

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И ТЕОРИЯ ЖИДКОСТЕЙ В БЕЛАРУСИ

В.С. Вихренко

Белорусский государственный технологический университет
vvikhre@bstu.unibel.by

Исследования по статистической физике и теории жидкостей в Беларуси возникли на фоне развития теоретической физики как одного из ее направлений. В 1955 г. в авторитетном советском «Журнале экспериментальной и теоретической физики» была опубликована серия работ Иосифа Залмановича Фишера [1], тогда еще молодого белорусского физика-теоретика, сотрудника кафедры теоретической физики Белорусского государственного университета (БГУ), посвященная актуальной и сложной проблеме устойчивости однородных фаз газов и жидкостей и фазовым переходам в них. Первые статьи И. З. Фишера по статистической теории жидкостей появились в ведущих советских журналах в начале 50-х годов прошлого столетия. В то время жидкости, ввиду отсутствия естественного малого параметра, рассматривались как объекты, плохо пригодные для теоретического микроскопического рассмотрения. Тем важнее представляются научные достижения И. З. Фишера, являвшегося одним из немногих теоретиков, посвятивших свои исследования этому сложному состоянию вещества.

В упомянутых работах был использован метод Боголюбова–Борна–Грина–Кирквуда–Ивона (ББГИ) коррелятивных частичных функций распределения, который в то время рассматривался еще только как перспективный метод исследования флюидов (текучих сред – жидкостей и плотных газов), а в настоящее время входящий в стандартный инструментарий статистической механики. На основании интегрального уравнения Боголюбова для радиальной функции распределения, полученного в суперпозиционном приближении Кирквуда, И. З. Фишер изучил асимптотику этой функции на больших расстояниях и сформулировал критерий устойчивости однородной фазы, а также использовал полученный результат для исследования границ устойчивости систем твердых сфер и сферически симметричных частиц со степенным законом отталкивания. В результате было получено уравнение «плавления» системы твердых сфер в виде зависимости давления от температуры $p(T) = 3,4k_B T / v_0$, где p , T и v_0 – давление, абсолютная температура и объем твердой сферы, соответственно, и оценка объема плавления $v_{пл} = 2v_0$. Появившиеся через несколько лет результаты моделирования системы твердых сфер по методу Монте-Карло подтвердили эти оценки. В частности, область перехода между конденсированной и разреженной фазами была определена интервалом объемов $(2,06 \div 2,16)v_0$ на одну частицу.

Эти вычисления были одними из первых, относящихся к описанию фазовых переходов статистико-механическими методами. Результаты, полученные для твердых сфер, были обобщены на систему частиц, взаимодействие между которыми задано степенным законом. В этих вычислениях система твердых сфер использовалась в качестве базисной и был введен эффективный диаметр сферы, зависящий от температуры. В конце 60-х–начале 70-х годов прошлого столетия с помощью аналогичной идеи Виксом, Чандлером и Андерсоном была построена широко известная статистическая теория жидкостей (WCA theory) [2].

Ряд работ по статистической теории жидкостей И. З. Фишером был выполнен

совместно с В.К. Прохоренко и Б.В. Бокутем. Вместе с первым из них были исследованы флуктуации координационных чисел в ряде систем [3, 4] и структурные особенности воды [5]. В работах с Б.В. Бокутем [6, 7] исследованы неоднородные состояния жидкостей, в частности, вблизи твердой стенки и в переходном слое от жидкости к газу.

Подходы и результаты исследования жидкостей статистическими методами вошли в диссертацию «Исследования по теории жидкостей», представленной И.З. Фишером на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, которая была защищена в БГУ в 1959 г. В диссертации затронут весь спектр задач равновесной статистической теории жидкого состояния: структурные свойства на основе радиальной функции распределения при коротко- и дальнедействующих потенциалах межчастичного взаимодействия, флуктуации физических параметров, фазовые переходы и особенности критического состояния вещества, неоднородные системы и структура переходной области между жидкостью и газом, многокомпонентные системы, модельные одномерные системы.

