УДК 519.53

В. В. Мухин, профессор

ПЛОТНОСТНЫЕ ТОПОЛОГИИ В ПОЛУГРУППАХ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

The paper deals with constructing topologies by using measures. The topologies constructed are investigated and applied to the problems of theory of semigroups with invariant measure.

Важную роль в теории меры играют системы, позволяющие находить плотности одной меры относительно другой (системы Витали, например). Подобные системы порождают некоторые топологии [1], которые связаны со структурой меры, со строением измеримых множеств.

В работе рассматриваются обобщения таких топологий, в том числе для полугрупп с инвариантной мерой. По аналогии с [1] их мы будем называть плотностными топологиями. Интерес к их рассмотрению, в частности, обусловлен теоремой 7, в которой с помощью плотностных систем устанавливается строение топологических полугрупп с инвариантной мерой. Подобная задача решалась в [2].

Тройку $(X,\mathbf{A},\mu)$, где X — множество, $\mathbf{A}$ — σ-кольцо его подмножеств и μ — σ-аддитивная неотрицательная мера на X, называют пространством с мерой. Относительно меры мы будем придерживаться терминологии из [3]. Мы считаем, что μ — полная мера; т.е., что каждое подмножество множества нулевой меры принадлежит семейству $\mathbf{A}$. Подмножество множества X назовем измеримым, если пересечение его с любым множеством из $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{A}$. Множества из $\mathbf{A}$ конечной меры называем интегрируемыми множествами. Измеримое множество нулевой меры называем также пренебрежимым множеством. Измеримое множество назовем локально пренебрежимым, если его пересечение с любым интегрируемым множеством пренебрежимо.

Пусть $(X,\mathbf{A},\mu)$ — пространство с мерой. Пусть $X=\cup\{A|A\in\mathbf{A}\}$ и каждой точке x из X поставлен в соответствие базис фильтра $\mathfrak{R}(x)$, состоящий из измеримых множеств конечной положительной меры. Систему $(\mathfrak{R}(x))_{x\in X}$ будем называть плотностной системой. Пусть $A\subset X$ и $x\in X$. Базис фильтра $\mathfrak{R}(x)$ фильтруется по отношению $\subset$, следовательно, можно рассматривать фильтр сечений $\mathfrak{R}(x)$. Нетрудно показать, что отображение

$$V\to\sup\{\ \mu^*(A\cap O)\ /\ \mu^*(\ O\ )\mid O\in\mathfrak{R}(x),\ O\subset V\}\ \ (V\in\mathfrak{R}(x)\ ),$$

где μ^* — внешняя мера, индуцированная мерой μ, имеет предел по фильтру сечений $\Re(x)$. Этот предел будем называть верхней плотностью множества A в точке x и будем обозначать через $D^*(A,x)$.

Аналогично, рассматривая отображение

$$V \to \inf\{ \mu^*(A \cap O) / \mu^*(O) \mid O \in \Re(x), O \subset V \} \quad (V \in \Re(x)),$$

определим нижнюю плотность $D_*(A,x)$ множества A в точке x как предел этого отображения по фильтру сечений $\Re(x)$. Если $D^*(A,x)=D_*(A,x)$, то их общее значение будем обозначать через $D(A,x)$ и называть плотностью множества A в точке x. Точку x называют точкой плотности (соотв. разряжения) множества A, если $D(A,x)=1$ (соотв. $D(A,x)=0$) [1].

Для любого $A \subset X$ и любой точки x из X имеем

$$0 \le D_* (A,x) \le D^* (A,x) \le 1. \tag{1}$$

Заметим, что если x — точка плотности множества B и $B \subset A$, то x является точкой плотности и множества A.

Лемма 1. *Для любого множества $A \subset X$ соотношение $D(A,x)=0$ влечет $D(X \setminus A,x)=1$. Если A измеримо, то эти соотношения равносильны.*

Доказательство. Для любого множества O конечной положительной меры из полуаддитивности внешней меры μ^* вытекает неравенство

$$1 = \frac{\mu^*(X \cap O)}{\mu(O)} \le \frac{\mu^*(A \cap O)}{\mu(O)} + \frac{\mu^*((X \setminus A) \cap O)}{\mu(O)}. \tag{2}$$

Поэтому, если $D(A,x)=0$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует множество $V \in \Re(x)$ такое, что для всех $O \in \Re(x)$, содержащихся в V, имеет место неравенство $\mu^*(A \cap O) / \mu(O) \le \varepsilon$. Отсюда $\mu^*((X \setminus A) \cap O) / \mu(O) \ge 1 - \varepsilon$. В силу произвольности ε получаем, что $D_*(X \setminus A,x)=1$, т.е. $D(X \setminus A,x)=1$.

