типными компонентами. Таким образом, чтобы найти g, находим все подмодули каждой изотипной компоненты, составляем их суммы и проверяем, является ли полученное пространство алгеброй Ли. Чтобы классифицировать разрешимые подалгебры, проверяем для каждой найденной ранее подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства, содержит ли их ее вещественная форма. Это завершает классификацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. - Leipzig: Teubner, 1893.
2. Чеботатев Н.Г. Теория групп Ли. - М-Л.: Гостехиздат, 1940.
3. Koch R.M., Lowenthal F. On generating subgroups of the affine group in the plane by pairs of infinitesimal transformations. Rocky Mountain J. Math., vol. 6, № 1, 1976. - P. 119-131.
4. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry. - Topology and geometry of submanifolds. River Edge: World Sci., vol. 8, 1996. - P. 212-223.
5. Пясецкий В.С. Конечные орбитальные разложения групп аффинных преобразований плоскости.- Вопросы теории групп и гомологической алгебры. - Ярославль: ЯГУ, 1988. - С. 155-157.

УДК 519.24

Е. И. Блинова, ассистент

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ШУМА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

The paper is devoted to a statistical filtering problem that arises when gray scale images are to be denoised. The images are interpreted as functions on the unit square. We assume these functions to be in the Besov space. In this paper, we estimate the unknown noise parameter.

В последние годы проблемы анализа и обработки компьютерных изображений привлекают все большее внимание исследователей как в силу практической ценности задачи, так и благодаря ее теоретической значимости.

Под изображением понимается функция, определенная на целочисленной решетке размера $2^l \times 2^l$ и принимающая целые значения между 0 и n (l и n — известные натуральные числа). Задача восстановления изображения, наблюдаемого с шумом, — это, фактически, задача оценивания многомерного параметра по одному наблюдению, поэтому для ее решения используется дополнительная априорная информация. Одно из направлений в обработке изображений связано с предположением о гладкости изображений в определенном смысле. В ряде работ (см., напр., [2,4]) изображения интерпретируются как функции с непрерывной областью определения и характеризуются своей принадлежностью классам гладкости, связанным с функциональными пространствами Бесова. В [2] отмечено, что реальные полутоновые изображения (скажем, телевизионные или фотографические) принадлежат таким классам.

Как и в [2], мы интерпретируем изображение как кусочно-постоянную функцию f, определенную на единичном квадрате $I=[0;1]^2$. Для любого $m, 0 \le m \le l$, обозначим через D_m набор квадратов J_m со стороной 2^{-m}, составляющих разбиение I. Каждой точке решетки соответствует единственный квадрат $J_l \in D_l$ верхнего уровня l, положим f на J_l постоянной и равной значению в соответствующей точке решетки, деленному на n. Обозначим f_{J_l} — значение f на J_l, $A=\{i/n, \quad 0 \le i \le n\}$ — множество значений f.

Рассмотрим следующую статистическую модель. Предполагается, что значение изображения в каждой точке решетки с некоторой вероятностью, одной и той же для всех точек, может быть неизвестно и тогда выбирается случайно из множества A, т. е. наблюдается изображение $\tilde{f}$ с компонентами

$$\tilde{f}_{J_l} = \begin{cases} f_{J_l} & \text{с вероятностью} \quad 1-p, \\ i/n \ne f_{J_l} & \text{с вероятностью} \quad p/n. \end{cases} \qquad (1)$$

Итак, модель зависит от одного параметра p. Предполагается, что $0 \le p \le 1/2$.

Для решения задачи восстановления изображения f по наблюдению $\tilde{f}$ в такой постановке в работе [6] был предложен для случая $n=1$, а в [1] обобщен на случай $n>1$ так называемый иерархический алгоритм, основанный на предположении, что реальное изображение содержит довольно большие однотонные участки, т. е. области постоянства функции, представляющей изображение, и состоящий в последовательном обнаружении этих участков, начиная от достаточно крупных к более мелким. Для использования этого алгоритма необходимо знать значение параметра p или иметь для него оценку.