Рафинированное изложение теории жидкостей на основе частичных коррелятивных функций распределения и суперпозиционного приближения Кирквуда представлено в монографии И.З. Фишера «Статистическая теория жидкостей» [8], опубликованной в 1961 г. в серии «Современные проблемы физики», выпускавшейся под общим руководством редакции журнала «Успехи физических наук». Монография, наряду с изложением теории коррелятивных функций, содержит ряд собственных результатов автора, в частности, упоминавшиеся выше исследования устойчивости однородных фаз и проблемы фазовых переходов, флуктуаций координационных чисел, границы раздела жидкость–газ.

В монографии содержится оригинальный метод расчета высокочастотных модулей упругости, в том числе и высокочастотного модуля сдвига – факт, не являвшийся на время написания монографии широко известным, поскольку при медленном нагружении жидкость не может сопротивляться сдвиговым напряжениям. Потенциальные части высокочастотных модулей упругости выражены через первую и вторую производные межмолекулярного потенциала и радиальную функцию распределения.

При построении теории жидкостей используется цепочка уравнений ББГКИ, в которой дифференциальные уравнения для младших функций распределения включают интегральные члены со старшими функциями и возникает проблема построения замкнутой системы уравнений для нескольких младших функций распределения, или, другими словами, проблема замыкания цепочки уравнений.

В первом широко распространенном методе замыкания использовалось суперпозиционное приближение, предложенное Кирквудом и состоявшее в замене трехчастичной функции распределения произведением двухчастичных, что приводило к потере части корреляций между частицами. В результате для однородных систем следовало интегрировать дифференциальное уравнение для радиальной (двухчастичной) функции распределения. Приближение Кирквуда обобщалось и на неоднородные системы, что позволяло исследовать распределение плотности во внешних полях и в переходных слоях между жидкостью и газом. Однако было ясно, что точность суперпозиционного приближения во многих случаях недостаточна, и предпринимались неоднократные попытки его улучшения.

В монографии И.З. Фишера разработана процедура замыкания цепочки уравнений с помощью аппроксимации не трех-, а четырехчастичной функции распределения. Это приближение, названное впоследствии надсуперпозиционным, получило широкую известность. Получающиеся в результате его использования

функции распределения удовлетворяют всем свойствам симметрии и нормировочным соотношениям, налагаемым на них. При нормировании одночастичной функции распределения на единицу надсуперпозиционное приближение принимает вид

$$F_4(q, q_1, q_2, q_3) = g(|q - q_1|)g(|q - q_2|)g(|q - q_3|)g(|q_1 - q_2|)g(|q_1 - q_3|)g(|q_2 - q_3|) \times \\ \times \chi(q, q_1, q_2)\chi(q, q_1, q_3)\chi(q, q_2, q_3)\chi(q_1, q_2, q_3),$$

где F_4 — четырехчастичная функция распределения, радиальные функции распределения g зависят лишь от расстояния между соответствующими частицами, тогда как их трехчастичные аналоги χ определяются взаимным расположением трех частиц. Определяющая замкнутая система интегро-дифференциальных уравнений состоит из двух уравнений для g и χ , правые части которых в подынтегральных выражениях содержат обе эти функции. Применительно к теории плотных газов надсуперпозиционное приближение приводит к правильным значениям вириальных коэффициентов вплоть до четвертого по сравнению с тремя правильными коэффициентами в суперпозиционном приближении. К сожалению, даже для однородных систем каждая из функций χ определяется тремя геометрическими параметрами (в отличие от функции g , зависящей лишь от расстояния между частицами), и их нахождение при рассмотрении жидкостей наталкивается на сложности вычислительного характера.