Если же A измеримо, то равенство, в которое превращается неравенство (2), влечет справедливость последнего утверждения леммы.

Теорема 2. *Множество*

$$\tau_P = \{U \subset X \mid \forall x \in U, D(X \setminus U, x) = 0\}$$

является топологией на X.

Доказательство. Очевидно, что пустое множество и все X принадлежат τ_P. Пусть $U_\alpha \in \tau_P$ для всякого $\alpha \in A$ и пусть $x \in U = \cup\{U_\alpha | \alpha \in A\}$. Тогда для некоторого $\alpha \in A$ имеем $x \in U_\alpha$. Из очевидного соотношения $D^*(X \backslash U, x) \leq D^*(X \backslash U_\alpha, x) = 0$ и соотношения (1) вытекает, что плотность $D^*(X \backslash U, x)$ существует и равна нулю. Следовательно, $U \in \tau_P$.

Пусть U_1 и U_2 из τ_P и $x \in U = U_1 \cap U_2$. Имеем $D^*(X \backslash U_1, x) = 0$ и $D^*(X \backslash U_2, x) = 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $V_1 \in \Re(x)$, что для всех $O \subset V_1$, $O \in \Re(x)$ выполняется неравенство

$$\mu^*((X \setminus U_1) \cap O) / \mu(O) < \varepsilon;$$

и аналогично существует $V_2 \in \Re(x)$ такое, что для всех $O \subset V_2$, $O \in \Re(x)$ выполняется неравенство

$$\mu^*((X \setminus U_2) \cap O) / \mu(O) < \varepsilon.$$

Так как $\Re(x)$ — базис фильтра, то найдется V_3 из $\Re(x)$, лежащее в пересечении V_1 и V_2. Значит, для всех O из $\Re(x)$, которые лежат в V_3, выполняется соотношение

$$\mu^*((X \setminus (U_1 \cap U_2)) \cap O) / \mu(O) \leq \mu^*((X \setminus U_1) \cap O) / \mu(O) +$$
$$+ \mu^*((X \setminus U_2) \cap O) / \mu(O) \leq 2\varepsilon .$$

Из него вытекает, что плотность $D(X \backslash (U_1 \cap U_2), x)$ существует и равна нулю. Следовательно, $U_1 \cap U_2 \in \tau_P$, т.е. семейство τ_P является топологией на X. Теорема доказана.

По аналогии с [1] топологию τ_P будем называть плотностной топологией. Далее будем предполагать, что каждое одноточечное подмножество X измеримо и имеет меру нуль, а $\mu \neq 0$.

Нам потребуются следующие свойства:

(m) *множество точек разряжения любого интегрируемого множества, принадлежащих ему, имеет меру нуль;*

(n) *почти все точки любого интегрируемого множества являются точками плотности для него.*

Множество $C \in \mathbf{A}$ называют измеримой оболочкой множества $A \subset X$, если $A \subset C$ и любое множество $F \in \mathbf{A}$, содержащееся в $C \backslash A$, имеет меру нуль.

Теорема 3. *При предположениях, сделанных выше, справедливы следующие утверждения:*

А) *топология* τ_P *не имеет изолированных точек;*

Б) (X, τ_P) *является* T_0*-пространством;*

В) *если выполнено условие* (m), *то каждое открытое подмножество топологического пространства* (X,τ_P) — μ*-измеримо;*

Г) *если выполнено условие* (n), *то для любого измеримого множества* $E\subset X$ *его внутренность в топологии* τ_P *есть множество всех точек плотности* E, *принадлежащих* E, *и множество* E *локально пренебрежимо тогда и только тогда, когда оно замкнуто и дискретно в топологии* τ_P.

Доказательство. Так как мера одноточечного множества в X равна нулю, то $\mu((X\setminus\{x\})\cap O)=\mu(O)$ для любого интегрируемого множества O. Отсюда следует, что $\{x\}\notin\tau_P$, т.е. утверждение А) справедливо.

