22) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle;$

23) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}+2xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle;$

24) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}+\lambda xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^3\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \ldots$

$\oplus \left\langle x^\lambda \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \lambda = 3,4,\ldots;$

25) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle;$

26) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups.— J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970). P. 1–82.

2. Tanaka N. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.— Hokkaido Math. J., 8 (1979). P. 23–84.

УДК 517.923

О.Н. Пыжкова, ст. преподаватель

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

The objects of the research in this work are self-similar families of smooth functions indexed by a small parameter. New high order asymptotic solutions the infinitely narrow solution type and of the shock wave type have been given for the Hopf equation.

Одной из основных задач, стимулировавших возникновение теории мнемофункций, является исследование сингулярных решений нелинейных дифференциальных уравнений, так как понятие решения на языке обобщенных функций в таком случае не определено. Наиболее простым по записи нелинейным дифференциальным уравнением является уравнение Хопфа

$$Lu \equiv u_t' + \left(u^2\right)_x' = 0, \tag{1}$$

которое используется как одна из моделей, описывающих движение волн. Несмотря на простой вид, в этом уравнении проявляются эффекты нелинейности и при его исследовании возникают все сложности, типичные и для более общих уравнений.

В работах ряда авторов (В.П. Маслов, В.А. Цупин, Г.А. Омельянов, В.М. Шелкович и др.) строились так называемые решения типа "бесконечно узкого солитона" для уравнения Хопфа (1). Построенные объекты не являются решениями уравнения (1) в классическом смысле, а представляют собой семейства гладких функций $u_\varepsilon(x,t)$, зависящих от малого параметра ε, и являются решениями уравнения (1) в следующем смысле.

Определение 1. Семейство гладких функций $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x,t)$ называется слабым асимптотическим решением порядка ν уравнения (1), если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(u_\varepsilon)\psi(x)dx = o(\varepsilon^\nu) \tag{2}$$

при каждом t и для любой функции ψ из пространства Шварца $D(R)$.

По своему определению слабое асимптотическое решение является мнемофункцией. И поэтому естественно, что язык теории мнемофункций открывает возможности для исследования таких задач.

Одним из основных моментов, отличающих теорию мнемофункций от теории обобщенных функций, является то, что каждой обобщенной (в частности, обычной) функции соответствует бесконечно много различных мнемофункций. При этом выбор ассоциированных мнемофункций представляет собой внесение дополнительной информации, позволяющей устранить неопределенности, возникающие в классической теории обобщенных функций.

Например, уравнение Хопфа (1) соответствует идеальному случаю нулевой вязкости и нулевой дисперсии. Если учитывается наличие малой вязкости, то вместо уравнения Хопфа, т.е. оператора $Lu = u'_t + \left(u^2\right)'_x$, рассматривается оператор $L_\varepsilon u = u'_t + \left(u^2\right)'_x - \varepsilon u''_{xx}$ и уравнение Бюргерса, которое обычно записывается в виде $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Заметим, что заменой переменных уравнение Бюргерса можно привести к виду $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} - \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, в котором главная часть совпадает с уравнением Хопфа.

Если учитывается малая дисперсия, то вместо оператора Lu возникает оператор $L_\varepsilon u = u'_t + 3\left(u^2\right)'_x + \varepsilon^2 u'''_{xxx}$ и уравнение Кортевега-де Фриза (KdV) $\frac{\partial u}{\partial t} + 6 \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$. Заметим, что заменой переменных это уравнение можно привести к виду $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial\left(u^2\right)}{\partial x} + \varepsilon^2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$, в котором главная часть также совпадает с уравнением Хопфа.

С такой точки зрения наиболее естественным является не непосредственное определение решения уравнения (1), а определение решения, порожденного соответствующим семейством операторов L_ε. Семейство u_ε естественно считать решением уравнения (1), порожденным заданным обобщенным оператором L_ε, если $L_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$, где равенство понимается в смысле теории мнемофункции.

