

Рис. 6

Результаты моделирования системы регулирования при введении запаздывания в объект управления и без переобучения сети представлены на рис. 6.

Анализ графиков показывает, что качество отработки задающего воздействия ухудшается. При введении возмущающего воздействия в объект управления качество отработки задающего воздействия значительно снижается.

Таким образом, применение регулятора с предсказанием возможно в системах с объектами, подверженными небольшим неконтролируемым возмущениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Soloway D., Haley P.J. Neural Generalized Predictive Control // Proceedings of the 1996 IEEE International Symposium on Intelligent Control. 1996. P. 277–281.
2. Омату С., Халид М., Юсоф Р. Нейроуправление и его приложения. – М.: ИПРЖРБ, 2000. 272 с.

УДК 621.9.02

И.Ф. Кузьмицкий, доцент; Д.С. Карпович, ассистент

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ДИФФУЗИИ ПРИ ПАЙКЕ

In job the different methods of a solution of the differential equations with partial derivatives surveyed which feature different processes, including processes of a thermal conduction and diffusion at the soldering. As a result of the analysis the expediency of use of numerical and analytical methods for different requirements is established. Some plans of a numerical solution surveyed with the purpose of definition of a method of a solution requiring minimum computing possibilities in view of convergence the answer.

При рассмотрении большого числа практических задач необходимо получить поле распределения температур внутри различных изделий. При этом нестационарная задача распределения температурного поля при отсутствии внутренних источников тепла

для одномерного случая будет описываться следующим дифференциальным уравнением с частными производными:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где u – температура; t – время; x – длина; a – коэффициент температуропроводности.

Для решения уравнения (1) необходимы начальные и граничные условия:

$$u(t=0, x) = \varphi(x) \text{ – начальные условия;} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} u(t, x=0) &= u_1(t) \\ u(t, x=l) &= u_2(t) \end{aligned} \right\} \text{ – граничные условия 1-го рода,} \quad (3)$$

где $x=0$ и $x=l$ соответствуют началу и концу отрезка.

Для решения уравнения (1) с учетом условий (2) и (3) можно воспользоваться либо аналитическими, либо численными методами решения ДУЧП.

Рассмотрим возможность аналитического решения ДУЧП. Применительно к задачам теплопроводности используют методы разделения переменных и метод Галеркина. Методы, основанные на методе Галеркина, представляют собой нахождение решения уравнения (1) на основе комбинирования аналитического и численного решений. Метод разделения переменных является сугубо аналитическим. Решение в этом случае будет искажаться в виде

$$u(t, x) = X(x) \cdot T(t), \quad (4)$$

где $X(x)$ – функция, зависящая только от переменной x , а $T(t)$ – зависящая только от t .

Общая идея состоит в том, чтобы найти бесконечное число таких решений уравнения с частными производными, которые удовлетворяют начальным и граничным решениям. Эти простейшие функции являются фундаментальными решениями уравнения (1). Общее решение уравнения (1) в этом случае будет находиться в виде линейной комбинации фундаментальных решений (4).

В результате решения функции $X(x)$ и $T(t)$ получились равными:

$$\begin{aligned} T(t) &= A \cdot e^{-\lambda^2 \cdot a t} \\ X(x) &= A \cdot \sin(\lambda x) + B \cdot \cos(\lambda x), \end{aligned} \quad (5)$$

где A , B и λ – произвольные постоянные.

Следовательно, функции вида

$$u(t, x) = A \cdot e^{-\lambda^2 \cdot a t} \cdot (A \cdot \sin(\lambda x) + B \cdot \cos(\lambda x)) \quad (6)$$

являются фундаментальными решениями уравнения (1).

