УДК 512.812.4

Н.П. Можей, ст. преподаватель

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С КОММУТАТИВНОЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ

This paper is devoted to the description of graded Lie algebras with $g_{-1} = V$, $\dim V = 2$.

Градуированные алгебры Ли являются важным объектом дифференциальной геометрии и анализа. Ключевой идеей исследований в этой области является переход от гладких многообразий к фильтрованным многообразиям (т.е. к гладким многообразиям с фиксированной фильтрацией касательного расслоения). В этом случае роль касательного расслоения выполняет градуированное векторное расслоение, ассоциированное с заданной фильтрацией, а слои этого расслоения естественным образом наделяются структурой градуированной алгебры Ли. Таким образом, возникает необходимость исследования градуированных алгебр Ли.

Под градуированной алгеброй Ли мы понимаем градуированное векторное пространство

$$g = \oplus_{p=-\infty}^{+\infty} g_p ,$$

наделенное такой структурой алгебры Ли, что $[g_i, g_j] \subset g_{i+j}$ для всех $i, j \in Z$.

Градуированная алгебра называется *транзитивной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

– существует такое $m \in N$, что $g_{-p} = \{0\}$ для всех $p > m$;

– $[g_{-1}, g_{-p}] \subset g_{-p-1}$ для всех $p \geq 1$;

– если $x \in g_p$ для $p \geq 0$ и $[x, g_{-1}] = \{0\}$, то $x = 0$.

Из данного определения следует, что $m = \oplus_{p<0} g_p$ является градуированной нильпотентной алгеброй Ли, порожденной g_{-1}. Будем называть такие градуированные нильпотентные алгебры *фундаментальными* (см. работы Танаке [1,2]). В этой статье рассматривается случай $g_{-1} = V$, $\dim V = 2$.

Пусть m – произвольная фундаментальная градуированная алгебра Ли. Тогда существует единственная транзитивная градуированная алгебра Ли $g(m)$, удовлетворяющая условиям:

– $g_p(m) = g_p$ для $p < 0$;

– $g(m)$ максимальна среди всех транзитивных градуированных алгебр, удовлетворяющих первому условию.

Тогда любая транзитивная градуированная алгебра может быть отождествлена с некоторой градуированной подалгеброй алгебры Ли $g(m)$.

Пусть m – коммутативная алгебра Ли. В этом случае M является абелевой группой Ли; D – касательное расслоение к M. Обозначим через A алгебру Ли ростков гладких векторных полей в единице. Определим подпространства A_0 и A_{-1} следующим образом:

$$A_0 = \{X \in A \mid X_e = 0\}, \quad A_{-1} = \{X \in A \mid X_e \in \mathrm{D_e}\}$$

Далее положим $A_{-p-1}=[A_{-p},A_{-1}]$, $A_p=\{\xi\in A_{p-1}\,|\,[\xi,A_{-1}]\subset A_{p-1}\}$. Тогда A_p – это в точности все ростки таких векторных полей, все координаты которых равны 0 в единице со всеми своими производными до порядка p включительно. Семейство подпространств A_p определяет фильтрацию алгебры Ли A, а алгебра $g(m)$ может быть отождествлена с ассоциированной градуированной алгеброй, т.е. $g_p(m)=A_p/A_{p+1}$.

Фиксируя систему координат на M, центрированную в единице, можно отождествить $g(m)$ с алгеброй Ли полиномиальных векторных полей $f\frac{\partial}{\partial x}+g\frac{\partial}{\partial y}$, причем $g_p(m)$ будет состоять из векторных полей, у которых f и g – однородные полиномы степени $p+1$.

