Теорема 2. *Для того чтобы система (1),(2) была* $H-t_1$*-управляемой необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$rank\left[H\begin{bmatrix} X_k(ih) & Y_k(ih) \\ X_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}X_k((i-j)h) & Y_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}Y_k((i-j)h)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\ k=0,1\ldots n-1,\right.$$

$$\left.H\begin{bmatrix}0\\A_{22}^{i}\end{bmatrix}B_2,\ i=0,2,..T_{t_1},\ H\right]=$$

$$=rank\left[H\begin{bmatrix} X_k(ih) & Y_k(ih) \\ X_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}X_k((i-j)h) & Y_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}Y_k((i-j)h)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\ k=0,1\ldots n-1,\right.$$

$$\left.H\begin{bmatrix}0\\A_{22}^{i}\end{bmatrix}B_2,\ i=0,2,..T_{t_1}\right].$$

Следствие. *Для того чтобы система (1) с начальными условиями (2) была относительно* t_1 *-управляемой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$rank\left[\begin{bmatrix} X_k(ih) & Y_k(ih) \\ X_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}X_k((i-j)h) & Y_k(ih)+\sum_{j=1}^{i}A_{22}^{j}A_{21}Y_k((i-j)h)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix},\ k=0,1..\ n-1,\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix}0\\A_{22}^{i}\end{bmatrix}B_2,\ i=0,2,\ldots T_{t_1}\right]=m+n\,.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Представление решений управляемых гибридных систем// Проблемы управления и информатики. Киев, 2002. №6. С. 17–25.

УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доцент

О РОЛИ ЖЕСТКОСТИ В РЕШЕНИИ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

The influence of the stiffness condition on a solution to a typical stiff linear boundary problem with boundary layer is studied.

Одним из достаточно распространенных классов задач вычислительной математики, благодаря их многочисленным приложениям, являются граничные задачи для о.д.у. второго порядка с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями. Явление жесткости, как правило, присуще дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной. В вычислительной математике это свойство жесткости относится к числу наиболее сложных задач [1], представляющих собой такую математическую модель, построение и реализация для которой соответствующей дискретной модели является по-прежнему трудной и далекой от завершенности проблемой.

Роль жесткости в задачах Коши и в граничных задачах различна, кроме этого, различен и механизм проявления жесткости в этих задачах. В связи с этим представляет интерес изучение взаимодействия этих двух сторон проявления жесткости в рамках вычислительных схем методов редукции граничных задач к задачам Коши, в том числе и в вычислительных схемах метода множественной двусторонней пристрелки.

Рассмотрим типичные граничные задачи с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\varepsilon>0$ при старшей производной вида

$$Ly(x) \equiv \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = A,\ y(1) = B,\ a(x) \geq a > 0, \tag{2}$$

$$Ly(x) \equiv \varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x),\ 0 < x < 1, \tag{3}$$

$$y(0) = A,\ \ y(1) = B,\ \ b(x) \geq \beta > 0,\ \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Предположим, что граничная задача вида (1, 2) имеет один пограничный слой, а задача (3, 4) – два пограничных слоя.

Изучим некоторые аспекты проблемы жесткости на примере жесткой граничной задачи вида (1,2) с одним пограничным слоем вблизи точки $x = 0$ и выясним, в какой мере переход от граничной задачи к задачам Коши может оказаться эффективным.

В задаче (1,2) будем "замораживать" коэффициенты, предполагая при этом, что $a(x) = const$, $\ b(x) = const$, и положим в уравнении (1) $f(x) = 0$.

Тогда общее решение граничной задачи вида (1,2) запишется в виде

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x), \qquad \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

Используя граничные условия, определим C_1, C_2.

$$C_1 = (B - A\exp(\lambda_1))/(\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)),$$
$$C_2 = (B - A\exp(\lambda_1))/(\exp(\lambda_2) - \exp(\lambda_1)).$$

Представим теперь $y(x)$ в таком виде, чтобы в нем явно выделялось влияние величин *A, B:*

$$y(x) = AG_1(x) + BG_2(x), \tag{5}$$

где

$$G_1(x) = (\exp(\lambda_1 + \lambda_2 x) - \exp(\lambda_2 + \lambda_1 x))/(\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2));$$

$$G_2(x) = (\exp(\lambda_1 x) - \exp(\lambda_2 x))/(\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2));$$

$$C^{(0)} = A; \qquad \begin{aligned} C^{(1)} &= y'(0) = AG_1'(0) + BG_2'(0) = \\ &= (A(\lambda_2 \exp(\lambda_1) - \lambda_1 \exp(\lambda_2)) + B(\lambda_1 - \lambda_2))/(\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)), \end{aligned}$$

и запишем решение граничной задачи (1,2) в следующем виде:

$$y(x) = G^{(0)} H_1(x) + G^{(1)} H_2(x), \qquad x \in J^{(+)} = \{0 < x < 1\}, \tag{6}$$

где

$$H_1(x) = (\lambda_1 \exp(\lambda_2 x) - \lambda_2 \exp(\lambda_1 x)) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$H_2(x) = (\lambda_2 \exp(\lambda_1 (x) - \lambda_1 \exp(\lambda_2 x)) / (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Легко заметить, что $\tilde{y}(x) = y(x)$.