Монография И.З. Фишера была быстро переведена на английский язык и опубликована в 1964 г. издательством Чикагского университета [9] с предисловием известного физика Стюарта Райса. В предисловии отмечено, что монография профессора Фишера представляет обзор современного понимания равновесных свойств жидкостей. Кроме этого, подчеркнуто, что она знакома читателю с исследованиями, выполненными под большим влиянием идей И.Н. Боголюбова и ранее опубликованными лишь на русском языке и не известными в Западной Европе и США. Подчеркнуты также методические достоинства монографии и она рекомендована для подготовки аспирантов.

И.З. Фишером и его аспирантом Л.И. Комаровым построена микроскопическая теория интенсивности и спектральной плотности релеевского рассеяния света плотными газами и жидкостями, состоящими из сферических симметричных частиц [10]. При построении теории не использовались представления о термодинамических флуктуациях, которые были основой всех существовавших на то время подходов к исследованию рассеяния света. В работе использованы пространственно-временные коррелятивные функции по аналогии с известными функциями Ван-Хова, применяемыми для интерпретации давних по рассеянию тепловых нейтронов. Эта работа послужила основой для построения последующих микроскопических теорий релеевского рассеяния для более сложных систем, например, с вращательными степенями свободы молекул (см. обзор [11]).

В 1963 г. профессор И.З. Фишер возглавил кафедру теоретической физики Одесского университета, где продолжил исследования по статистической теории жидкостей и создал известную своими исследованиями научную школу в области статистической физики. В БГУ его ученики и последователи также продолжали статистико-механические исследования.

Под руководством Л.И. Комарова и Л.Д. Феранчука разработан непертурбативный (т. е. не опирающийся на теорию возмущений и не требующий наличия малого параметра и обоснования сходимости используемых разложений) операторный метод (ОМ) описания квантовомеханических систем [12–14], который позволял решить ряд задач конденсированного состояния вещества, и был использован

рядом зарубежных исследователей.

Важно, что ОМ обеспечивает равнопригодную оценку вычисляемой величины в широком (или во всем) диапазоне изменения параметров гамильтониана. С его помощью построена теория полярона, выполнен расчет зонного спектра в 2- и 3-мерных периодических структурах, найден энергетический спектр атомно-молекулярных систем с учетом деформации оболочек во внешних полях, вычислена рентгеновская поляризуемость сложных кристаллов. Основываясь на операторном решении для квантового ангармонического осциллятора, построена термодинамика кристаллов и молекулярных газов с высокой степенью ангармонизма колебаний, что позволяет вычислять термодинамические характеристики квантовых систем во всем диапазоне физических параметров, квантовых чисел и температуры [15, 16].

К середине 50-х годов прошлого столетия относится начало научной деятельности Л.А. Ротта, защитившего в 1956 г. в БГУ диссертацию «Газовые системы при высоких и сверхвысоких давлениях» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, который работал на кафедре математики в то время Белорусского лесотехнического института, прообразованного в 1961 г. в Белорусский технологический институт (БТИ) и в 1994 г. аттестованного как Белорусский государственный технологический университет (БГТУ). Вся научная и педагогическая деятельность профессора Л.А. Ротта была всецело, вплоть до 2005 г., связана с этим учебным заведением.

В диссертации введена последовательность условных частичных функций распределения и по аналогии с методом БГКИ сформулирована цепочка интегро-дифференциальных уравнений, их определяющая. Условность введенных функций состояла в том, что объем системы разбивался на ячейки по числу частиц в ней, и рассматривались состояния, когда в каждой из ячеек располагалось не более одной, двух и т. д. частиц. Последовательность состояний по заполнению ячеек формировала последовательные приближения. В отличие от традиционных подходов к построению теории плотных газов, когда в качестве базового приближения рассматривался разреженный газ, в методе Л.А. Ротта исходное так называемое F_{11} -приближение давало тем лучшие результаты, чем выше была плотность системы и, таким образом, предложенная схема представлялась перспективной именно для исследования конденсированных систем.