Так как $D^*(\{x\},y)=0$ для любых $x,y\in X$, то $X\setminus\{x\}\in\tau_P$. Следовательно, (X,τ_P) — T_0-пространство.

Пусть выполнено условие (m). Заметим сначала, что если множество $A\subset X$ обладает измеримой оболочкой C, то для всякого измеримого множества O конечной меры выполняется равенство $\mu^*(A\cap O)=\mu(C\cap O)$. Следовательно, $D^*(A,x)=D^*(C,x)$ и $D_*(A,x)=D_*(C,x)$ для любого x из X.

Пусть $U\in\tau_P$ и пусть E — интегрируемое множество. Так как $E\setminus U$ имеет конечную внешнюю меру, то оно обладает измеримой оболочкой C [3]. Для всякого $x\in U$ имеем

$$0 \le D^*(C,x) = D^*(E\setminus U,x) \le D^*(X\setminus U,x) = 0.$$

Следовательно, $D^*(C,x)=0$ для каждого $x\in U$. Так как C — интегрируемое множество, то в силу (m) $\mu(C\cap U)=0$, и поэтому $E\cap U\in\mathsf{A}$, так как $E\cap U=(E\setminus C)\cup(C\cap U\cap E)$. Следовательно, множество U измеримо, т.е. утверждение В) доказано.

Пусть выполнено условие (n). Ясно, что условие (m) следует из (n). Пусть E — непустое измеримое подмножество X и $H=\{x\in E | D(E,x)=1\}$. Из условия (n) следует, что для любого интегрируемого множества C множество $(E\setminus H)\cap C$ имеет меру нуль. Значит, множество $(E\cap C)\setminus H=(E\setminus H)\cap C$ имеет меру нуль. Следовательно, H измеримо и соотношение $D(E,x)=1$ влечет $D(H,x)=1$. В силу леммы 1 имеем $D(X\setminus H,x)=0$ для каждого $x\in H$. Следовательно, $H\in\tau_P$. Пусть x — внутренняя точка множества E в топологии τ_P, т.е. для некоторого

$U\in\tau_P$ имеем $x\in U\subset E$. Тогда $0=D(X\setminus U,x)\geq D^*(X\setminus E,x)$. Поэтому $D(X\setminus E,x)=0$ и $x\in H$, т.е. внутренность E в точности равна H.

Пусть множество E — локально пренебрежимо. Тогда $D(E,x)=0$ для каждого $x\in X$. Следовательно, $X\setminus E\in\tau_P$, а значит, E замкнуто. Так как $D((X\setminus E)\cup\{x\},x)=1$, то в силу утверждения B) внутренность множества $(X\setminus E)\cup\{x\}$ содержит точку x и пересечение этой внутренности с E либо состоит из единственной точки x, либо пусто. Следовательно, x не предельная точка для E, и поэтому E дискретно.

Пусть теперь E — замкнутое дискретное множество. В силу (m) оно измеримо. Пусть U — открытая окрестность точки x, содержащая конечное число точек из E. Тогда $X\setminus U$ содержит E с точностью до множества меры нуль. Поэтому $D^*(E,x)=D(X\setminus U,x)=0$ для любого $x\in X$, ибо $U\in\tau_P$. Пусть A — интегрируемое множество. Так как почти все точки $E\cap A$ являются точками плотности для него, то оно имеет меру нуль. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (n). Тогда для того, чтобы множество $E\subset X$ было нигде не плотным в топологии τ_P, необходимо и достаточно, чтобы оно было локально пренебрежимым.*

Доказательство. Пусть E — нигде не плотно. Тогда его замыкание $[E]$ нигде не плотно, измеримо и внутренность $[E]$ пуста. По теореме 3 она равна $\{x\in[E]\,|\,D([E],x)=1\}$. Следовательно, для любого интегрируемого множества A и каждой точки $x\in A\cap[E]$ имеем $D_*(A\cap[E],x)\leq D_*([E],x)<1$. По условию (n) $\mu(A\cap[E])=0$ и значит, множество $[E]$ локально пренебрежимо. Так как мера μ полна, то E локально пренебрежимо.

Пусть E — локально пренебрежимо. Тогда по теореме 3 E замкнуто и не имеет внутренних точек, т.е. E нигде не плотно. Теорема доказана.