Однако построение таких решений достаточно сложно, эффективно оно может быть проведено только в специальных случаях. Вместе с тем каждое решение u_ε в указанном смысле является слабым асимптотическим решением в смысле определения 1. Семейство гладких функций $u_\varepsilon(x,t)$, зависящих от малого параметра ε, как видно из определения, является мнемофункцией, и для него имеют смысл все понятия из теории мнемофункций. В частности, имеет смысл понятие ассоциированной обобщенной функции.

Определение 2. Говорят, что семейство гладких функций u_ε (в частности, асимптотическое решение) ассоциировано с функцией от t со значениями в пространстве $D'(R)$, если при каждом t

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon(x,t)\psi(x)dx = \langle u(t),\psi\rangle$$

для любой функции ψ из пространства Шварца $D(R)$.

Обобщенная функция, ассоциированная с некоторым асимптотическим решением, объявляется решением исходного уравнения. Например, в [1] рассматривались самоподобные асимптотические решения вида

$$u_\varepsilon(x,t) = u_0 + f\left(\frac{x-Vt}{\varepsilon}\right), \tag{3}$$

где u_0 — постоянная; f — некоторая гладкая функция, задающая профиль самоподобного решения, такая, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B\neq 0$.

Такое семейство имеет асимптотическое разложение вида

$$u_\varepsilon \sim u_0 + BH(x-Vt) + o(\varepsilon), \text{ где } H(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

и, следовательно, ассоциировано с функцией $u(t)=u_0+BH(x-Vt)$ со значениями в пространстве $D'(R)$.

Решение такого вида интерпретируется как ударная волна высоты B, движущаяся в жидкости глубины u_0 со скоростью V.

Семейство (3) является асимптотическим решением порядка 1 уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполнено условие Гюгонио [1] $2\cdot u_0 + B = V$.

Условия на функцию f, при которых семейство (3) является асимптотическим решением более высокого порядка, получены ниже.

Если для асимптотического решения не существует ассоциированной обобщенной функции (или ассоциированная обобщенная функция тривиальна), то для более наглядного представления о поведении асимптотического решения используется асимптотическое разложение такого решения в пространстве $D'(R)$ при каждом t, которое обычно имеет вид $u_\varepsilon \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(t)$, где $U_k(t)$ есть некоторые обобщенные функции. Напомним, что это разложение означает, что для любых t и N и любой функции ψ из пространства Шварца $D(R)$ выполнено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon(x,t)\psi(x)dx - \sum_{k=0}^{N}\langle U_k(t),\psi\rangle\varepsilon^k = o\left(\varepsilon^N\right).$$

Ассоциированная обобщенная функция для семейства (3) с указанной функцией f есть постоянная u_0, не отражающая специфических свойств семейства. Но его асимптотическое разложение $u_\varepsilon \sim u_0 + \varepsilon A\delta(x - Vt) + \ldots$ содержит в качестве второго члена δ-функцию с бесконечно малым коэффициентом. Решение такого типа интерпретируется как бесконечно узкая волна с амплитудой A, движущаяся в жидкости глубины u_0 со скоростью V (поэтому такие решения называют решениями типа бесконечно узкого солитона).

Однако построенные ранее решения являлись асимптотическими решениями порядка не выше третьего. Задача построения асимптотических решений более высоких порядков, в частности для уравнения Хопфа, имеющих асимптотическое разложение вида

$$u_\varepsilon = \sum_{k=0}^{N} A_k \varepsilon^{k+1}\delta^{(k)}(x - Vt) + o\left(\varepsilon^N\right), \tag{4}$$

сформулирована, например, в [1], п. 7.5.

Функция f задает профиль бесконечно узкой волны, движущейся со скоростью V, поэтому представляет интерес получение информации об этой функции, т.е. о форме движущейся волны. Естественно предположить, что асимптотическое решение более высокого порядка точнее отражает физическую картину.

Введем следующие обозначения: пусть $AC(R)$ — множество всех вещественнозначных абсолютно непрерывных функций на R. F — это подмножество из $AC(R)$, состоящее из таких функций, у которых существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = f(\pm\infty)$, и производная допускает на $\pm\infty$ следующие представления:

$$f'(x) = a^{\pm}x^{-\alpha} + o\left(|x|^{-\alpha}\right) \text{ при } x \to \pm\infty, \text{ где } \left|a^+\right| + \left|a^-\right| \neq 0, \alpha > 1,$$

или $f'(x) = o\left(|x|^{-p}\right)$ при $x \to \pm\infty$, $\forall p > 0$.