И в диссертации, и в первой публикации [17] предложенная схема рассматривалась как обоснование теории свободного объема, широко использовавшейся ввиду отсутствия более точных методов, позволявшая к тому же последовательно улучшать результаты. Но вскоре было осознано самостоятельное значение метода условных распределений (УР) для построения теории конденсированных сред [18]. Следует подчеркнуть, что в методе УР введение пространственных ячеек является математическим приемом, обеспечивающим последовательное рассмотрение статистических свойств системы, и ни в коей мере не является физическим ограничением. Вскоре схема распространяется на равновесные двухкомпонентные системы [19] и вводятся кинетические функции условных распределений [20], обеспечившие возможность рассмотрения неравновесных процессов.

После разработки основ метод УР используется для решения ряда актуальных задач конденсированного состояния вещества. Были рассмотрены с точки зрения межмолекулярных взаимодействий такие проблемы, как плавление в простых системах [21] и существование в некоторых двухкомпонентных системах при высоких давлениях экзотических фазовых равновесий газ-газ [22], а также обнаруженные к тому времени особенности флуктуаций вблизи критической точки двойных растворов [23].

В 1964 г. Л.А. Ротт организовал в БТИ кафедру теоретической механики, что обеспечило условия для создания научной школы. К этому времени Л.А. Роттом была разработана и апробирована система подготовки научных кадров, позволяющая лучшим студентам технических вузов получать физико-математическую подготовку по программам физического факультета университета. Были начаты систематические исследования равновесных и неравновесных свойств конденсированных систем статистико-механическими методами на основе условных распределений.

Был осуществлен статистико-механический вывод феноменологических уравнений переноса для одно- и многокомпонентных систем [24, 25], введены функции для систем несферических частиц [26], что позволило в дальнейшем исследовать поведение упругих характеристик и различных кинетических коэффициентов.

Равновесные свойства жидкостей и, в особенности, их структурные характеристики, передаваемые частичными функциями распределения, играют важнейшую роль, поскольку многие физические величины выражаются через эти функции. В соответствии с современной статистико-механической теорией необратимых процессов [27] кинетические коэффициенты также представляются через равновесные временные функции соответствующих динамических величин. Поэтому стояла задача разработать в рамках метода УР процедуру замыкания цепочек уравнений, которая бы обеспечила достаточную точность при вычислении функций распределения и с их помощью различных физических величин. Эта задача была решена на основе аппроксимации потенциалов средних сил [28], и именно здесь проявились достоинства метода УР.

Разработанная в рамках метода УР процедура замыкания цепочек уравнений для частичных функций распределения позволила впервые в рамках гиббсовского формализма построить полную фазовую диаграмму простой молекулярной системы [29, 30], включающую все типы фазовых переходов кристалл-жидкость, жидкость-газ, кристалл-газ, а также тройную и критическую точки. Эти результаты представлены на рис. 1 и 2.

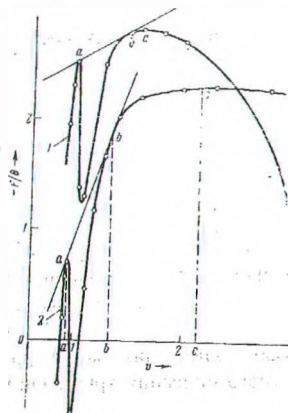


Рис. 1. Зависимость свободной энергии от молекулярного объема в области кристаллического и жидкого состояний.

(1) $\theta = 0,85$, (2) $\theta = 1$ (a , b и c - точки плавления, кристаллизации и испарения). Кружки - расчеты (рис. 1 из работы [29]).

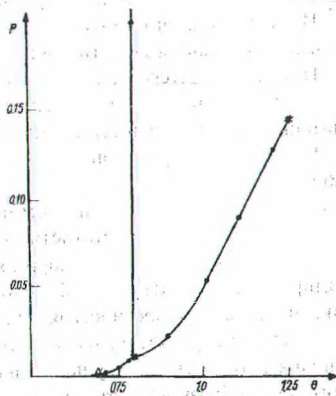


Рис. 2. Фазовая диаграмма простой молекулярной системы. P - давление, θ - температура (в приведенных единицах ϵ/σ^3 для давления и ϵ/k_B для температуры, ϵ и σ - параметры потенциала Леннарда-Джонса (рис. 3b из работы [31]).