При выполнении условия (n) справедливы следующие следствия.

Следствие 1. *Множество E является множеством первой категории тогда и только тогда, когда оно локально пренебрежимо.*

Это следует из того, что совокупность локально пренебрежимых множеств образует σ-идеал в алгебре множеств.

Следствие 2. *Каждое множество первой категории является нигде не плотным подмножеством топологического пространства (X,τ_P).*

Следствие 3. (X,τ_P) — *бэровское топологическое пространство, т.е. каждое не пустое открытое множество является множеством второй категории.*

Следствие 4. *Каждое открытое множество топологического пространства (X,τ_P) содержит подмножество положительной меры.*

Напомним, что открытое множество топологического пространства называется регулярным, если оно совпадает с внутренностью своего замыкания. Далее всюду внутренность множества E топологического пространства будем обозначать, если не оговорено противное, через $int\,E$.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие (п). Тогда σ-алгебра измеримых подмножеств X совпадает с совокупностью всех подмножеств топологического пространства (X,τ_P), обладающих свойством Бэра, и множество $U\in\tau_P$ регулярно тогда и только тогда, когда U совпадает с множеством всех точек плотности множества U.*

Доказательство. Пусть E — измеримое множество и $P=E\setminus intE$. Множество P измеримо как разность двух измеримых множеств и из теоремы 3 вытекает, что P является множеством всех точек из E, которые не являются точками плотности для E. Рассмотрим $A\cap P$, где A — интегрируемое множество. Для всякого $x\in P$ имеем $D_*(A\cap P,x)\leq D_*(E\cap P,x)<1$. Следовательно, в силу (n) $\mu(A\cap P)=0$, т.е. множество P локально пренебрежимо и, значит, является множеством первой категории. Итак, каждое измеримое подмножество X обладает свойством Бэра.

Пусть теперь $E=U\Delta P$, где $U\in\tau_P$, а P — множество первой категории. Из теорем 3 и 4 следует, что E измеримо. Значит, первое утверждение теоремы доказано.

Если множество U регулярно, то по теореме 3 оно измеримо и по только что доказанному $X\setminus U=(int(X\setminus U))\cup P$, где P — локально пренебрежимое множество. Значит, $[U]\subset U\cup P$. Так как $D_*(U,x)\leq D_*([U],x)=D_*(U\cup P,x)$ для любой точки x из X, то $D_*([U],x)=1$, если $D_*(U,x)=1$. Так как U — регулярное открытое множество, то $x\in U=int[U]$. Итак, U совпадает с множеством всех точек плотности множества U.

Обратно. Если U совпадает с множеством всех своих точек плотности, то по теореме 3 множество U открыто и измеримо. Тогда $[U]\subset U\cup P$, где P — локально пренебрежимое множество, и поэтому, если $x\in int\,[U]$, то $D_*([U],x)=1$ и, значит, $D_*(U,x)=1$. Отсюда $x\in U$. Следовательно, внутренность замыкания множества U совпадает с U. Теорема доказана.

Через $\mathbf{M}$ мы обозначаем совокупность всех измеримых подмножеств X. Пусть $\mathbf{N}$ — семейство всех локально пренебрежимых подмножеств X. Для любого измеримого множества A обозначим через $\varphi(A)$ множество всех точек плотности A. Будем писать $A\sim B$, если $A\Delta B\in\mathbf{N}$.

Теорема 6. *Если выполнено условие* (n), *то* φ *является отображением* $\mathbf{M}$ *в* τ_P. *Оно обладает следующими свойствами:*

1) $\varphi(A)\sim A$;

2) *если* $A\sim B$, *то* $\varphi(A)\sim\varphi(B)$;

3) $\varphi(\varnothing)=\varnothing$;

4) $\varphi(A\cap B)=\varphi(A)\cap\varphi(B)$;

5) *если* $A\subset B$, *то* $\varphi(A)\subset\varphi(B)$.

Кроме того, $\tau_P = \{ \varphi(A) \setminus N \mid A\in\mathbf{M}, N\in\mathbf{N}. \}$.

Доказательство. Из уже доказанного нетрудно вывести, что φ: $\mathbf{M}\to\tau_P$, а также справедливость свойств 1), 2), 3) и 5).