В настоящей работе для случая $n>1$ в предположении, что исходное изображение f принадлежит шару в пространстве Бесова $B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))$, строится состоятельная (при $l\to\infty$) оценка $\widehat{p}_l$ параметра p, т. е. такая, что

$$\mathbf{P}(|\,\widehat{p}_l - p\,| > h) \to 0 \quad \text{при} \quad l\to\infty. \tag{2}$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $f_{J_m} = 2^{-2(l-m)} \sum\limits_{J_l \subseteq J_m} f_{J_l}$ — среднее значение функции f на квадрате $J_m \in D_m$, положим $P_m f = \sum\limits_{J_m \in D_m} f_{J_m} \phi_{J_m}$, где ϕ_{J_m} — индикаторная функция квадрата J_m, т. е. $\phi_{J_m}(x)=1$ при $x\in J_m$ и $\phi_{J_m}(x)=0$ при $x\notin J_m$. Если коэффициенты β_{J_m} определены так, что $P_m f - P_{m-1} f = \sum\limits_{J_m\in D_m} \beta_{J_m}\phi_{J_m}$ и $f = \sum\limits_{m=0}^{l} \sum\limits_{J_m\in D_m} \beta_{J_m}\phi_{J_m}$ (считаем $P_{-1}f\equiv 0$), то для нормы функции f в пространстве Бесова $B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))$, определенной формулой

$$\|f\|_{B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))} = \|f\|_{L^{\tau}(I)} + \left(\int\limits_{0}^{\infty} \left[t^{-\alpha}\omega_1(f,t)_{\tau}\right]^{\tau} \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau},$$

где $\omega_1(f,t)_{\tau} = \sup\limits_{|h|\le t}\left(\int\limits_{I} |\, f(x+h) - f(x)\,|^{\tau}\, \phi_I(x+h)dx\right)^{1/\tau}$ — модуль гладкости 1-го порядка, имеет место следующая эквивалентность (см., напр., [3, с.408]):

$$\|f\|^{\tau}_{B_{\tau}^{\alpha,1}(L^{\tau}(I))} \sim \sum_{m=0}^{l} \sum_{J_m\in D_m} 2^{-2\tau m/s}\,|\,\beta_{J_m}|^{\tau},$$

где $1/\tau = \alpha/2 + 1/s$ и предполагается, что $0<\alpha<1/\tau\le 1$. Итак, мы строим оценку $\widehat{p}_l$ параметра шума p в предположении, что

$$\sum_{m=0}^{l} \sum_{J_m\in D_m} 2^{-2\tau m/s}\,|\,\beta_{J_m}|^{\tau} \le M. \tag{3}$$

Рассмотрим две случайные величины

$$\widehat{F} = \left\|\widetilde{f} - 1/2\right\|^2_{L^2(I)}, \qquad \widehat{I} = \left\|\widetilde{f} - P_{l-1}\widetilde{f}\right\|^2_{L^2(I)}.$$

Лемма 1. *Для неизвестного параметра* p *случайного шума имеет место соотношение*

$$p = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{6n}{n+2}\mathbf{E}\widehat{F} - \sqrt{D+\varepsilon}\right), \tag{4}$$

где

$$D = \left(\frac{1}{2} + \frac{6n}{n+2}\mathbf{E}\widehat{F}\right)^2 - \frac{16n}{n+2}\mathbf{E}\widehat{I}, \tag{5}$$

$$\varepsilon = \frac{16n}{n+2}\left(1 - \frac{n+1}{n}p\right)^2 \left\|f - P_{l-1}f\right\|^2_{L^2(I)}, \quad 0 \le \varepsilon \le C_0(n, M, \tau)2^{-\alpha\tau l}.$$

Доказательство. Учитывая модель (1), находим

$$\mathbf{E}\widehat{F} = \left(1 - \frac{n+1}{n}p\right)\left\|f - 1/2\right\|^2_{L^2(I)} + \frac{(n+2)(n+1)}{12n^2}p. \tag{6}$$