Величины A , B и λ находятся из условия соответствия граничным и начальным условиям. Так, при граничных условиях

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= 0 \\ u(t, l) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

решение ДУЧП будет равно

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-(n\pi)^2 \cdot a t} \cdot \sin(n\pi x) \quad (8)$$

Величины коэффициентов A_n можно определить, исходя из начального условия (2):

$$A_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cdot \sin(\pi n x) dx$$

В случае если начальные условия заданы функцией, имеющей простое разложение в ряд Фурье, решение ДУЧП упрощается. Так, если

$$\varphi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x), \quad (9)$$

то уравнение (8) можно записать сразу:

$$u(t, x) = e^{-\pi^2 \cdot a t} \cdot \sin(\pi x) + \frac{1}{2} e^{-9\pi^2 \cdot a t} \cdot \sin(3\pi x). \quad (10)$$

Однако для случаев, когда начальные условия не могут быть представлены в виде простого разложения в ряд Фурье по синусам, решение весьма значительно усложняется. К примеру, для простейшего начального условия

$$u(t = 0, x) = \text{const} = T_0 = 100 \quad (11)$$

решение ДУЧП будет представлять собой следующий ряд:

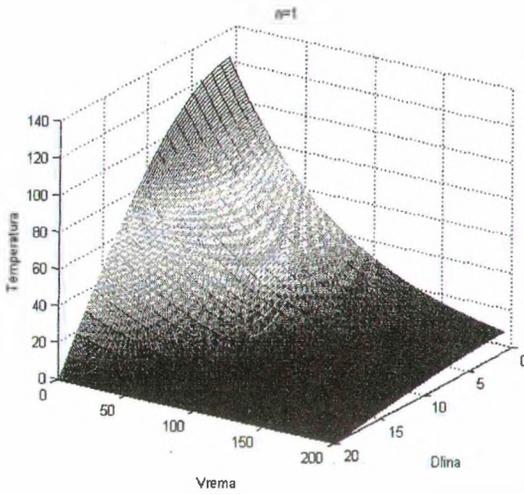
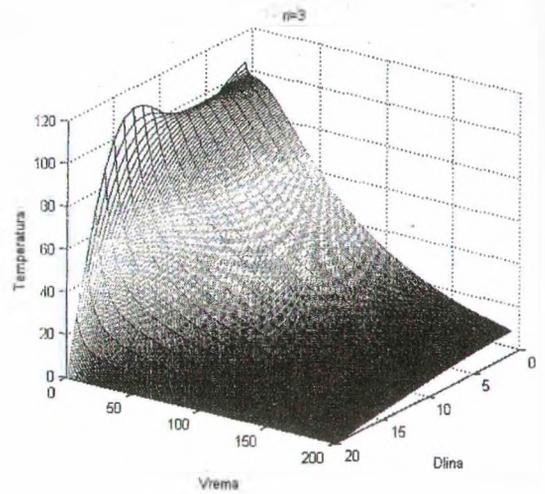
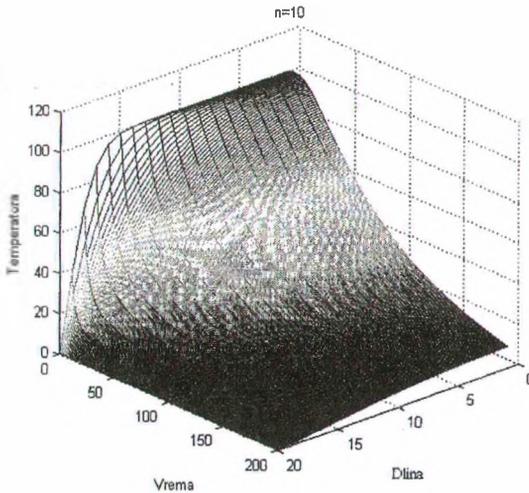
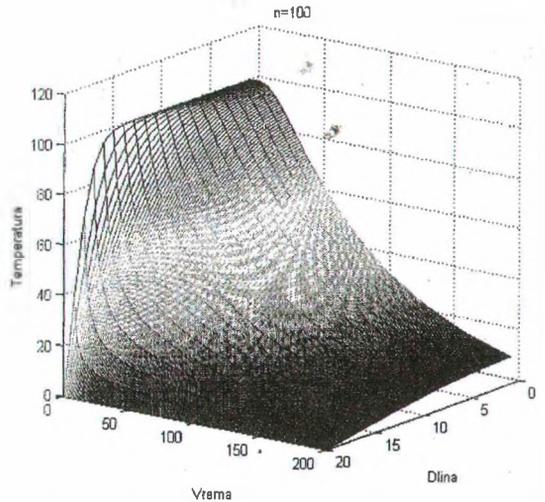
$$u = \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{T_0 2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right) e^{-\mu_n^2 \frac{a t}{\delta^2}}, \quad (12)$$

где δ – безразмерная координата точки по оси x ; μ_n – решение уравнения $\text{ctg} \mu = \mu / Bi$, а Bi – число Био.