Пусть A и B — измеримые множества и x — точка плотности множества $A\cap B$. Тогда x является точкой плотности и A и B, т.е. $\varphi(A\cap B)\subset\varphi(A)\cap\varphi(B)$. С другой стороны, если x — точка плотности как для A, так и для B, то для любого $\varepsilon>0$ существует $V\in\mathfrak{R}(x)$ такое, что для всех $O\in\mathfrak{R}(x)$ таких, что $O\subset V$ выполняются неравенства

$$\mu(A\cap O) / \mu(O) > 1-\varepsilon \quad \text{и} \quad \mu(B\cap O) / \mu(O) > 1-\varepsilon$$

(напомним, что A и B — измеримые множества). Тогда

$$\mu((A\cap B)\cap O) / \mu(O) > 1 - 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что x — точка плотности $A\cap B$. Следовательно, свойство 4) выполнено.

Далее, с учетом теорем 3 и 4 замечаем, что

$$\tau_P\supset \{ \varphi(A) \setminus N \mid A\in\mathbf{M}, N\in\mathbf{N} \}.$$

С другой стороны, если $U\in\tau_P$, то U измеримо и поэтому $\varphi(U)\supset U$ и $\varphi(U)\sim U$. Следовательно, $U=\varphi(U)\setminus(\varphi(U)\setminus U)$ и множество $\varphi(U)\setminus U$ локально пренебрежимо. Отсюда

$$\tau_P = \{ \varphi(A) \setminus N \mid A\in\mathbf{M}, N\in\mathbf{N} \}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в определении плотностной системы базис $\Re(x)$ не связан с точкой x. В частности, точка x может не принадлежать ни одному множеству O из $\Re(x)$. Неявно связь устанавливается при требовании выполнения условий (m) или (n). Отметим, что в конкретных ситуациях базисы $\Re(x)$ плотностных систем выбираются разумным образом, согласованные с мерой и с точкой x и с другими структурами на множестве X, если таковые имеются. С плотностными системами, удовлетворяющими условию (n), связаны системы Витали [4]-[5].

При рассмотрении плотностных систем, согласованных с инвариантной мерой и с алгебраической операцией на полугруппах, появляются новые интересные свойства, как плотностной топологии, так и инвариантной меры.

Теорема 7. *Пусть X — локально компактная топологическая полугруппа и λ — ненулевая внутренне регулярная левоинвариантная на X борелевская мера, такая, что $\lambda(Ky)>0$ для любого $y\in X$ и любого компактного множества K ненулевой меры. Если для любых двух компактных непересекающихся подмножеств C_1 и C_2 положительной меры существует плотностная система $(\Re(x))_{x\in X}$ такая, что базисы фильтров $\Re(yx)$ и $y\Re(x)=\{yC|C\in\Re(x)\}$ имеют одинаковые окончания, и как C_1, так и C_2 обладают точками плотности относительно этой плотностной системы, то существование на X внутренне регулярной левоинвариантной борелевской меры μ, не пропорциональной λ, влечет возможность разбиения X на два левых идеала полугруппы X.*

Доказательство. Из теоремы 1 из [6] вытекает, что мера μ абсолютно непрерывна относительно λ. Следовательно, существует локально интегрируемая относительно меры λ числовая функция $f(x)\geq 0$, определенная на X, такая, что $\mu=f\lambda$. Так как λ и μ не пропорциональны, то существует такое $a>0$, что множества $X_1=f^{-1}((-\infty,a))$ и $X_2=X\setminus X_1$ λ-измеримы и не λ-локально пренебрежимы. В силу левоинвариантности мер λ и μ и способа построения множеств X_1 и X_2 для любого $x\in X$ и любых λ-интегрируемых множеств $C_1\subset X_1$ и $C_2\subset X_2$ имеем $\lambda(xC_1\setminus X_1)=0$ и $\lambda(xC_2\setminus X_2)=0$.

Так как X_1 и X_2 не λ-локально пренебрежимы и λ-измеримы, то существуют компактные множества C_1 и C_2 такие, что $C_1\subset X_1$, $C_2\subset X_2$, $\lambda(C_1)>0$ и $\lambda(C_2)>0$.

Пусть плотностная система $(\Re(x))_{x\in X}$ удовлетворяет требованиям теоремы для выбранных множеств C_1 и C_2.