В ряде кандидатских диссертаций разрабатывались конкретные вопросы статистической механики конденсированных систем на основе метода УР: В.С. Вихренко «Исследования по статистической теории кинетических характеристик молекулярных систем» (БГУ, 1970), Э.Т. Брук-Левинсон «Исследования по статистической теории молекулярных систем с нецентральным взаимодействием» (БГУ, 1970), И.И. Наркевич «Исследования по статистической теории молекулярных систем с применением ЭВМ» (БГУ, 1973), Г. С. Бокун «Чистые и бинарные системы в первом и втором приближениях метода условных распределений» (БГУ, 1977). Полученные результаты обобщены в докторской диссертации Л.А. Ротта, которая была защищена в БГУ в 1975 г., обзоре [31] и книге [32].

В дальнейшем исследования были распространены на более сложные объекты: анизотропные жидкости и жидкие кристаллы, ионные жидкости и кристаллы, твердые тела с дефектами, поверхности раздела фаз, неоднородные и фрактальные системы, что предопределило возникновение новых научных направлений. Значительное внимание было уделено использованию методов неравновесной статистической механики для исследования вязкоупругих и транспортных характеристик конденсированных систем. Существенное влияние на развитие школы оказали работы Д.Н. Зубарёва, Ю.Л. Клямонтовича. Были защищены несколько кандидатских и докторские диссертации по статистической теории жидких кристаллов (В.Б. Немцов, Институт физики НАН Украины, Киев, 1987), статистической теории точечных дефектов и диффузионных характеристик кристаллов (Э.Т. Брук-Левинсон, Московский институт стали и сплавов, 1989), статистическим моделям расчета теплофизических характеристик изотропных и анизотропных сред (А.В. Захаров, ИТМО НАН Беларуси, 1992), статистической теории неоднородных систем (И.И. Наркевич, Ленинградский университет, 1993), фрактальной механике композиционных и дисперсных материалов (М.И. Кулак, БГПА, Минск, 1993), статистической теории динамических и кинетических свойств конденсированных систем (В.С. Вихренко, Институт физики НАН Беларуси, 1994). Помимо цитированной выше книги Л.А. Ротта, опубликованы монографии [33–35] и учебник по физике [36].

Исследования по статистической механике конденсированных сред в БГТУ продолжают активно развиваться и в последнее десятилетие.

Получены интегральные уравнения для двух- и трехкомпонентных систем заряженных частиц в режиме электролита, не содержащие расходящихся членов, и рассчитаны структурные и термодинамические характеристики [37].

В рамках двухуровневого молекулярно-статистического подхода [38–40] разработана статистическая модель одноосного деформирования линейных кристаллических образцов. В первом приближении по малому параметру нелинейного интегрального уравнения в статистической теории упругости получены аналитические выражения для младших коррелятивных функций и свободной энергии деформированной молекулярной цепочки с занятыми и свободными (вакантными) узлами, построена теоретическая диаграмма напряжение–деформация. Разработано аналитическое всефазное уравнение состояния, позволяющее учитывать корреляцию заполнения пар ячеек, что существенно для адекватного описания кристаллического, жидкого и газообразного состояний.

Разработан новый приближенный метод вычисления и анализа равновесных характеристик решеточных газов, сочетающий в себе точность получаемых результатов с относительной простотой используемых вычислительных алгоритмов [41, 42]. Получены формально строгие статистико-механические выражения для коэффициентов диффузии [43–45], которые использованы для количественных расчетов, в том числе электрофизических характеристик ионных кристаллов, интеркаляционных материалов

и фотоактивных соединений [46–48]. Построена статистико-механическая теория неравновесных процессов (диффузии, термодиффузии, структурной релаксации) в решеточных системах [49–51].

