

где $K1 = \omega_0^2(1 + m \cdot \cos 2 \tau) \sin \tau$, $K2 = 2\omega_0 \cos \tau$.

В момент времени $t = 0$ амплитуда определяется шумом Найквиста:

$$a(0) = \sqrt{4kTR\Delta f},$$

где Δf – ширина полосы пропускания сигнала, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура, R – общее сопротивление контура.

Разработанный автодинный генератор обеспечивает повышенную точность измерений в сравнении с классическими схемами автодинов, которые работают на усилителях с положительной обратной связью, за счет повышения помехоустойчивости.

Предложенная модель генератора имеет параметрическую обратную связь с частотой накачки равной удвоенной частоте сигнала, которая необратимо приводит к повышению соотношения полезного сигнала к шумовой составляющей.

Применение подобных анализаторов ЯМР с параметрическим автодинным детектором позволяет определять качественные характеристики различных веществ с высокой точностью, быстродействием получения результата, отсутствием необходимости предварительной подготовки анализируемого образца.

Всё это дает возможность использования подобных систем неразрушающего анализа состава вещества для построения непрерывных систем автоматического контроля и регулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анкуда, М. А. ЯМР-спектрометр неразрушающего анализа состава вещества / М. А. Анкуда // Труды БГТУ. Сер. В.И., Физико-математические науки и информатика. – Минск : БГТУ, 2010. – Вып. XVIII. – С. 121-124.

2. Анкуда, М. А. Модель автодина с параметрическим возбуждением / М. А. Анкуда, И. О. Оробей // Труды БГТУ. – Минск: БГТУ, 2016. – № 6 (188) 2016 год. – С. 127-131.

УДК 62-52621.923

А.А. Лялько, ст. преп. (БГТУ, г. Минск)

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Моделирование сложных, содержащих сотни тысяч уравнений моделей даже на супер-ЭВМ – непростая задача. Один из основных способов сокращения размерностей системы и времени моделирования сложных систем – «упрощение», т. е. пренебрежение какими-то

не основными свойствами. Многие методы и подходы реализованы в инженерной системе Matlab.

Один из таких методов реализован в функции `modred`. Синтаксис этой функции имеет следующий вид:

```
rsys=modred(sys, elim); rsys=modred(sys, elim, 'mdc');
rsys=modred(sys, elim, 'del')
```

Функция `modred` понижает порядок непрерывной или дискретной линейной модели, представленной в пространстве состояний. Эта функция обычно используется совместно с функцией построения сбалансированной реализации `balreal`.

Функция `rsys=modred (sys,elim)` и `rsys=modred(sys,elim,'mdc')` выполняют понижение порядка системы `rsys` при выполнении условия сохранения значения коэффициента передачи. Величина `elim` определяет номера переменных вектора состояния, которые должны быть удалены. Результирующая модель `rsys` имеет число переменных состояния на `length(elim)` меньше, чем исходная. Этот метод заключается в приравнивании производных удаляемых переменных состояния нулю и решении системы уравнений для определения их установившихся значений.

Функция `rsys=modred(sys,elim,'del')` просто удаляет переменные состояния, определяемые вектором `elim`. Этот способ не гарантирует сохранение значения коэффициента передачи, но более точно аппроксимирует переходные процессы в модели.

Если модель системы в пространстве `sys` сбалансирована с помощью функции `balreal` и ее матрицы имеют малые диагональные элементы, можно понизить порядок модели путем удаления соответствующих переменных состояния, применив функцию `modred`.

Алгоритм, обеспечивающий совпадение коэффициента передачи, реализован следующим образом.

Для непрерывных моделей в пространстве состояний вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t).$$

Вектор состояния делится на 2 части: сохраняемую x_1 и удаляемую x_2 :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} x + Du.$$

Затем производные по переменным вектора x_2 приравниваются нулю и результирующее уравнение разрешается относительно x_2 .

Редуцированная модель принимает следующий вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{x}_1 + (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{u}. \end{cases}$$

При реализации редукции с сохранением коэффициента передачи для непрерывной модели невырожденной должна быть матрица $\mathbf{A}_{22}$, а для дискретной – матрица $\mathbf{I} - \mathbf{A}_{22}$.