Пусть I_1 — множество всех точек из X, которые являются точками плотности множества X_1 относительно плотностной системы $(\mathfrak{R}(x))_{x\in X}$, и пусть $I_2 = X\backslash I_1$. В силу сказанного выше, I_1 не пусто, а с учетом леммы 1, I_2 также не пусто.

Покажем, что I_1 и I_2 — левые идеалы полугруппы X.

Пусть $x\in I_1$ и $z\in X$. Тогда для $V\in\mathfrak{R}(x)$ имеем

$$\lambda(X_1\cap V) = \lambda(z(X_1\cap V)) \le \lambda(zX_1\cap zV) \le \lambda(X_1\cap zV).$$

Так как базисы $z\mathfrak{R}(x)$ и $\mathfrak{R}(zx)$ имеют одинаковые окончания, то zx является точкой плотности для X_1. Следовательно, $zx\in I_1$, т.е. I_1 — левый идеал полугруппы X. Если же $x\in I_2$ и $z\in X$ такие, что $zx\in I_1$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует такое множество $V\in\mathfrak{R}(zx)$, что $\lambda(X_1\cap O(zx))\ge(1-\varepsilon)\lambda(O(zx))$ для всех $O(zx)\in\mathfrak{R}(zx)$, содержащихся в V. Так как базисы фильтров $\mathfrak{R}(zx)$ и $z\mathfrak{R}(x)$ имеют одинаковые окончания, то мы можем считать, что $O(zx)=zO(x)$, где $O(x)\in\mathfrak{R}(x)$. Поэтому

$$\lambda(X_1\cap O(x)) = \lambda(O(x)) - \lambda(X_2\cap O(x)) = \lambda(O(x)) - \lambda(X_2\cap (X_2\cap O(x))) =$$

$$= \lambda(O(x)) - \lambda(X_2\cap zX_2\cap z\, O(x)) \ge \lambda(O(x)) - \lambda(X_2\cap O(zx)) =$$

$$=\lambda(O(x)\cap Oz(x)) \ge (1-\varepsilon)\lambda(O(zx)) = (1-\varepsilon)\lambda(O(x)).$$

Отсюда следует, что $x\in I_1$. Полученное противоречие показывает, что $zx\in I_2$, т.е. I_2 — левый идеал полугруппы X . Теорема доказана

Замечание. Требования на плотностную систему $(\mathfrak{R}(x))_{x\in X}$, предъявляемые в теореме 7, могут показаться слишком обременительными. Однако если X — открытое устойчивое подмножество локально компактной группы G, внутренность которого в G не пуста, а λ — сужение левой меры Хаара ν группы G на X, то мы покажем, что на X существует плотностная система, удовлетворяющая требованиям теоремы.

Пусть C_1 и C_2 — непересекающиеся компактные подмножества X положительной меры. Из $\int_G \nu(C_1\cap sC_2)d\nu(s)=\nu(C_1)\nu(C_2^{-1})$ ([7, стр. 145]) и неравенств $\nu(C_1)>0$, $\nu(C_2^{-1})>0$ вытекает, что множество $C=C_1\cap sC_2$ не пренебрежимо для некоторого $s\in G$. Отсюда и из компактности множества C вытекает существование точки $x\in C$ такой, что $\lambda(C\cap V)>0$ для любой открытой окрестности V точки x. Пусть $\{W\}$ — фундаментальная система открытых относительно компактных окрестностей нейтрального элемента e группы G. В силу регулярности ν для всякого $W\in\{W\}$ найдется компактное множество $F\subset(xW\setminus C)$ такое, что $\nu((xW\setminus C)\setminus F)<(\nu(xW\cap C))^2$. Тогда семейство $\{V\}$ множеств $V=x^{-1}(xW\setminus F)$ таково, что для плотностной системы $\Re(y)=\{yV\cap X\}$ $(y\in X)$ точка x является точкой плотности для C, а следовательно, и для множества C_1. Если $y=s^{-1}x$, то $y\in C_2$ и для любого $V\in\{V\}$ имеем

$$\lambda(C_2\cap yU)=\lambda(C_2\cap s^{-1}x\,U)=\lambda(sC_2\cap xU)\geq\lambda(C_2\cap xU).$$

Следовательно, y является точкой плотности множества C_2.

