ЛИТЕРАТУРА

1. Монастырный П. И., Кулешова И. Ф. О модификациях метода унитарной прогонки для систем линейных о.д.у. второго порядка с погранслоем 1 // Известия АН БССР, серия физико-матем. Минск, 21с. Деп. в ВИНИТИ 08.06.88. 4527-88.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутта для жестких нелинейных дифференциальных уравнений // Пер. с англ. М., 1983. С.200.
3. Кулешова И. Ф. О численном решении граничных задач, обладающих сильной чувствительностью к изменению входных данных // Известия АН БССР, сер. физико-матем. Минск. 1986. 18с. Деп. в ВИНИТИ 11.04. 2618-В86.

УДК 519*714

О. В. Герман, доцент
Н. Н. Дорожкина, аспирантка

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

The paper presents an algorithm to solve one common workshop planning problem formalized with the help of disjunct inequalities.

Рассмотрим следующую достаточно общую постановку задачи оперативного управления производством.

Обозначим

$A_1, A_2, ..., A_n$ – планируемые к выполнению объемы работ;

$T_1, T_2, ..., T_n$ – директивные времена выполнения работ;

T – истекшее время с начала планового периода (от нулевого момента);

$Z_1, Z_2, ..., Z_n$ – выполненные объемы работ к моменту T;

$V_i = \dfrac{A_i}{T_i}$ – плановые скорости выполнения работ ($T_i \neq 0$).

Все приведенные выше величины известны.

$\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ – планируемые на ближайшем отрезке ΔT объемы выпуска (подлежат определению).

Запишем задачу оптимизации в форме

$$\sum_{i=1}^{n}\left(V_i - \frac{Z_i}{T}\right)\cdot \Delta_i \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \Delta_i = 0 \vee \Delta_i^B \ge \Delta_i \ge \Delta_i^H & (2) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \Delta_i \ge \Delta_1^* & (3) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} d_i \Delta_i \le \Delta_2^* & (4) \\ \Delta_i \ge 0 \qquad i = 1,\dots,n & (5) \end{cases}$$

Целевая функция устанавливает, что чем больше отставание от плановой скорости V_i, тем больше следует установить оперативный планируемый объем Δ_i.

Условия (2) означают, что величина Δ_i не должна быть меньше (больше) некоторого значения минимального (максимального) размера партии Δ_i^H (Δ_i^B) либо равняться 0. Ограничение (3) учитывает «минимальную приемлемую рентабельность» плана выпуска, где c_i – коэффициент, оценивающий прибыль от единицы продукции i-го наименования. Ограничение (4) учитывает «общую пропускную способность» системы, где d_i – коэффициент.

Проведем последовательное усложнение модели.

Для учета времени на переналадку оборудования запишем целевой функционал в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(V_i - \frac{Z_i}{T}\right)\Delta_i - \alpha_i \cdot \frac{\Delta_i}{\Delta_i^B}\cdot t_{ni}\right] \to \max,$$

где t_{ni} – время на переналадку оборудования на выпуск i-го наименования продукции; α_i– коэффициент, близкий к «1», учитывающий приблизительное соотношение $\alpha_i \cdot \dfrac{\Delta_i}{\Delta_i^B} = 1$.

Характер зависимости Δ_i от величины $\left(V_i - \dfrac{Z_i}{T}\right)$ определяется формулой

$$\frac{d\Delta_i(t)}{dt} = C\left(\frac{A_i}{T_i}\cdot T - Z_i - \Delta_i(t)\right) \quad \text{или} \quad \frac{d\Delta_i(t)}{dt} = C_1 - C_2\Delta_i(t), \tag{6}$$

где $C_1 = C\left(\frac{A_i}{T_i}\cdot T - Z_i\right)$, $C_2 = C$, причем C определяется из условий

$$\begin{cases}\Delta(0)=0\\ \Delta(T)=A_{пл}-Z(T)\end{cases}. \tag{7}$$

Решение дифференциального уравнения (6) дает

$$\frac{d\left(C_2\Delta(t)-C_1\right)}{C_2\Delta(t)-C_1}=dt\,,$$

откуда

$$\Delta(t)=\frac{C_1+e^{-(t+C_3)}}{C_2} \tag{8}$$

Из (7) и (8) определяем планируемые объемы Δ_1, ..., Δ_n для $t=\Delta T$.

