляемость); с другой стороны, совпадение траектории с конечным состоянием требовалось на любом промежутке, длина которого «сколь угодно меньше», чем величина запаздывания. В этой связи особым вниманием специалистов пользовалось пространство $M_2 = R^n \times L_2([-h,0],R^n)$. Сформулируем некоторые результаты [2,5,10]: система (1) M_2-аппроксимативно управляема в том и только в том случае, когда наряду с условием (7) дополнительно выполняется требование (С.А. Минюк, С.Н. Ляховец, 1980); необходимое и достаточное условие полной наблюдаемости системы (1) с выходом $y(t)=Cx(t), t>t_0$ заключается в требовании (С.А. Минюк, А.В. Метельский, 1978; Б.Ш. Шкляр, 1979): $det A_1 \neq 0, rank[\lambda I_n - A' - A_1' exp(-\lambda h), C'] = n, \forall\lambda \in C$ (штрих означает транспонирование). Таким образом, весь класс вполне управляемых и наблюдаемых по Калману систем (1) с $A_1 = 0$ автоматически исключается из числа функционально управляемых и наблюдаемых (хотя бы в аппроксимативном смысле). Причина тому – отказ от требования минимальности состояния, т.е. состояния как элементы априорно заданного топологического пространства ξ, как правило, не являются минимальными. В историческом плане задачи функциональной управляемости восходят к задаче Е.А. Барбашина об осуществлении движения по заданной траектории (1960).

Новый подход к исследованию задач функциональной управляемости и наблюдаемости предложен В.М.Марченко [2,5,8] на основе понятия "минимального состояния" (s-состояния). Суть подхода такова: множество $R^n \times \Omega$ начальных данных, факторизованных по «слипанию» соответствующих решений системы при $t > t_0 + s$, интерпретируется как множество ${}_sX_0$ начальных s-состояний, а его образ в силу системы даёт множество s-решений, и, наконец, сужение этого множества (в структуре $R^n \times \Omega$) на промежуток $[t-h,t]$ имеет смысл множества ${}_sX_t$ допустимых s-состояний в момент $t > t_0$. На этом пути удаётся построить теорию управляемости и наблюдаемости систем с последействием по аналогии с теорией Калмана как управляемость и наблюдаемость их s- состояний. Поскольку с s-состоянием как классом смежности оперировать неудобно, то вводится понятие s-информации ${}_sИ_{t_0}(\varphi_0, \varphi, u)$, для которой s-состояния суть множества уровня, в частности, для системы (1) ${}_0И_{t_0}(\varphi_0,\varphi,u)={}_0И_{t_0}(\varphi_0,\varphi,0)=(\varphi_0,\gamma)$, где $\gamma(\tau)=A_1\varphi(t_0+\tau-h),\tau\in[0,h]$. Таким образом, пространство s-состояний системы (1) при $A=0$ является конечномерным (изоморфно R^n). Введение s - информации не только систематизирует уже накопленный опыт в КТУН для систем с последействием, но ведёт к дальнейшим обобщениям – задачам (s,t) - управляемости и наблюдаемости: система называется (s,t) - управляемой, если для любых начальных данных (φ_0,φ), $(\psi_0,\psi)\in R^n\times\Omega$ и допустимого управления $v(\tau),\tau\in[t_1-t,t_1]$ найдётся такое допустимое управление $u(\tau),\tau\in[t_1-s,t_1]$, при котором

$$x(t_1+\tau,t_1-s,\varphi_0,\varphi,u)=x(h+\tau,h-t,\psi_0,\psi,v), \tag{10}$$

(задача программного преследования однотипных объектов с дискриминацией преследуемого). Объект (система) считается $R^n-(s,t)$- управляемым, если в предыдущем определении совпадение (10) решений требуется лишь при $\tau=0$. Особый интерес представляют задачи $R^n-(s,t)$-управляемости при $t=0$ (относительная управляемость) и $t=s$ (относительная нуль-управляемость), а также (s,t)-управляемость по Красовскому за время s). Для линейных нестационарных систем с последействием общего вида (с распределённым запаздыванием общего типа) построено непосредственное обобщение калмановской теории двойственности между управляемостью и наблюдаемостью. Интересно отметить, что для системы в дифференциальной форме с условием стыковки двойственной оказывается система в «интегральной» форме без условия стыковки, и наоборот. Детали подхода имеются в [8], где получены также параметрические критерии управляемости и наблюдаемости в стационарном случае. В этом случае особое внимание привлекает пространство ${}_sX_t$ при $s\overset{def}{=}\infty$ (слабых состояний). Можно показать, что все такие пространства изоморфны и различным слабым состояниям соответствуют различные слабые решения. Другими словами, в полугруппе преобразований, порождаемой системой с запаздыванием и действующей на пространство слабых состояний, возможны сокращения и, таким образом, эта полугруппа погружается в ее группу частных.

