УДК 62-52621.923

А.А. Лялько, ст. преп
(БГТУ, г. Минск)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ПАДЕ ПРИ РАСЧЁТЕ РЕГУЛЯТОРОВ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Регуляторы состояния контролируют характеристики вектора переменных состояния объекта управления (ОУ), описанного уравнениями в пространстве состояний.

Пусть модель объекта управления содержит запаздывание:

$$\dot{x} = Ax + Bu(t - \tau)$$

Структурная схема такой модели имеет вид:

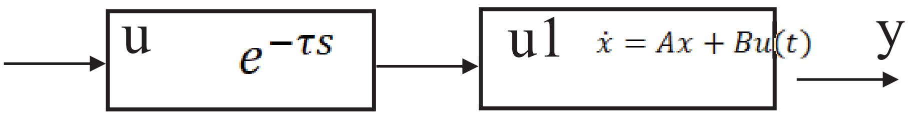

Рисунок 1 – Структурная схема ОУ с запаздыванием

Критерий качества имеет тот же вид, что и для объектов без запаздывания:

$$J = \min_{u} \int_0^T (x^T Q x + u^T R^{-1} u) dt$$

Можно рассмотреть несколько подходов к синтезу регулятора при наличии запаздывания. Во-первых, можно изменить модель, заменив управляющее воздействие с запаздыванием на управляющее воздействие без него. Модель объекта управления в этом случае примет следующий вид:

$$\dot{x} = Ax + Bu_1(t)$$

Далее регулятор рассчитывается, как и для объекта без запаздывания. Затем, после получения результата мы переходи назад к модели с запаздыванием, сдвинув вперед наш результат по времени. При таком подходе полученный регулятор может быть физически не реализуем. Как правило, для синтеза объектов с запаздыванием используют второй подход. Второй подход заключается в аппроксимации звена с запаздыванием путем разложения его в математический ряд. Из всех существующих методов разложения функции путем разложения в математический ряд наилучший результат дает разложение в ряд Паде.

Разложение запаздывания в ряд Паде n-го порядка осуществляется на основании следующей расчетной формулы:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!}(-\tau s)^{n-k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!}(\tau s)^{n-k}}$$

Разложение запаздывания в ряд Паде 4-го порядка: n=4:

Как правило хороших результатов можно добиться при разложении в ряд Паде 4-го порядка:

$$e^{-\tau s} \approx \frac{s^4 - \frac{20}{\tau}s^3 + \frac{180}{\tau^2}s^2 + \frac{840}{\tau^3}s + \frac{1680}{\tau^4}}{s^4 + \frac{20}{\tau}s^3 + \frac{180}{\tau^2}s^2 + \frac{840}{\tau^3}s + \frac{1680}{\tau^4}}$$

Разложение в ряд Паде n-го порядка увеличивает размерность ОУ на n, т.е. появляется n новых переменных состояния:

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u,$$

где $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{x}$ – расширенные вектора и матрицы.

Пусть порядок ОУ без запаздывания был m, тогда после разложения звена с запаздыванием в ряд Паде вектор переменных состояния примет следующий вид:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{1\tau} \\ x_{2\tau} \\ \vdots \\ x_{n\tau} \end{bmatrix}$$

где $x_{i\tau}$, *i=1..n* – переменные состояния, получившиеся в результате разложения в ряд Паде.

Далее задача расчёта регулятора состояния решается аналогично такой же задачи без запаздывания.

Приведём несколько функций для разложения запаздывания в ряд Паде в системе Matlab:

[NUM,DEN] = pade(T,N)

Данная функция вычисляет разложение в ряд Паде N-го порядка непрерывного запаздывания exp(-T*s) в форме передаточной функции.

Векторы-строки NUM и DEN содержат полиномиальные коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции в убывающих степенях s. При вызове без левого аргумента pade(T,N) строит график переходной характеристики и фазовую характеристику приближения Паде N-го порядка и сравнивает их с точными характеристиками временной задержки

SYSX = pade(SYS,N).

Вычисляет модель непрерывной системы SYSX без запаздывания, путем замены всех запаздываний в модели **SYS** их аппроксимацией Паде N-го порядка. Функция LQRD предназначена для синтеза оптимального дискретного регулятора для непрерывной системы. Динамические характеристики полученного оптимального регулятора аналогичны динамическим характеристикам непрерывного оптимального регулятора, найденного с помощью функции LQR. Эту функцию целесообразно использовать при построении цифровой реализации обратных связей системы управления после того, как выполнен синтез непрерывного оптимального регулятора.

Функция ACKER предназначена для расчёта регулятора состояния на основе желаемого расположения полюсов, которое задаётся вектором p, используя управление вида u=-kx для одномерных систем. В основе этой функции лежит расчётная формула Аккермана. Расчёт выполняется таким образом, что собственные значения матрицы замкнутой системы A-Bk равны элементам вектора p с точностью до порядка следования.

Пример расчёта линейного квадратичнго регулятора для объекта с запаздыванием:

```
W=tf([1.5 15],[30 45 30 1], 'ioDelay', 10) % Передаточная функция объекта управления с запаздыванием 10 секунд.
W_pade=pade(Wo,4)%разложение в ряд Паде 4-го порядка.
x(1, 1)=1 % Начальные условия
x(2, 1)=2
x(3, 1)=3
sys=ss(W_pade) % Переход в пространство состояний
[A B C D]=ssdata(sys) % Матрицы модели ОУ
[n m]=size(A) % Размерность ОУ
BB=B*ones(1, n)
C1=eye(n, m)
Q=0.5*eye(n)
R=Q
[K S e]=lqr(A, BB, Q, R)
```

Выходные переменные функции LQR следующие: К-матрица коэффициентов обратных связей оптимального регулятора; S – решение уравнения Риккати; e-полюса системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с.
2. Филлипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 616 с.
3. Бороденко В. А. Исследование систем управления в среде MATLAB. Павлодар : Кереку, 2011. – 318 с.