Используя соотношение

$$\sum_{J_l \subseteq J_{l-1}} \left(f_{J_l} - f_{J_{l-1}}\right)^2 = \frac{3}{4}\sum_{J_l \subseteq J_{l-1}} \left(f_{J_l} - 1/2\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{\substack{J_l, J_{l'} \subseteq J_{l-1} \\ J_l \ne J_{l'}}} \left(f_{J_l} - 1/2\right)$$

для функций $\widetilde{f}$ и f и независимость наблюдений $\widetilde{f}_{J_l}$ и $\widetilde{f}_{J_{l'}}$ при $J_l \ne J_{l'}$, вычисляем

$$\mathbf{E}\widehat{I} = \frac{3}{4}\mathbf{E}\widehat{F} - \frac{1}{4}\sum_{J_{l-1} \in D_{l-1}} 2^{-2l} \sum_{\substack{J_l, J_{l'} \subseteq J_{l-1} \\ J_l \ne J_{l'}}} \mathbf{E}\left(\widetilde{f}_{J_l} - 1/2\right)\mathbf{E}\left(\widetilde{f}_{J_{l'}} - 1/2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\mathbf{E}\widehat{F} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{n+1}{n}p\right)^2 \sum_{J_{l-1} \in D_{l-1}} 2^{-2l} \sum_{\substack{J_l, J_{l'} \subseteq J_{l-1} \\ J_l \ne J_{l'}}} \left(f_{J_l} - 1/2\right)\left(f_{J_{l'}} - 1/2\right) =$$

$$= \frac{3}{4}\mathbf{E}\widehat{F} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{n+1}{n}p\right)^2 \left(\left\|f - P_{l-1}f\right\|^2_{L^2(I)} - \frac{3}{4}\left\|f - 1/2\right\|^2_{L^2(I)}\right).$$

Выразив $\|f-1/2\|^2_{L^2(I)}$ из формулы (6), получим квадратное уравнение относительно p

$$\mathbf{E}\widehat{I}=\left(\frac{3}{4}\mathbf{E}\widehat{F}+\frac{n+2}{16n}\right)\frac{n+1}{n}p-\frac{n+2}{16n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2p^2+\frac{n+2}{16n}\varepsilon, \tag{7}$$

имеющее два действительных корня, причем априорному предположению $0\le p\le 1/2$ удовлетворяет только один корень (4).

Оценим

$$\varepsilon\le\frac{16n}{n+2}\|f-P_{l-1}f\|^2_{L^2(I)}=\frac{16n}{n+2}\sum_{J_l\in D_l}2^{-2l}\left|\beta_{J_l}\right|^2.$$

Множество значений функции f дискретно, поэтому либо $\beta_{J_l}=0$, либо $\frac{1}{4n}\le\left|\beta_{J_l}\right|\le\frac{3}{4}$. В силу условия (3) заключаем, что количество N ненулевых β_{J_l} не превосходит $M(4n)^\tau 2^{2\tau l/s}$ и, следовательно,

$$\varepsilon\le\frac{16n}{n+2}N2^{-2l}\left(\frac{3}{4}\right)^2\le\frac{9n}{n+2}M(4n)^\tau 2^{-2l+2\tau l/s}=C_0(n,M,\tau)2^{-\alpha\tau l}.$$

Лемма доказана.

Определим

$$\widehat{D}=\left(\frac{1}{2}+\frac{6n}{n+2}\widehat{F}\right)^2-\frac{16n}{n+2}\widehat{I}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть* $\delta_0=\frac{1}{4}\sqrt{l\ln 2}\cdot 2^{-l}$, $\delta_1=\frac{4n(14n+19)}{(n+2)^2}\delta_0$. *Тогда*

$$\mathbf{P}\left(\left|\widehat{F}-\mathbf{E}\widehat{F}\right|\le\delta_0\right)\ge 1-2\cdot 2^{-2l},\quad \mathbf{P}\left(\left|\widehat{I}-\mathbf{E}\widehat{I}\right|\le 2\delta_0\right)\ge 1-2\cdot 2^{-2l}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}\left(\left|\widehat{D}-D\right|\le\delta_1\right)\ge 1-4\cdot 2^{-2l}.$$