Разработана методика анализа результатов молекулярно-динамического моделирования и с ее помощью детально исследована колебательная релаксация многоатомных сильно возбужденных молекул в жидкости [52, 53], доказана важная роль бинарных столкновений и неприменимость гидродинамических подходов к описанию колебательной релаксации [54], впервые количественно определен вклад колебательно-вращательного взаимодействия в колебательную релаксацию [55], объяснены особенности процесса фотодиссоциации молекул органических пероксидов в ряде растворителей [56].

Жидкости и приложения статистической механики представляют интерес для многих научных и учебных учреждений Беларуси. Широко известны работы основателя Института тепло- и массообмена НАН Беларуси А.В. Лыкова по исследованию тепло- и массообменных процессов в различных средах, З.П. Шульмана по реологическим средам [57], А.Г. Шашкова по кинетической теории тепловых процессов в газах и жидкостях [58, 59].

Под руководством Н.В. Павлокевича на основе кинетических уравнений исследован массоперенос в модельных пористых телах при физико-химических превращениях. Продемонстрирована эффективность сочетания кинетического и феноменологического подходов при решении конкретных задач тепло- и массопереноса [60]. В работах [61, 62] с использованием методов статистической физики и компьютерного моделирования рассмотрены перколяционные особенности кластеров на решетке и на этой основе изучены закономерности горения гетерогенных конденсированных систем, обнаружен и исследован новый режим горения, названный перколяционным. В работе [63], используя методы неравновесной статистической механики, выведены уравнения и исследованы задачи кинетики: неизотермической нуклеации, бинарной нуклеации, фотонуклеации, нуклеации пара с неравновесным возбуждением внутренних степеней свободы.

В Институте тепло- и массообмена были начаты, а затем продолжены также в БНТУ и БГТУ, исследования магнитных жидкостей. По результатам исследований изданы монографии [64, 65]. В настоящее время в БНТУ на кафедре ЮНЕСКО “Энергосбережение и возобновляемые источники энергии”, возглавляемой профессором В.Г. Баштовым, и в научно-исследовательской лаборатории «Термомеханика магнитных жидкостей», возглавляемой А.Г. Рексом, выполняются работы по синтезу магнитных жидкостей, исследованию их физических свойств, изучению процессов гидродинамики и теплопередачи в магнитожидкостных системах со свободной поверхностью, выполняются разработки новых магнитожидкостных устройств, в частности, магнитожидкостных уплотнений, высокоэффективных магнитожидкостных демпферов, изыскиваются способы управления гидродинамикой и теплообменом с помощью магнитных полей. Результаты исследований хорошо известны как в нашей стране, так и за рубежом.

Известны также работы сотрудников Объединенного института физики твердого тела и полупроводников, Института атомной и молекулярной физики, Института физики, Объединенного института энергетических и ядерных исследований – “Сосны” НАН Беларуси и других учреждений по использованию статистико-механических методов в соответствующих областях научных знаний.