Уравнения вида (12) получаются в результате решения задачи теплопроводности гораздо чаще, нежели уравнения вида (10). Это объясняется тем, что начальные и граничные условия вида (9) на практике встречаются весьма редко. Проанализируем уравнение (12) с точки зрения вычислительной математики и возможности использования ЭВМ для ее решения. Под знаком суммы находятся функции синуса, косинуса и экспоненты, реализация вычисления которых на ЭВМ достаточно сложна. Нахождение бесконечного ряда вообще невозможно, и для решения следует ограничиться несколькими первыми членами ряда. Проанализируем решения уравнения (12) с целью нахождения оптимального n , при котором решение будет оптимальным с точек зрения точности и вычислительной сложности.

На рисунках с первого по четвертый представлены графики решения ДУЧП (1) с граничными условиями (7) и начальным условием (11) с различным количеством членов ряда n (12).

В результате анализа аналитического решения уравнения (1) можно сделать следующие выводы: аналитическое решение ДУЧП обеспечивает несложное решение для узкого класса начальных и граничных условий; в общем случае решение сложно из-за наличия в уравнении бесконечного ряда и функций, вычисление которых достаточно трудоемко; количество элементов ряда весьма существенно влияет на решение только при малых величинах n – от 1 до 10. Увеличение количества элементов ряда до 100 существенного влияния на решение не оказывает; вычисление даже большого количества элементов ряда не позволяет с достаточной точностью моделировать процессы с начальными условиями, не имеющими простого разложения в ряд Фурье.

Рис. 1. Решение уравнения при $n=1$ Рис. 2. Решение уравнения при $n=3$ Рис. 3. Решение уравнения при $n=10$ Рис. 4. Решение уравнения при $n=100$

Рассмотрим численные методы решения уравнения (1). При решении задач теплообмена, как правило, используют различные реализации метода сеток.

Сущность метода сеток состоит в том, что дифференциальное уравнение, начальные и краевые условия заменяются сеточными уравнениями, связывающими значения искомой функции в узлах сетки.

Заменим производные в уравнении (1) на приращения при условии, что шаги дифференцирования по осям x и t будут стремиться к нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t_{i+1}, x_j) - u(t_i, x_j)}{\delta_t},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(t_i, x_{j-1}) - 2 \cdot u(t_i, x_j) + u(t_i, x_{j+1}))}{\delta_x^2}, \quad (13)$$

где δ_t – шаг по оси t , δ_x – шаг по оси x .

Решение в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$u(t_{i+1}, x_j) = \frac{a\delta_r}{\delta_x^2} (u(t_i, x_{j-1}) + u(t_i, x_{j+1})) - \left(\frac{2a\delta_r}{\delta_x^2} - 1 \right) \cdot u(t_i, x_j). \quad (14)$$

Данная схема является явной четырехточечной схемой.

При решении ДУЧП используют и неявные схемы. Отличие состоит в том, что уравнения (13) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(t_{i+1}, x_j) - u(t_i, x_j)}{\delta_t}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(t_{i+1}, x_{j-1}) - 2 \cdot u(t_{i+1}, x_j) + u(t_{i+1}, x_{j+1}))}{\delta_x^2}.$$

Такая схема является неявной четырехточечной. В этом случае нельзя явно выразить величину $u(t_{i+1}, x_j)$, как в уравнении (14), и для решения этим методом необходимо решать некоторую систему алгебраических уравнений, описывающих величину u для слоя t_{i+1} .

Очевидно, что вычислительные мощности, необходимые для реализации схемы (15), значительно выше по сравнению с реализацией схемы (14).

При реализации численных методов необходимо существенное внимание уделить сходимости и устойчивости численного решения.