Доказательство. Неравенство Хёфдинга для сумм независимых ограниченных случайных величин (см., напр., [5, с.76]) позволяет установить соотношения (9), т. к. $\widehat{F}$ — среднее 2^{2l} случайных величин $\xi_{J_l}=\left(\widetilde{f}_{J_l}-1/2\right)^2$, $0\le\xi_{J_l}\le 1/4$, и $\widehat{I}$ можно рассматривать как среднее

$2^{2(l-1)}$ независимых случайных величин $\eta_{J_{l-1}} = \frac{1}{4} \sum_{J_l \subseteq J_{l-1}} \left(\widetilde{f}_{J_l} - \widetilde{f}_{J_{l-1}}\right)^2$, $0 \le \eta_{J_{l-1}} \le 1/4$.

Поскольку $0 \le \widehat{F} \le 1/4$ и, следовательно, $0 \le \mathbf{E}\widehat{F} \le 1/4$, то, сравнивая (5) и (8), получаем

$$\left|\widehat{D} - D\right| \le \frac{6n}{n+2}\left|\widehat{F} - \mathbf{E}\widehat{F}\right| \cdot \left|1 + \frac{6n}{n+2}\left(\widehat{F} + \mathbf{E}\widehat{F}\right)\right| + \frac{16n}{n+2}\left|\widehat{I} - \mathbf{E}\widehat{I}\right| \le$$

$$\le \frac{12n(2n+1)}{(n+2)^2}\left|\widehat{F} - \mathbf{E}\widehat{F}\right| + \frac{16n}{n+2}\left|\widehat{I} - \mathbf{E}\widehat{I}\right|.$$

Поэтому если $\left|\widehat{F} - \mathbf{E}\widehat{F}\right| \le \delta_0$ и $\left|\widehat{I} - \mathbf{E}\widehat{I}\right| \le 2\delta_0$, то $\left|\widehat{D} - D\right| \le \delta_1$, так что

$$\mathbf{P}\left(\left|\widehat{D} - D\right| \le \delta_1\right) \ge \mathbf{P}\left(\left|\widehat{F} - \mathbf{E}\widehat{F}\right| \le \delta_0, \left|\widehat{I} - \mathbf{E}\widehat{I}\right| \le 2\delta_0\right) \ge 1 - 4 \cdot 2^{-2l}.$$

Лемма доказана.

Полученные оценки позволяют построить состоятельную оценку параметра шума p. Обозначим

$$\widehat{p}_0 = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{6n}{n+2}\widehat{F} - \sqrt{\widehat{D}}\right). \tag{10}$$

Оценку $\widehat{p}_l$ неизвестного параметра шума p определим следующим образом:

$$\widehat{p}_l = \begin{cases} \widehat{p}_0, & \text{если } \widehat{D} \ge 0 \text{ и } \widehat{p}_0 \le 1/2, \\ 1/2 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

Теорема. *Оценка (11) является состоятельной оценкой параметра p, т. е. $\forall h > 0$ выполняется (2).*

Доказательство. Достаточно доказать, что при достаточно большом l

$$\mathbf{P}\left(\left|\widehat{p}_l - p\right| \le h_l\right) \ge 1 - 6 \cdot 2^{-2l},$$

где $h_l = H\sqrt{l} \cdot 2^{-\alpha\tau l}$ и константа $H = H(n, M, \tau)$ такова, что

$$h_l \ge \frac{n}{n+1}\left(\frac{6n}{n+2}\delta_0 + \frac{4n}{n-1}\left(\delta_1 + \varepsilon\right)\right).$$

Поскольку $p \le 1/2$, из (7) и (6) следует

$$D+\varepsilon=\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{6n}{n+2}\|f-1/2\|^2_{L^2(I)}\right)\left(1-\frac{n+1}{n}p\right)\right)^2 \ge \left(\frac{n-1}{4n}\right)^2.$$