В заключение можно отметить, что выполненные фундаментальные исследования обеспечивают понимание процессов, происходящих в конденсированных системах, что является залогом их использования в реальных технических устройствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фишер И.З. // ЖЭТФ. 1955. Т. 28. С. 171; 437; 447.
2. Anderson H.C., Chandler D., Weeks J.D. // Adv. Chem. Phys. 1976. V. 34. P. 105.
3. Фишер И.З., Прохоренко В.К. // ЖФХ. 1957. Т. 31. С. 2145.
4. Прохоренко В.К., Фишер И.З. // ЖФХ. 1959. Т. 33. С. 1852.
5. Фишер И.З., Прохоренко В.К. // ДАН СССР. 1958. Т. 123. С. 131.
6. Фишер И.З., Бокуть Б.В. // ЖФХ. 1956. Т. 30. С. 2547; 2747.
7. Фишер И.З., Бокуть Б.В. // ЖФХ. 1957. Т. 31. С. 200.
8. Фишер И.З. Статистическая теория жидкостей. – М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Fisher I.Z. Statistical Theory of Liquids. – Chicago and London: The University of Chicago Press, 1964.
10. Фишер И.З., Комаров Л.И. // ЖЭТФ. 1962. Т. 43. С. 1927.
11. Вихренко В.С. // УФН. 1974. Т. 113. С. 627.
12. Feranchuk I.D., Komarov L.I. // Phys. Lett. 1982. V. A88. P. 211.
13. Feranchuk I.D., Komarov L.I. // Phys. Lett. 1982. V. C15. P. 1965.
14. Feranchuk I.D., Komarov L.I., Nichipor I.V., Ulyanekov A.P. // Ann. Phys. (N.-Y.) 1995. V. 238. P. 370.
15. Иванов А.А., Феранчук И.Д. // Весці НАН Беларусі: серыя фіз.-мат. навук. 2004. № 4. С. 68.
16. Feranchuk I., Ivanov A. Etudes on Theoretical Physics / L.M. Barkovsky, I.D. Feranchuk, Ya.M. Shnir – Eds. – Singapore: World Scientific, 2004. – P. 171.
17. Ротт Л.А. // ЖФХ. 1957. Т. 31. С. 1468.
18. Ротт Л.А. // ЖФХ. 1958. Т. 32. С. 1425.
19. Ротт Л.А. // ЖФХ. 1958. Т. 32. С. 2845.
20. Ротт Л.А. // ДАН БССР. 1958. Т. 2. С. 58.
21. Ротт Л.А. // ФТТ. 1962. Т. 4. С. 577.
22. Ротт Л.А. // ДАН СССР. 1965. Т. 160. С. 1138.
23. Кричевский И.Р., Ротт Л.А., Цеханская Ю.В. // ДАН СССР. 1965. Т. 163. С. 674.
24. Вихренко В.С., Немцов В.Б., Ротт Л.А. // ДАН БССР. 1968. Т. 12. С. 307.
25. Вихренко В.С., Немцов В.Б., Ротт Л.А. // Изв. АН БССР: сер. физ.-мат. наук. 1969. № 1. С. 102.
26. Немцов В.Б., Ротт Л.А., Вихренко В.С. // ДАН БССР. 1969. Т. 13. С. 30.
27. Zubarev D., Morozov V., Repke G. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. – Berlin: Akademie Verlag, 1996 (V. 1); 1997 (V. 2).
28. Бокун Г.С., Вихренко В.С., Наркевич И.И., Ротт Л.А. // ДАН БССР. 1972. Т. 16. С. 690.
29. Бокун Г.С., Вихренко В.С., Наркевич И.И., Ротт Л.А. // ДАН СССР. 1973. Т. 212. С. 1328.
30. Бокун Г.С., Вихренко В.С., Наркевич И.И., Ротт Л.А. // ЖФХ. 1973. Т. 47. С. 2412.
31. Rott L.A., Vikhrenko V.S. // Fortsch. der Physik. 1975. V. 23. P. 133.
32. Ротт Л.А. Статистическая теория молекулярных систем. Метод коррелятивных функций условных распределений. – М.: Наука, 1979.
33. Брук-Левинсон Э.Т., Статистическая теория реальных кристаллов. – Минск: Вышэйшая школа, 1989.
34. Немцов В.Б. Неравновесная статистическая теория систем с ориентационным порядком. – Минск: Тэхналогія, 1997.
35. Кулак М.И. Фрактальная механика материалов. – Минск: Вышэйшая школа, 2002.
36. Наркевич И.И., Волмянский Э.И., Лобко С.И. Физика для вузов. – Минск: Новое знание, 2004.
37. Белов В.В. // Тр. БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. 2001. Вып. 9. С. 40;