С учетом этого задача планирования принимает следующий вид оптимизационной задачи булевого программирования:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n'}\beta_i\left(\frac{C_{1i}+e^{-(\Delta T+C_3)}}{C_{2i}}\right)\left[V_i-\frac{Z_i}{T}-\frac{\alpha_i\cdot t_{ni}}{\Delta_i^B}\right]\to\max\\ \Delta_i^B\geq\beta_i\left(\frac{C_{1i}+e^{-(\Delta T+C_3)}}{C_{2i}}\right)\\ \sum\limits_{i=1}^{n'}\beta_i c_i\left(\frac{C_{1i}+e^{-(\Delta T+C_3)}}{C_{2i}}\right)\geq\Delta_1^*\\ \sum\limits_{i=1}^{n'}\beta_i d_i\left(\frac{C_{1i}+e^{-(\Delta T+C_3)}}{C_{2i}}\right)\leq\Delta_2^*\\ i=1,\ldots,n'\end{cases},$$

причем n' ограничивает пересчет только теми индексами i, для которых $\Delta_i\geq\Delta_i^H$.

Сформулированная задача является типичной задачей линейного булевого программирования, достаточно большой размерности, если учитывать условия реального производства.

Рассмотрим применение к этой задаче статистически оптимального алгоритма, изложенного в работе [1]. Для этого воспользуемся иллюстрацией.

Рассмотрим следующую задачу:

(F) $2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \to \min$

$$4x_1 + x_2 + \overline{x_4} \geq 5 \qquad (a)$$

$$\overline{x_1} + 2x_2 + x_3 \geq 3 \qquad (b)$$

$$2x_1 + \overline{x_3} + x_4 \geq 3 \qquad (c)$$

Веса $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}$ примем равными достаточно большим положительным числам, например, 100.

Составляется начальная матрица покрытия со столбцами, представляющими некоторые дизъюнкты. Каждый такой дизъюнкт определяет некоторую необходимую комбинацию значений булевых переменных. Например, из (a) следует $x_2 \vee \overline{x_4}$; из (b): $\overline{x_1} \vee x_3$; из (c): $\overline{x_3} \vee x_4$. Поскольку матрица покрытия будет наращиваться, то достаточно из каждого неравенства взять по одному дизъюнкту-ограничению. Начальная матрица покрытия имеет следующий вид:

$M_0=$

				дополнительные столбцы			
x_1				1			
x_2	1				1		
x_3		1				1	
x_4			1				1
$\overline{x_1}$		1		1			
$\overline{x_2}$					1		
$\overline{x_3}$			1			1	
$\overline{x_4}$	1						1

Алгоритм решения задачи заключается в реализации следующей схемы:

(a) На каждой итерации i отыскивается некоторое неизбыточное покрытие матрицы M_i.

(b) Если ни одно ограничение не нарушается, то строкам M_i присваиваются веса из целевой функции, иначе строкам M_i присваиваются веса из того ограничения, которое нарушается.

(c) Если дополнительный столбец d для M_i, построенный на основании сформулированного в [1] правила построения групповой резольвенты ненулевой, то он присоединяется к M_i и выполняется переход на шаг (е).

(d) Если d – нулевой столбец, то процесс итераций завершается; покрытие, доставляющее минимум F, – наилучшее.

(е) Проводится оценка v числа оставшихся решений в M_i. Если эта оценка не выполняется, то алгоритм завершается, иначе итерации продолжаются с п. (а). Оценка v имеет вид

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln n-\left(k+\frac{1}{2}\right)\cdot\ln k-(n-k)+\frac{1}{12n}-\frac{1}{12k+1}-m\cdot\ln(1-p)\leq -1{,}5\,.$$

Здесь n – число строк матрицы покрытия, преобразованной к невзвешенному варианту; m – число столбцов матрицы покрытия, преобразованной к невзвешенному варианту; k – значение функционала (F) в текущей итерации; p – плотность «1» в матрице покрытия, преобразованной к невзвешенному варианту.

Доказано, что сложность алгоритма может быть оценена как

$$N=O\left(\frac{m\cdot p\cdot n\cdot C}{\sqrt{1-p}}\right),$$

где C – константа, т.е. полиномиальна от m, n.

В настоящее время поставлена задача довести алгоритм до реализации. Планируется использовать его в задачах ОУП завода «Горизонт».

ЛИТЕРАТУРА

1. О. В. Герман. Обобщенный статистически оптимальный метод решения задачи о минимальном взвешенном покрытии 0, 1 – матрицы // Экономика и математические методы, 1994, т. 30, вып. 4. – С. 139-150.