Поэтому если $\left|\widehat{D}-D\right| \le \delta_1$,

$$\widehat{D} \ge D-\left|\widehat{D}-D\right| \ge \left(\frac{n-1}{4n}\right)^2-\varepsilon-\delta_1. \tag{12}$$

Следовательно, при достаточно большом l (когда правая часть в (12) неотрицательна) из соотношений $\left|\widehat{D}-D\right| \le \delta_1$ и $\left|\widehat{F}-\mathbf{E}\widehat{F}\right| \le \delta_0$ вытекает, что $\widehat{D} \ge 0$ и, в силу представлений (4) и (10),

$$\left|\widehat{p}_0-p\right| \le \frac{n}{n+1}\left(\frac{6n}{n+2}\left|\widehat{F}-\mathbf{E}\widehat{F}\right|+\frac{\left|D+\varepsilon-\widehat{D}\right|}{\sqrt{D+\varepsilon}+\sqrt{\widehat{D}}}\right) \le$$

$$\le \frac{n}{n+1}\left(\frac{6n}{n+2}\delta_0+\frac{4n}{n-1}\left(\delta_1+\varepsilon\right)\right) \le h_l$$

и, по определению $\widehat{p}_l$, $\left|\widehat{p}_l-p\right| \le \left|\widehat{p}_0-p\right|$. Таким образом,

$$\mathbf{P}\left(\left|\widehat{p}_l-p\right| \le h_l\right) \ge \mathbf{P}\left(\left|\widehat{D}-D\right| \le \delta_1, \left|\widehat{F}-\mathbf{E}\widehat{F}\right| \le \delta_0\right) \ge 1-6\cdot 2^{-2l}$$

и теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинова Е.И. О восстановлении черно-белых изображений // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение. Материалы V межгос. научн. конф. (14-18 мая 1996г.) - Мн.: Белгосуниверситет, 1996. - С.202.
2. DeVore R.A., Jawerth B., Lucier B.J. Image compression through wavelet transform coding. - IEEE Trans. on inf. Theory, V.38, № 2, 1992. - P.719-746.
3. DeVore R.A., Popov V. Interpolation of Besov spaces. - Trans. of Amer. Math. Soc., V.305, № 1, 1988. - P.397-414.
4. Donoho D.L., Johnstone I.M. Minimax estimation via wavelet shrinkage. - Technical Report No.402, Department of Statistics, Stanford University, 1992.
5. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. - М., 1972.

6. Zalesky B., Götze F. Restoration of Binary Images for Bernoullian Noise Models. - Preprint 96-020, SFB 343, University of Bielefeld, 1996.

УДК 519.624

И.Ф.Соловьева, ст. преп.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ РАСПОЛОЖЕНИЯМИ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Boundary problems with a small parameter near the highest derivative are investigated. A method reduced a boundary problem to the set of the Cauchy problems is proposed. Different locations of boundary layers are considered.

Большой круг задач, с которыми сталкиваются физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, описывается математическими моделями, в основе которых лежат о.д.у. с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом в их решении пограничными слоями. В приложениях примером таких задач могут служить задачи о переносе тепла с большими числами Пекле, о течениях Навье-Стокса с большими числами Рейнольдса, задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана и другие задачи.

Вследствие многочисленных приложений задачи с пограничным слоем вызывали и вызывают к себе повышенный интерес. Из-за наличия пограничных слоев подобные задачи обладают весьма сложным характером поведения решений и градиентов решений.

Рассмотрим систему линейных о.д.у. второго порядка

$$-\varepsilon y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=f(x), \alpha\le x\le\beta \tag{1}$$

с пограничным слоем и граничными условиями вида

$$A_1 y'(\alpha)+A_2 y(\alpha)=a \tag{2}$$

$$B_1 y'(\beta)+B_2 y(\beta)=b \tag{3}$$

в предположении, что $A(x)$, $B(x)$ - произвольные квадратные матрицы порядка $(n\times n)$, элементы которых кусочно-непрерывные функции, зависящие от x, $f:[\alpha,\beta]\to G^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 - известные квадратные матрицы порядка $(n\times n)$ такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и