

роятности обнаружения молекулы на границе своей ячейки. Именно эта величина обеспечивает возможность перемещения частиц из ячейки в ячейку, что и реализуется в процессе самодиффузии. Можно предположить, что с помощью модифицированного приближения Гаусса будет возможно оценить отношение времени "оседлой жизни" молекулы в окрестности узла решетки, тогда функция распределения определяется четвертым слагаемым в (10) к промежутку времени, когда узел не занят (первое слагаемое из (10)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Наркевич И.И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. – С.П.: С.Пб.ГУ, 1993. – С. 242.
2. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем. Т.1. – М.: ТОО "ЯНУС", 1995.
3. Ротт Л.А. Статистическая теория молекулярных систем. – М.: Наука, 1979.
4. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. – М.: Гостехиздат, 1946.
5. Abraham F.F. On the therodynamics, structure and phase stability of the nonuniform fluid state // Physics reports. 1979. – Vol. 53. №2. – P. 93 – 156.
6. Наркевич И.И., Жаркевич А.В. Молекулярно-статистическое описание неоднородно деформированных образцов. 1. Постановка задачи и метод ее решения // Инженерно-физический журнал. 2000. – Т.73, №6. – С. 1313 – 1319.
7. Наркевич И.И., Лобко С.И., Жаркевич А.В., Казаков П.П. Молекулярно-статистическое описание неоднородно деформированных образцов. 2. Расчет функций распределения молекул и вакансий в одномерной однородно деформированной статистической модели растяжения – сжатия // Инженерно-физический журнал, 2002. – Т.75, № 4.
8. Наркевич И.И., Жаркевич А.В., Казаков П.П. Исследование структуры одномерной статистической модели одноосного деформирования молекулярного кристалла // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информатики. – Минск, 2000. Вып. IX. – С. 65 – 71.
9. Наркевич И.И. Метод множителей Лагранжа в проблеме нормировки коррелятивных функций многокомпонентного кристалла с дефектами // Высокочистые вещества. 1990, № 1. – С. 67 – 75.

УДК 537.622; 537.84

А.Н. Вислович, доцент; В.Н. Гаранин, студент; В.В. Бирич, студент

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕЛ, ВЗВЕШЕННЫХ В МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ

The expressions for the interaction forces between two spherical bodies in magnetic fluid are derived.

На тела, взвешенные в магнитной жидкости, действуют силы магнитного происхождения, которые могут быть сравнимы с силой тяжести, а в некоторых случаях значительно превышать ее [1, 2]. Этот эффект находит применение в специфических устройствах: в магнитожидкостных подшипниках [3, 4]; в датчиках ускорения, в которых

твердое тело устойчиво взвешено внутри объема жидкости; в магнитожидкостных сепараторах, разделяющих руду по плотности [2].

В отличие от архимедовой силы, которая зависит только от объема тела, магнитная сила зависит от большего числа геометрических факторов, определяющих положение тела относительно сосуда с жидкостью и других тел, взвешенных в сосуде. Это происходит потому, что тело искажает существовавшее до его внесения магнитное поле. Возмущения поля изменяют распределение давления в жидкости. Результирующая сил давления, действующая на уединенное магнитное либо немагнитное тело в однородном поле, равна нулю. Она становится отличной от нуля, если возмущения поля достигают границ сосуда либо других тел [5]. Силы магнитного взаимодействия тел могут существенно влиять на характеристики магнитожидкостных устройств.

В настоящей работе на основе простой в геометрическом отношении модели получены формулы, позволяющие оценить эти силы. В случае, представленном на рис. 1, взаимодействуют сферический магнитный диполь и немагнитная сфера, взвешенные в неограниченном объеме магнитной жидкости; на рис. 2 – магнитный диполь плавает в сферическом сосуде, заполненном жидкостью, и взаимодействует с его стенками. В дальнейшем эти ситуации будем называть соответственно внешним и внутренним взаимодействием сферических тел. Распределения напряженности и квадрата напряженности поля, индуцируемого сферическим диполем в неограниченной однородной среде, можно представить в виде:

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{P}_m \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{P}_m}{r^3} \right), \quad H^2 = P_m^2 \frac{1 + 3\cos^2\alpha}{16\pi^2 r^6}, \quad P_m = \frac{4\pi R_2^3 M_f}{1 + 2\mu}, \quad (1)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра диполя в точку наблюдения; α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{P}_m$; $\vec{P}_m$ – эффективный магнитный дипольный момент, который для сферического тела определяется его радиусом R_2 , намагниченностью M_f , а также магнитной проницаемостью μ окружающей среды.