Аналогично получается решение граничной задачи вида (1,2) и на правом конце отрезка. Обозначим $y(1) = D^{(0)} = B$ и $y'(1) = D^{(1)} = AG_1'(1) + BG_2'(1)$. Тогда решение граничной задачи с пограничным слоем вида (1, 2) запишется в следующем виде:

$$\breve{y}(x) = D^{(0)} P_1(x) + D^{(1)} P_2(x), \qquad x \in J^{(-)} = \{1 > x > 0\}, \tag{7}$$

где

$$P_1(x) = (\lambda_1 \exp(-\lambda_2 (1-x)) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1 (1-x))) / (\lambda_1 - \lambda_2),$$

$$P_2(x) = (\exp(-\lambda_2 (1-x)) - \exp(-\lambda_1 (1-x))) / (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Легко заметить, что $\breve{y}(x) = y(x)$.

Проанализируем поведение функций влияния $G_1(x), H_1(x), P_1(x)$, i=1,2. Особое внимание уделим этим функциям на концах отрезка [0, 1]. Если $x \to 0$, то $G_1(x) \to 1$; если $x \to 1$, то $G_1(x) \to 0$. Для $G_2(x)$ справедлива обратная картина: если $x \to 0$, то $G_2(x) \to 0$; если $x \to 1$, то $G_2 \to 1$.

Для функций $H_1(x)$ и $H_2(x)$ справедлива следующая картина: если $x \to 0$, $H_1(x) \to 1$; если $x \to 1$, то $H_1(x) \to M_1$, где $M_1 = (\lambda_1 \exp(\lambda_2) - \lambda_2 \exp(\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) >> 1$, если $x \to 0$, $H_2(x) \to 0$, если $x \to 1$, то $H_2 \to M_2$, где $M_2 = (\exp(\lambda_1) - \exp(\lambda_2)) / (\lambda_1 - \lambda_2) >> 1$.

Проиллюстрируем картину поведения функций $P_1(x)$ и $P_2(x)$: если $x \to 0$, то $P_1(x) \to K_1$, где $K_1 = (\lambda_1 \exp(-\lambda_2) - \lambda_2 \exp(-\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) >> 1$; если $x \to 0$, то $P_2(x) \to K_2$, где $K_2 = (\exp(-\lambda_2) - \exp(-\lambda_1)) / (\lambda_1 - \lambda_2) >> 1$; если $x \to 1$, то $P_2(x) \to 0$.

Таким образом, функции $G_1(x), P_1(x)$ и $P_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x = 0$, а функции $G_2(x)$, $H_1(x)$ и $H_2(x)$ имеют пограничный слой в точке x=*1*. В качественном отношении изменение производных для всех этих функций в соответствующих зонах пограничного слоя является равносильным. Исходя из этого, не следует однозначно отдавать предпочтение форме (5), которая представляет решение исходной граничной задачи, перед соответствующими формами вида (6) и (7). И, кроме этого, нужно учитывать, что функции $G_1(x)$ и $G_2(x)$ сами имеют пограничные слои в обеих точках: $x = 0$ и $x = 1$, что создает в представлении решения определенную дополнительную сложность.

Анализируя поведение функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $P_1(x)$, $P_2(x)$, можно заметить, что есть возможность указать такую внутреннюю точку $x_0 \in (0,1)$ вблизи точки $x = 0$ и такую внутреннюю точку $x_1 \in (0,1)$ вблизи точки $x = 1$, что поведение функций $H_1(x), H_2(x)$ на $[0, x_0)$, а функций $P_1(x)$, $P_2(x)$ на $[x_1, 1)$ будет благоприятным в том смысле, что на этих отрезках отрицательное влияние пограничных слоев будет нейтрализовано. Это обстоятельство можно использовать для того, чтобы отрезок [0, 1] покрыть совокупностью положительных $J^{(+)}$ и отрицательных $J^{(-)}$ подынтервалов пристрелки, причем таких, на которых будет нейтрализовано отрицательное влияние пограничных слоев. Этот механизм четко прослеживается в методе множественной двусторонней пристрелки.