Рассмотрим в качестве примера непрерывную передаточную функцию 4-го порядка. Чтобы понизить ее порядок, сначала построим сбалансированную реализацию, используя функцию `balreal`:

```
h=tf([1 11 36 26], [1 15.4 75.76 154.5 100.45])
```

```
[hb, g]=balreal(h);
```

```
h =
```

```
      s^3 + 11 s^2 + 36 s + 26
```

```
-----
      s^4 + 15.4 s^3 + 75.76 s^2 + 154.5 s + 100.5
```

Будем считать, что последние три диагональных элемента матрицы сбалансированной реализации $\mathbf{g}$ имеют малые значения, и применим для их удаления функцию `modred` в двух модификациях: в первом случае гарантируем сохранение значения коэффициента передачи, во втором – просто удалим соответствующие переменные состояния:

```
hmdc=modred(hb, 3:4, 'mdc');
```

```
hdel=modred(hb, 3:4, 'del');
```

Обе редуцированные модели $\mathbf{hmdc}$ и $\mathbf{hdel}$ являются моделями первого порядка. Теперь сравним их частотные характеристики с частотными характеристиками исходной модели:

```
figure(1)
```

```
bode(h, '-', hmdc, 'x', hdel, '*')
```

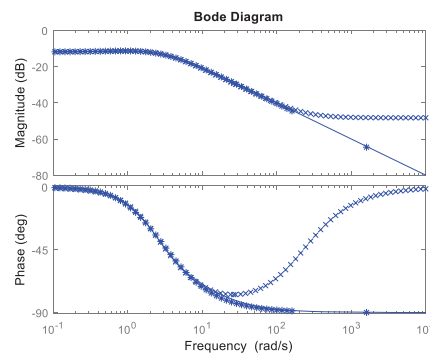


Рисунок 1 – Диаграмма Бode

Как следует из рис. 1, частотные характеристики редуцированной модели $\mathbf{hdel}$ более точно воспроизводят частотную характеристику исходной системы, чем модель $\mathbf{hmdc}$, гарантирующая сохранение ко-

эфициента передачи. Теперь сравним переходные процессы исходной модели и моделей пониженного порядка:

```
figure(2)
step(h, '-', hmdc, '*', hdel, '--')
```

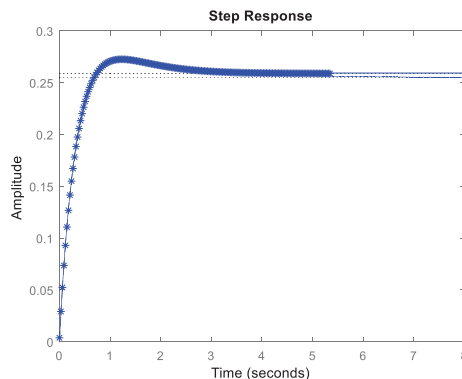


Рисунок 2 – Переходные характеристики исходной модели и моделей пониженного порядка

Получим передаточные функции пониженных порядков:

$H1 = \text{tf}(\text{hmdc})$

$$H1 = \frac{0.003861s^2 + 0.9041s + 1.024}{s^2 + 4.106s + 3.955}$$

$H2 = \text{tf}(\text{hdel})$

$$H2 = \frac{0.9498s + 0.5635}{s^2 + 3.888s + 2.21}$$

Редуцированная модель hdel точнее отслеживает переходный процесс, а модель hmdc обеспечивает точное установившееся значение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ланцов, В. Н. Методы понижения порядка моделей сложных систем : учеб. пособие / В. Н. Ланцов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. – 84 с.
2. Дьяконов В. П. MATLAB. Полный самоучитель. – М.: ДМК Пресс, 2012. – 768 с.
3. Гилат Амос. MATLAB. Теория и практика. 5-е изд. / Пер. с англ. Смоленцев Н. К. – Москва : ДМК Пресс, 2016. – 416 с.