2003. Вып. 11. С. 92; 2005. Вып. 13. С. 53.
38. Наркевич И.И., Наркевич В.И., Жаркевич А.В. // Физика и химия стекла. 2000. Т. 26. С. 476.
 39. Наркевич И.И., Лобко С.И., Казаков П.П., Жаркевич А.В. // ИФЖ. 2002. Т. 75. С. 170.
 40. Наркевич И.И., Жаркевич А.В., Фарафонтова Е.В. // Тр. БГТУ. Сер. VI. Физ.-мат. науки и информ. 2005. Вып. 13. С. 74.
 41. Vikhrenko V.S., Bokun G.S., Groda Y.G. // Phys. Lett. 2001. V. A286. P. 127.
 42. Groda Y.G., Argyrakis P., Bokun G.S., Vikhrenko V.S. // Eur. Phys. J. 2003. V. B32. P. 527.
 43. Бокун Г.С., Грода Я.Г., Убинг К., Вихренко В.С. // ЖТФ. 2000. Т. 70. С. 1.
 44. Bokun G.S., Groda Y.G., Uebing C., Vikhrenko V.S. // Physica. 2001. V. A296. P. 83.
 45. Argyrakis P., Groda Y.G., Bokun G.S., Vikhrenko V.S. // Phys. Rev. 2001. V. E64. Article 066108.
 46. Bisquert J., Vikhrenko V.S. // Electrochim. Acta. 2002. V. 47. P. 3977.
 47. Bisquert J., Vikhrenko V.S. // J. Phys. Chem. 2004. V. B108. P. 2313.
 48. Groda Ya.G., Lasovsky R.N., Vikhrenko V.S. // Solid State Ionics. 2005. V. 176. P. 1675.
 49. Vikhrenko V.S., Bokun G.S., Groda Y.G. // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 17. P. 237.
 50. Vikhrenko V.S., Bokun G.S., Groda Y.G., Gapanjuk D.V. // Solid State Ionics. 2003. V. 157. P. 221.
 51. Bokun G.S., Gapanjuk D.V., Groda Ya.G., Vikhrenko V.S. // Electrochim. Acta. 2005. V. 50. P. 1725.
 52. Heidelberg C., Schroeder J., Schwarzer D., Vikhrenko V.S. // Chem. Phys. Lett. 1998. V. 291. P. 333.
 53. Heidelberg C., Vikhrenko V.S., Schwarzer D., Schroeder J. // J. Chem. Phys. 1999. V. 110. P. 5286.
 54. Vikhrenko V.S., Schwarzer D., Schroeder J. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2001. V. 3. P. 1000.
 55. Kab G., Vikhrenko V.S. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2001. V. 3. P. 2223.
 56. Kandratsenka A., Schroeder J., Schwarzer D., Vikhrenko V.S. // Phys. Chem. Chem. Phys. 2005. V. 7. P. 1205.
 57. Шульман З.П. Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей. – М., 1975.
 58. Шашков А.Г., Абраменко Т.Н. Свойства переноса газов и жидкостей. 1973.
 59. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности. – М.: Едиториал УРСС, 2004.
 60. Pavlyukevich N.V., Gorelik G.E., Levdansky V.V., Leitsina V.G., Rudin G.I. Physical Kinetics and Transfer Processes in Phase Transitions. – N.-Y.: Begell House, 1995.
 61. Гринчук П. С., Рабинович О. С., Павлюкевич Н. В. // ИФЖ. 2004. Т. 77. № 3.
 62. Grinchuk P.S. Rabinovich O.S. // Phys. Rev. 2003. V. E67. Article 046103; 2005. V. E71. Article 026116.
 63. Fisenko S.P., Wilemski G. // Phys. Rev. 2004. V. E70. Article 056119.
 64. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. – М.: ИВТ АИ СССР, 1985.
 65. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. – М.: Химия, 1989.