Заметим, что построенная система $(\Re(x))_{x\in X}$ такова, что базисы фильтра $\Re(yx)$ и $y\Re(x)$ имеют одинаковые окончания, т.е. мера ν и построенная плотностная система удовлетворяют требованиям теоремы 7.

Пусть (X,A,μ) — пространство с мерой и $\{s\}$ — семейство отображений X в себя. Если для любого s из $\{s\}$ и любого $x\in X$ базисы фильтра $\Re(sx)$ и $s\Re(x)=\{s(O)|O\in\Re(x)\}$ имеют одинаковые окончания, то такую плотностную систему $(\Re(x))_{x\in X}$ будем называть инвариантной плотностной системой относительно $\{s\}$.

Теорема 8. *Если $(\Re(x))_{x\in X}$ — инвариантная плотностная система относительно семейства $\{s\}$ такого, что мера μ инвариантна относительно каждого отображения s из $\{s\}$, то каждое s из $\{s\}$ является открытым отображением для плотностной топологии τ_P на X.*

Доказательство. Пусть $U\in\tau_P$ и $y\in s(U)$, где $s\in\{s\}$. Так как $s(O)\cap(X\setminus s(U))\subset s(O\cap(X\setminus U))$ для любого $O\in\Re(x)$ и внешняя мера μ^* инвариантна относительно каждого s, то y является точкой разряжения для $X\setminus s(U)$. Следовательно, $s(U)\in\tau_P$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть X — полугруппа и пусть плотностная система $(\Re(x))_{x\in X}$ инвариантна относительно семейства левых сдвигов полугруппы X. Если мера μ левоинвариантна на X, то левые сдвиги в X являются открытыми отображениями в плотностной топологии на X. Если, кроме того, X — группа, то левые сдвиги являются гомеоморфизмами для плотностной топологии на X.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin N. F. G. A topology for certain measure space // Trans. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 112. — P. 1-18.

2. Мухин В. В. О левоинвариантных мерах на открытых устойчивых подмножествах локально компактных метризуемых групп // Функц. анализ и его приложения. — 1979. — Т. 13. Вып. 2. — С. 87-88.
3. Халмош П. Теория меры. — М.: Ил, 1953. — 291 с.
4. Харазашвили А. Б. О дифференцировании по системе Витали // Сообщ. АН ГССР. — 1976. — Т. 82, № 2. — С. 309-312.
5. Харазашвили А. Б. О точках относительной плотности // Сообщ. АН ГССР. — 1978. — Т. 90, № 2. — С. 305-308.
6. Мухин В. В. Квазиинвариантные меры на топологических полугруппах // ДАН Беларуси. — 1996. — Т. 40, № 4. — С. 5-8.
7. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. — М.: Наука, 1970. — 320 с.

УДК 514.144.12

Н. П. Можей, ассистент

ЛОКАЛЬНО-ТРАНЗИТИВНЫЕ АФФИННЫЕ И ПРОЕКТИВНЫЕ ДЕЙСТВИЯ В МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ

This paper is devoted to the study of locally transitive affine and projective actions in low dimensions. We classify locally transitive subalgebras in the Lie algebra of three-dimensional affine and projective spaces. We pick those of these subalgebras that have finitely many orbits and find their decompositions into orbits. Also, a classification of finite orbit decompositions of connected affine transformation groups in space is obtained.

В конце прошлого века Софус Ли создал теорию “непрерывных групп преобразований”, из которой выросло направление, названное теперь теорией групп Ли. Понятие действия группы Ли было отправной точкой исследований Софуса Ли, которые привели к созданию теории, носящей теперь его имя. Софусом Ли была получена, в частности, классификация аналитических локальных действий групп Ли на открытых подмножествах пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ при n=1,2 (см. [1, 2]).

Темой настоящей работы является описание локально-транзитивных аффинных действий на $\mathbb{R}^3$ и проективных на $\mathbb{R}P^3$, т. е. описание связных локально-транзитивных подгрупп группы Ли Aff(3, $\mathbb{R}$) = $GL(3, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^3$ и, соответственно, группы $SL(4, \mathbb{R})$.

Описание подгрупп аффинной группы сводится к описанию локально-транзитивных подалгебр алгебры Ли $\mathfrak{aff}(3, \mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) / \mathbb{R}^3$ (с