Рассмотрим семейство функций

$$u_\varepsilon(x,t) = f\left(\frac{x - Vt}{\varepsilon}\right) \tag{5}$$

и опишем множество F_ν функций $f \in F$, таких, что семейство вида (5) является асимптотическим решением уравнения (1) порядка ν.

Заметим, что, обозначив $f(-\infty) = u_0$, семейство (5) можно записать в виде $u_\varepsilon(x,t) = u_0 + f_0\left(\dfrac{x - Vt}{\varepsilon}\right)$, где $f_0(-\infty) = 0$, т.е. в виде (3).

Теорема 1. Семейство (5), $f \in F$, является асимптотическим решением уравнения (1) порядка ν тогда и только тогда, когда

1) *функция* $g(x) := -V \cdot f'(x) + \left(f^2\right)'(x)$ *убывает при* $x \to \infty$ *быстрее, чем* $|x|^{-\nu-1}$;

2) $M_j(g) = 0$ *при* $j = 0,1,\dots,\nu-1$.

Любое семейство (5) имеет асимптотическое разложение вида

$u_\varepsilon \sim f(-\infty) + (f(+\infty) - f(-\infty))H(x - Vt) + \varepsilon M_0(f)\delta(x - Vt) + \dots$.

Для таких семейств возможны два качественно различных случая, когда величина $B = f(+\infty) - f(-\infty)$ отлична от нуля или $B = 0$.

Теорема 2. Пусть $B \neq 0$. Семейство (5), где $f \in F$, является асимптотическим решением уравнения (1) порядка ν тогда и только тогда, когда

1) $\alpha > \nu + 1$;

2) *выполнено условие Гюгонио:* $V - 2 \cdot f(-\infty) = B$;

3) *выполнены условия типа Гюгонио высших порядков*

$$(-V + 2 \cdot f(-\infty))M_j(\tilde{f}) + M_j\left((\tilde{f})^2\right) = 0, \quad j = 0,1,\dots,\nu-2,$$

где $\tilde{f}(x) = \left(f(x) - \frac{V}{2}\right) sign(x - x_0) - \frac{B}{2}$, x_0 *— некоторая фиксированная точка.*

При этом семейство (5) имеет асимптотическое разложение вида

$u_\varepsilon \sim u_0 + B \cdot H(x - Vt) + \varepsilon \cdot M_0(\tilde{f}) \cdot \delta(x - Vt) + \dots$

и интерпретируется как ударная волна высоты B, *движущаяся в жидкости глубины* $u_0 = f(-\infty)$ *со скоростью* V.

Теорема 3. *Пусть* $f(+\infty) - f(-\infty) = 0$. *Семейство* (5), $f \in F$, $f \neq const$, *является нетривиальным асимптотическим решением уравнения* (1) *порядка* ν *тогда и только тогда, когда*

1) $\alpha > \nu + 1$;

2) *выполнены условия типа Гюгонио высших порядков*

$$(-V + 2 \cdot f(-\infty))M_j(\tilde{f}) + M_j\left((\tilde{f})^2\right) = 0, \quad j = 0,1,\dots,\nu-2,$$

где $\tilde{f}(x) = f(x) - f(-\infty)$.

При этом семейство (5) *имеет асимптотическое разложение вида*

$$u_\varepsilon \sim u_0 + \varepsilon A \delta(x - Vt) + \dots,$$

где $A \neq 0$ *и* $signA = sign(V - 2 \cdot u_0)$ *и решение интерпретируется как бесконечно узкая волна с амплитудой* $A = M_0(\tilde{f})$, *движущаяся в жидкости глубины* $u_0 = f(-\infty)$ *со скоростью* V.

ЛИТЕРАТУРА

1. Данилов В.Г., Маслов В.П., Шелкович В.М. Алгебры особенностей сингулярных решений квазилинейных строго гиперболических систем первого порядка // Теор. и матем. физика, 1998.–Т.114. – №1. – С. 3 – 55.