Для обеспечения сходимости необходимо, чтобы при δ_x , стремящемся к нулю, сеточное решение стремилось к точному: $u_n \rightarrow u$. Обе приведенные схемы обладают свойством сходимости, но при разных соотношениях δ_t к δ_x .

Рассмотрим, при каких соотношениях δ_t и δ_x будет обеспечена устойчивость решения. Для этого воспользуемся методом гармонических возмущений.

Рассмотрим решение специального вида:

$$u(t, x) = e^{-\omega^2 \delta_t} \cdot e^{i\omega \delta_x}, \quad (16)$$

где ω – произвольное вещественное число.

Подставляя уравнение (16) в (1) и вводя обозначение $\lambda = e^{-\omega^2 \delta_t}$, получаем для явной четырехточечной схемы

$$\lambda = 1 + a \cdot \frac{\delta_t}{\delta_x^2} (e^{i\omega \delta_x} - 2 + e^{-i\omega \delta_x}) = 1 + 2r \cdot (\cos(\omega \delta_x) - 1), \quad (17)$$

где r – константа; $\delta_t = r \delta_x^2$.

Исходя из критерия устойчивости Неймана, определим, при каких величинах r схема будет устойчивой. Анализ уравнения (17) показывает, что при r до 0.5 точка λ при изменении ω на комплексной плоскости будет колебаться от 0 до 1, т.е. схема будет устойчивой. Таким образом, при $r \leq 0.5$ схема будет устойчивой.

Применительно к неявной схеме уравнение (17) будет иметь вид

$$\lambda = \left(1 + 4r \cdot \sin^2 \left(\frac{\omega \delta_x}{2} \right) \right). \quad (18)$$

Очевидно, что условие устойчивости выполнено при любом r .

Для сравнения результатов решения уравнения (1) численными и аналитическими методами ниже приводится график решения ДУЧП численным методом.

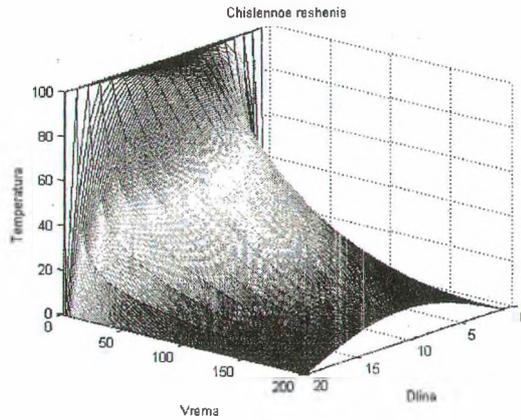


Рис. 5. Численное решение ДУЧП

В результате анализа можно сделать следующие выводы: при задании начальных условий, в целом отличных от вида (9), решение численными методами позволит найти ответ с меньшей погрешностью; численные методы являются устойчивыми и обеспечивают сходимость решения; использование явной схемы решения ДУЧП позволяет значительно снизить количество вычислений при реализации решения на ЭВМ; использование неявной схемы позволяет использовать любые соотношения между шагами дифференцирования по различным осям и таким образом осуществляет высокую сходимость алгоритма решения, однако будет необходимо задействовать большие вычислительные мощности.

УДК 622.7

А.А. Василенко, аспирант

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ФЛОТАЦИИ

An extreme management system of flotation process, which include adaptive block of identification parameter with is researched and synthesized.

При производстве калийных удобрений флотационным методом одной из основных проблем является регулирование расхода реагентов – амина и депрессора. Так как реагенты являются наиболее ценными составляющими, используемыми при флотации, то систему автоматического управления целесообразно строить на регулировании их расхода.

Для определения математической модели процесса флотации на основе пассивного эксперимента (рис.1) использовали ряды Вольтера. Зависимость между выходными величинами и входными воздействиями представлена интегральными операторами, ядра которых полностью определяют внутренние свойства математических моделей:

$$y(t) = \int_0^t h_1(t-\tau)u(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^t h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)u(\tau)u(\tau)d\tau_1d\tau_2 + \dots,$$

где h_i – ядра i -го порядка; u_i – управления.