Сингулярно возмущенные системы с последействием с точки зрения управляемости и наблюдаемости исследовались Т.Б. Копейкиной на основе метода пограничных функций А.Б. Васильевой.

В заключение перечислим другие приоритетные направления исследований белорусских учёных по КТУН в системах, которые по ряду причин не были детально освещены в настоящей работе. Это вопросы условной и относительной наблюдаемости (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова и др.), управляемость (А.И. Астровский, В.В. Игнатенко, Б.Ш. Шкляр) и наблюдаемость (В.В. Мулярчик) в простейших классах функций, вычисление минимального числа входов и выходов (В.М. Марченко), расщепимость (И.К. Асмыкович), задача реконструкции (В.И. Янович), союзные задачи управления и наблюдения (Р. Габасов, Ф.М. Кириллова и др.), канонические представления управляемых систем (Ф.М. Кириллова, В.М. Марченко, В.Л. Мережа), некоторые задачи идентификации и наблюдаемости (А.И. Астровский, А.В. Метельский, С.А. Минюк), нестационарные системы (Р. Габасов и Ф.М. Кириллова, А.И. Астровский, Л.Е. Забелло, Т.Б. Копейкина, В.П. Кирлица, В.М. Марченко, Б.Ш. Мордухович и др.) и др.

Таково в общих чертах состояние основных проблем КТУН в Беларуси к настоящему моменту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория управления движением. Ч.1. Линейные конечномерные системы: Библиогр. указ. /Сост.: Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.М. Марченко, И.К. Асмыкович; Ин-т математики АН БССР. – Мн. , 1983.
2. Теория управления движением. Ч.2. Линейные конечномерные системы: Библиогр. указ. /Сост.:Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.М. Марченко, И.К. Асмыкович; Ин-т математики АН БССР. – Мн., 1983.
3. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.М. Марченко, И.К. Асмыкович Математические проблемы управления линейными конечномерными системами. – Мн., 1983. (Препринт/ Ин-т математики АН БССР: №20(177)).
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М., Асмыкович И.К. Задачи реконструкции и наблюдения для конечномерных систем.- Мн., 1983. (Препринт/ Ин-т математики АН БССР: №26(183)).
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М., Асмыкович И.К. Задачи управления и наблюдения для бесконечномерных систем. - Мн., 1984. (Препринт/ Ин-т математики АН БССР: №1(186)).
6. Асмыкович И.К. , Габасов Р. , Кириллова Ф.М. , Марченко В.М. Задачи управления конечномерными системами. – Автоматика и телемеханика, 1986, №11.- С.5-29.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М.. Качественная теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1971.
8. Марченко В.М. Математические задачи управления и наблюдения для линейных систем с последействием. – Автореф. дис… доктора физ.-мат. наук: 01. 01. 02. –Свердловск, 1985.

9. Забелло Л.Е. Методы решения вырожденных задач оптимального управления для динамических систем с запаздыванием. - Автореф. дис… доктора физ.-мат. наук: 01. 01. 11. – Ленинград, 1991.
10. Минюк С.А. Исследование некоторых задач управления и наблюдения динамических систем. - Автореф. дис. доктора физ.-мат. наук: 01. 01. 02. – Минск, 1992.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов. - Автоматика и телемеханика, 1972, №9. - С.31-62.
12. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.

УДК 517.977.1

И.К Асмыкович, доцент

ДОСТИЖИМОСТЬ , НАБЛЮДАЕМОСТЬ И МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

An elementary presentation is given of some the main motivation and known results on linear systems over rings , including questions of pole assignment and control . The analogies and differences with the more standard case of systems over fields are emphasized throughout.

При изучении линейных систем управления, как непрерывных, так и дискретных, было выяснено, что их основные свойства определяются тройкой матриц (F, G, H), элементы которых не обязательно принадлежат полю действительных чисел , и , вообще, не обязательно полю.

Первые исследования линейных систем, когда элементы выбираются из коммутативного кольца, были проведены, по-видимому, в работе [8]. Калман показал, что результаты по реализации линейных систем над произвольным полем без особых изменений переносятся на системы над коммутативными неттеровыми кольцами .

Многочисленные практические приложения вызывают необходимость изучения линейных систем над произвольными кольцами.

Рассмотрим конкретный пример системы с запаздыванием [3]

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t-1) + x_1(t) + x_2(t) + u(t)\ ,$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t-1) - 3x_2(t-5) + u(t-1)\ ,$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t-1)$$

Введя запаздывающий оператор

$$\sigma x(t) = x(t-1)\ ,$$