Пусть g – произвольная градуированная подалгебра в $g(m)$, для которой $g_{-p}=g_{-p}(m)$ для всех $p>0$. Для нахождения всех таких подалгебр применим следующий алгоритм классификации:

1. Описать с точностью до сопряженности все подалгебры $g_0\subset g_0(m)=gl(2,R)$. Перейти к шагу 3.
2. Пусть для некоторого $k\in N$ построена последовательность подпространств $g_i\subset g_i(m)$ такая, что $[g_i,g_j]\subset g_{i+j}$ для всех $i,j,i+j\le k$. Описываем все подпространства g_{k+1} в $g_{k+1}(m,g_0,\ldots,g_k)=\{x\in g_{k+1}(m)\,|\,[x,g_{-1}]\subset g_k\}$ такие, что $\tilde{g}_{k+1}(m,g_0,\ldots,g_k)=\oplus_{i+j=k+1,1\le i,j\le k}[g_i,g_j]\subset g_{k+1}$, и алгебра $\tilde{g}(m,g_0,\ldots,g_{k+1})$ конечномерна.
3. Найти подалгебры $\tilde{g}(m,g_0,\ldots,g_{k+1})$ и $g(m,g_0,\ldots,g_{k+1})$. Если они не совпадают, то перейти к шагу 2. Иначе подалгебра $g=\tilde{g}(m,g_0,\ldots,g_{k+1})=$ $=g(m,g_0,\ldots,g_{k+1})$ является одной из таких подалгебр.

Применяя алгоритм, получаем:

Теорема. Любая конечномерная градуированная подалгебра g над полем R, такая, что $g_{-1}=V,\dim V=2$, сопряжена одной и только одной из следующих подалгебр:

1) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle$;

2) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\left\langle x\frac{\partial}{\partial x}+\lambda y\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle,|\lambda|\le 1$;

3) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\left\langle x\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle\oplus\left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}\right\rangle$;

4) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\left\langle (\lambda x-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x+\lambda y)\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle,\lambda\ge 0$;

5) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\left\langle x\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\left\langle x^2\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\oplus\ldots\oplus\left\langle x^{k+1}\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle, k=0,1,2,\ldots$;

6) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

7) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

8) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$;

9) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x}, y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

10) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

11) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, \right.$

$\left. -2xy\frac{\partial}{\partial x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

12) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

13) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \ldots \oplus \left\langle x^{k+1}\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, k = 1,2,.$

14) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + y/2\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

15) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

16) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2\lambda xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^3\frac{\partial}{\partial y} \right.$

$\oplus \ldots \oplus \left\langle x^{2\lambda}\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, 2\lambda = 3,4,\ldots$;

17) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

18) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \ldots \oplus \left\langle x^{k+1}\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, k = 1,2,\ldots$;

19) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$;

20) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle$;

21) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \ldots \oplus \left\langle x^{k+1}\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, k = 1,2,\ldots$;

22) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle;$

23) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle;$

24) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + \lambda xy\frac{\partial}{\partial y}, x^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x^3\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \ldots$
$\oplus \left\langle x^\lambda\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle, \lambda = 3,4,\ldots;$

25) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle;$

26) $\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle \oplus \left\langle x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial y}, y\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \oplus \left\langle x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}, xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} \right\rangle.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanaka N. On differential systems, graded Lie algebras and pseudo-groups.— J. Math. Kyoto Univ., 10 (1970). P. 1–82.

2. Tanaka N. On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras.— Hokkaido Math. J., 8 (1979). P. 23–84.

УДК 517.923

О.Н. Пыжкова, ст. преподаватель

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ПРОСТЕЙШЕГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

The objects of the research in this work are self-similar families of smooth functions indexed by a small parameter. New high order asymptotic solutions the infinitely narrow solution type and of the shock wave type have been given for the Hopf equation.

Одной из основных задач, стимулировавших возникновение теории мнемофункций, является исследование сингулярных решений нелинейных дифференциальных уравнений, так как понятие решения на языке обобщенных функций в таком случае не определено. Наиболее простым по записи нелинейным дифференциальным уравнением является уравнение Хопфа

$$Lu \equiv u'_t + \left(u^2\right)'_x = 0, \qquad (1)$$

которое используется как одна из моделей, описывающих движение волн. Несмотря на простой вид, в этом уравнении проявляются эффекты нелинейности и при его исследовании возникают все сложности, типичные и для более общих уравнений.

В работах ряда авторов (В.П. Маслов, В.А. Цупин, Г.А. Омельянов, В.М. Шелкович и др.) строились так называемые решения типа "бесконечно узкого солитона" для уравнения Хопфа (1). Построенные объекты не являются решениями уравнения (1) в классическом смысле, а представляют собой семейства гладких функций $u_\varepsilon(x,t)$, зави-