Рассмотрим влияние пограничного слоя для определения свойств замыкающей системы уравнений в методе множественной двусторонней пристрелки. Рассмотрим частный случай, выбрав разбиение отрезка $[0;1]$ в виде $0 = x_0 < x_1 < x_2 = 1$, т.е. точка пристрелки x_1 здесь одна и $J_1^{(+)} = \{x_1 \le x \le 1\}$, а $J_1^{(-)} = \{0 \le x \le x_1\}$. Искомое решение исходной граничной задачи представимо формулами:

$$\hat{y}(x) = H_1(x)y_1(x_1) + H_2(x)y_1'(x), \qquad x \in J_1^{(+)},$$

$$\check{y}(x) = P_1(x)y_1(x_1) + P_2(x)y_1'(x_1), \qquad x \in J_1^{(-)},$$

где $y_1 = y(x_1)$, $y_1' = y'(x_1)$ и $y(x)$— искомое решение граничной задачи (1;2). Замыкающая система уравнений для определения y_1 и y_1' в этом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} P_1(0)y_1 + P_2(0)y_1' = A, \\ H_1(1)y_1 + H_2(1)y_1' = B. \end{cases}$$

Хотя зависимость $P_i(0)$ и $P_i(1)$, $i = 1, 2$ от положения точки x_1 и длин подынтервалов $[0, x_1]$, $[x_1, 1]$ не помечена, в действительности она имеет место и является существенной. Обозначим

$$D_1 = \det\begin{bmatrix} P_1(0) & P_2(0) \\ H_1(1) & H_2(1) \end{bmatrix}.$$

Т.к. предполагается , что искомая граничная задача (1, 2) имеет единственное решение, то должно выполняться условие $D_1 \ne 0$. Значит, из уравнений (7) получим

$$y_1 = \frac{1}{D_1}\begin{bmatrix} A & P_2(0) \\ B & H_2(1) \end{bmatrix}, \qquad y_1' = \frac{1}{D_1}\begin{bmatrix} P_1(0) & A \\ H_1(1) & B \end{bmatrix}.$$

Обобщая полученные результаты на случай произвольного разбиения отрезка [0, 1], решение будем иметь в виде

$$\hat{y}^{(2j-1)}(x) = H_1^{(2j-1)}(x)y_{2j-1} + H_2^{(2j-1)}(x)y_{2j-1}', \qquad x \in J_{2j-1}^{(+)},$$

$$\check{y}^{(2j-1)}(x) = P_1^{(2j-1)}(x)y_{2j-1} + P_2^{(2j-1)}(x)y_{2j-1}', \qquad x \in J_{2j-1}^{(-)},$$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2m-2} < x_{2m-1} < x_{2m} = 1, \quad j = \overline{1,m},$$

где $\hat{y}^{(2j-1)}(x)$– решение на положительных подинтервалах пристрелки, а $\check{y}^{(2j-1)}(x)$– на отрицательных. Свойства матрицы Якоби регулируются в данном случае выбором числа m подынтервалов пристрелки $J_{2j-1}^{(+)}$, $J_{2j-1}^{(-)}$ и их длин. В зонах плавного изменения решения шаг интегрирования автоматически может быть адоптирован к имеющим место свойствам решения. Замыкающая система при этом будет иметь достаточно низкий порядок, и независимо от шага интегрирования в любом случае будут решаться только две задачи Коши в противоположных направлениях к концам подынтервалов пристрелки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений // Пер. с англ. – М., 1983. С. 200.

УДК 519.714

О.В. Герман, доцент; Д.В. Занько, ассистент

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ НА КОНЕЧНОМ ОРИЕНТИРОВАННОМ ГРАФЕ

The paper deals with the problem of synthesizing control algorithm for the finite discrete systems. A new method is described which uses normalization procedure in order to procedure the required control alongside with some regular labeling mechanism for the graph nodes.

Введение

Статья посвящена проблеме синтеза управления дискретной конечной системой. Различные точки зрения по этому вопросу сформулированы в [1–3]. Предлагается метод синтеза, использующий процедуру нормализации графа и некоторую регулярную процедуру разметки вершин-состояний.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу синтеза управления системой, сформулированную на ориентированном конечном графе $G = (U, \overline{V})$, вершины которого определяют классы состояний, а дуги помечены символами операторов y_i, при реализации которых осуществляется переход из одного класса состояний в другой. Каждый класс будем описывать набором элементов из {0, 1, *}: 0, когда значение переменной состояния равно 0; 1, когда значение переменной состояния равно 1; "*", когда значение переменной состояния безразлично. Размерность вектора фиксирована и равна n – числу переменных состояния системы. Например, класс $S_i =< 0 * 1 * 0 >$ включает 4 состояния:

0 0 1 0 0
0 0 1 1 0
0 1 1 0 0
0 1 1 1 0,

которые получаем заполнением разрядов, отмеченных "*", 0 или 1. Допускаем также класс, содержащий лишь одно состояние.

Определение 1. Два класса называются ортогональными, если они отличаются хотя бы в одном разряде. Т.е. если в одном и том же разряде эти классы имеют значения переменных состояния системы, равные 0 и 1.

Определение 2. Графом нормального вида будем называть граф, который представлен множеством попарно ортогональных вершин.

В качестве иллюстрации мы будем использовать систему, состоящую из следующих классов: