2. Мухин В. В. О левоинвариантных мерах на открытых устойчивых подмножествах локально компактных метризуемых групп // Функц. анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13. Вып. 2. — С. 87-88.
3. Халмош П. Теория меры. — М.: Ил, 1953. — 291 с.
4. Харазашвили А. Б. О дифференцировании по системе Витали // Сообщ. АН ГССР. — 1976. — Т. 82, № 2. — С. 309-312.
5. Харазашвили А. Б. О точках относительной плотности // Сообщ. АН ГССР. — 1978. — Т. 90, № 2. — С. 305-308.
6. Мухин В. В. Квазиинвариантные меры на топологических полугруппах // ДАН Беларуси. — 1996. — Т. 40, № 4. — С. 5-8.
7. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970. — 320 с.

УДК 514.144.12

Н. П. Можей, ассистент

ЛОКАЛЬНО-ТРАНЗИТИВНЫЕ АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

This paper is devoted to the study of locally transitive affine and projective actions in low dimensions. We classify locally transitive subalgebras in the Lie algebra of three-dimensional affine and projective spaces. We pick those of these subalgebras that have finitely many orbits and find their decompositions into orbits. Also, a classification of finite orbit decompositions of connected affine transformation groups in space is obtained.

В конце прошлого века Софус Ли создал теорию “непрерывных групп преобразований”, из которой выросло направление, названное теперь теорией групп Ли. Понятие действия группы Ли было отправной точкой исследований Софуса Ли, которые привели к созданию теории, носящей теперь его имя. Софусом Ли была получена, в частности, классификация аналитических локальных действий групп Ли на открытых подмножествах пространств 5^n и $\&^n$ при n=1,2 (см. [1, 2]).

Темой настоящей работы является описание локально-транзитивных аффинных действий на 5^3 и проективных на $5P^3$, т. е. описание связных локально-транзитивных подгрупп группы Ли Aff(3, $5) = GL(3, 5) / 5^3$ и, соответственно, группы $SL(4, 5)$.

Описание подгрупп аффинной группы сводится к описанию локально-транзитивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}\ (3, 5) = \mathfrak{gl}\ (3, 5) / 5^3$ (с точностью до группы Aff(3, 𝟝)). Описание подгрупп группы Ли Aff(2, 𝟝) проделано, например, в [3].

Множество всех подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}$ (3, 𝟝) находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством троек ($\mathfrak{a}$, W, ω), где $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}$ (3, 𝟝), W — подпространство в $V=$ 𝟝^3, инвариантное относительно $\mathfrak{a}$, и ω: $\mathfrak{a} \rightarrow V/W$ — такое линейное отображение, что $\omega([x, y]) = x.\omega(y) - y.\omega(x)$ для всех $x, y \in \mathfrak{a}$ (см. [4]). Элементы ω есть элементы $Z^1(\mathfrak{a}, V/W)$ — пространства 1-коциклов алгебры Ли а с коэффициентами в V/W.

На множестве всех подалгебр действует группа Aff(3, 𝟝). Множество подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}$ (3, 𝟝) с точностью до этой группы находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством троек (W, $\mathfrak{a}$, ω), где $\omega \in H^1(\mathfrak{a}, V/W)$ (см. [4]).

Классифицируем подалгебры алгебры $\mathfrak{aff}$ (3, 𝟝) с точностью локального подобия следующим образом:

1. Опишем подпространства W пространства V с точностью до действия группы GL(3, 𝟝).
2. Для каждого такого подпространства W опишем все подалгебры $\mathfrak{a}$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}$ (3, 𝟝), сохраняющие W, с точностью до сопряженности относительно преобразований полной линейной группы, сохраняющих W.
3. Для каждой такой подалгебры $\mathfrak{a}$ опишем элементы пространства $H^1(\mathfrak{a}, V/W)$ с точностью до естественного действия группы всех преобразований из полной линейной группы, сохраняющих подпространство W.

Поскольку нас интересуют не все, а только локально-транзитивные подалгебры, то при классификации в каждом конкретном случае будем учитывать требование локальной транзитивности.

Получив классификацию локально-транзитивных аффинных подалгебр, изучим их орбитальные разложения. Выберем из полученных орбитальных разложений те, которые имеют конечное число орбит и не переводятся друг в друга аффинными преобразованиями. Для плоскости классификация конечных орбитальных разложений была проделана в [5].

Пусть $\{O_1, \ldots, O_p\}$ — набор орбит. Обозначим через x, y, z координаты в $\$^3$. Каждую орбиту O_i на пространстве $\$^3$ будем описывать при помощи системы соотношений вида

$$(f_{i1}(x, y, z) = 0) \wedge \ldots \wedge (f_{il}(x, y, z) = 0) \wedge$$
$$(f_{il+1}(x, y, z) > 0) \wedge \ldots \wedge (f_{ik}(x, y, z) > 0),$$

$l \le k$, $f_{i1}, \ldots, f_{ik}$ — дифференцируемые функции. Точка m пространства $\mathbb{S}^3$ принадлежит орбите O_i тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют данной системе. Орбитальное разложение для данной алгебры (группы) Ли аффинных преобразований будем записывать в виде

$$(m \in O_1) \vee (m \in O_2) \vee \ldots \vee (m \in O_p).$$

Теорема. *Связная группа Ли аффинных преобразований, действующая на аффинном пространстве* $\mathbb{S}^3$ *с конечным числом орбит, имеет одно из следующих аффинно неизоморфных орбитальных разложений:*

1. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$

2. $(z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = y = 0 \vee x^2 + y^2 \neq 0)$

3. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$

4. $(x = 0 \vee x> 0 \vee x< 0) \wedge y = z = 0 \vee (y > 0 \vee y< 0) \wedge z = 0 \vee (2zx = y^2 \vee 2zx < y^2 \vee 2zx > y^2) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$

5. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0)$

6. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y< 0) \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (z > 0 \vee z < 0)$

7. $y = z = 0 \wedge (x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \vee (y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z > 0 \vee z < 0) \vee (y > 0 \vee y < 0) \wedge z = 0$

8. $(x = 0, z = y = 0) \vee (yz = x^2, y > 0, z > 0) \vee (yz = x^2, y < 0, z < 0) \vee (yz > x^2, y > 0, z > 0) \vee (yz > x^2, y < 0, z < 0) \vee (yz < x^2)$

9. $(x = y = z = 0) \vee (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$

10. $(x = y = z = 0) \vee z > 0 \vee z < 0 \vee (z = 0, x^2 + y^2 \neq 0)$

11. $(x = y = z = 0) \vee (x > 0, y = z = 0) \vee (x < 0, y = z = 0) \vee (y^2 + z^2 \neq 0)$

12. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0) \wedge (x = yz \vee x < yz \vee x > yz)$

13. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0)$

14. $(x = 0 \vee x > 0 \vee x < 0) \wedge z = 0 \vee (z > 0 \vee z < 0)$

15. $z = 0 \vee z > 0 \vee z < 0$

16. $(y = 0 \vee y > 0 \vee y < 0) \wedge (x = z^2 \vee x > z^2 \vee x < z^2)$

17. $z = 0 \wedge (x = y^2 \vee x > y^2 \vee x < y^2) \vee (z > 0 \vee z < 0)$

18. $x = yz \vee x > yz \vee x < yz$

19. $x = y^2 + z^2 \vee x < y^2 + z^2 \vee x > y^2 + z^2$

20. $(x = y = 0) \vee (x^2 + y^2 \neq 0)$

21. $y = z^2 \vee y < z^2 \vee y > z^2$

22. $(x = yz - z^3/3) \vee (x < yz - z^3/3) \vee (x > yz - z^3/3)$

23. Все пространство $\mathbb{R}^3$ — одна орбита.

Описание связных локально-транзитивных подгрупп проективной группы преобразований трехмерного пространства сводится к описанию локально-транзитивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ (с точностью до сопряженности). Классификация локально-транзитивных подалгебр алгебры $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, имеющих трехмерное инвариантное подпространство, с точностью до подгруппы $\mathrm{Aff}(3, \mathbb{R})$ равносильна классификации аффинных подалгебр, которая была проделана ранее. Следовательно, чтобы классифицировать подалгебры в $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$, сохраняющие трехмерное инвариантное подпространство, достаточно выбрать из подалгебр, соответствующих аффинным, не сопряженные в группе проективных преобразований.

Далее проводится классификация подалгебр, которые не сводятся к подалгебрам аффинной алгебры, т. е. не имеют трехмерных инвариантных подпространств (это означает, что подалгебра либо неразрешима, либо является вещественной формой разрешимой подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства над полем $\mathbb{C}$). Классификация неразрешимых подалгебр производится следующим образом: каждая неразрешимая подалгебра $\mathfrak{g}$ содержит полупростую подалгебру Леви $\mathfrak{a}$ (все полупростые подалгебры классифицированы); алгебра $\mathfrak{sl}(4, \mathbb{R})$ является $\mathfrak{a}$-модулем (относительно присоединенного представления) и разлагается в прямую сумму изотипных компонент; тогда $\mathfrak{g}$ является прямой суммой своих пересечений с изотипными компонентами. Таким образом, чтобы найти g, находим все подмодули каждой изотипной компоненты, составляем их суммы и проверяем, является ли полученное пространство алгеброй Ли. Чтобы классифицировать разрешимые подалгебры, проверяем для каждой найденной ранее подалгебры, имеющей трехмерные инвариантные подпространства, содержит ли их ее вещественная форма. Это завершает классификацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lie S., Engel F. Theorie der Transformationsgruppen. - Leipzig: Teubner, 1893.
2. Чеботатев Н.Г. Теория групп Ли. - М-Л.: Гостехиздат, 1940.
3. Koch R.M., Lowenthal F. On generating subgroups of the affine group in the plane by pairs of infinitesimal transformations. Rocky Mountain J. Math., vol. 6, № 1, 1976. - P. 119-131.
4. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry. - Topology and geometry of submanifolds. River Edge: World Sci., vol. 8, 1996. - P. 212-223.
5. Пясецкий В.С. Конечные орбитальные разложения групп аффинных преобразований плоскости.- Вопросы теории групп и гомологической алгебры. - Ярославль: ЯГУ, 1988. - С. 155-157.

УДК 519.24

Е. И. Блинова, ассистент

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА ШУМА В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОЛУТОНОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

The paper is devoted to a statistical filtering problem that arises when gray scale images are to be denoised. The images are interpreted as functions on the unit square. We assume these functions to be in the Besov space. In this paper, we estimate the unknown noise parameter.

В последние годы проблемы анализа и обработки компьютерных изображений привлекают все большее внимание исследователей как в силу практической ценности задачи, так и благодаря ее теоретической значимости.

Под изображением понимается функция, определенная на целочисленной решетке размера $2^l \times 2^l$ и принимающая целые значения между 0 и n (l и n — известные натуральные числа). Задача восстановления изображения, наблюдаемого с шумом, — это, фактически,