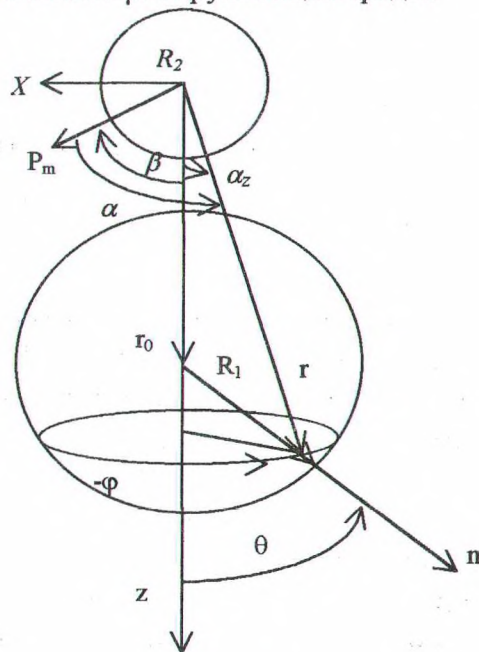


Рис. 1

Сила, действующая на немагнитное тело, контактирующее с магнитной жидкостью, рассчитывается по формуле [1, 2]

$$\vec{F} = - \oint (p + \frac{1}{2} \mu_0 (\vec{M} \cdot \vec{n})^2) \vec{n} dS, \quad (2)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к элементу поверхности dS тела. Давление p определяется уравнением гидростатики [1, 2]

$$\nabla p = \rho \vec{g} + \mu_0 M \nabla H, \quad (3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, M – намагниченность жидкости. В дальнейшем сосредоточим внимание на магнитной силе. Поэтому действие объемной силы тяжести $\vec{I}_0$, которой обусловлено гидростатическое давление, для краткости рассматривать не будем. Гидростатическое давление при интегрировании в (2) приводит к архимедовой силе.

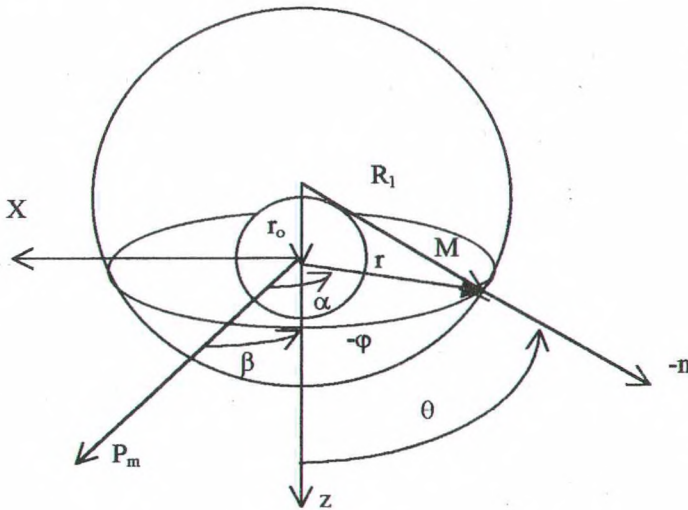


Рис. 2

Магнитожидкостное давление, которое обусловлено действием на жидкость объемной магнитной силой $\mu_0 M \nabla H$, как следует из (3), можно представить в виде

$$p = \mu_0 \int_0^H M dH = \frac{1}{2} \mu_0 \chi H^2. \quad (4)$$

Первое выражение в этой цепочке равенств справедливо для любого закона намагничивания, второе – для линейно намагничивающейся жидкости $M = \chi H$, $\chi = \text{const}$. В дальнейшем будем полагать, что выполняется линейный закон намагничивания. Кроме того, ограничимся рассмотрением таких жидкостей, у которых $\chi \ll 1$. Тогда можно пренебречь вторым слагаемым в (2) по сравнению с первым, поскольку первое слагаемое $\sim \chi$, второе $\sim \chi^2$. В ситуациях, изображенных на рис. 1, 2, среда, окружающая магнитный диполь, является ограниченной и однородной: при внешнем взаимодействии однородность нарушается присутствием немагнитной сферы; при внутреннем – внешняя среда ограничена размерами сосуда. Тем не менее при $\chi \ll 1$ для вычисления сил

магнитного взаимодействия можно использовать распределение поля (1), поскольку связанные с нарушениями условий неоднородности и неограниченности погрешности имеют порядок χ^2 [5].

На рис. 1 немагнитной является сфера, радиус которой обозначен через R_1 , на рис. 2 — немагнитным является сферический сосуд также радиусом R_1 . Тогда вычисление сил взаимодействия по (2) можно провести универсальным образом, выбрав в качестве поверхностей интегрирования поверхности сфер радиусом R_1 . Вычисленные таким образом силы 2 представляет собой силу, действующую на немагнитные частицу или сосуд. Рассматриваемая далее сила, действующая на магнитный диполь, в соответствии с 3-м законом Ньютона, равна по величине этой силе и противоположна ей по направлению.

Элементы поверхности сфер выразим через переменные связанных с ними сферических систем координат:

$$dS = R_1^2 \sin\theta d\varphi d\theta = -R_1^2 d\varphi dt, t = \cos\theta.$$

Напряженность поля (1) можно представить в виде $\vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}$, где $\vec{H}_{\parallel}$ — распределение поля, обусловленное составляющей дипольного момента, направленной вдоль оси z ; $\vec{H}_{\perp}$ — вдоль оси x .

С учетом сделанных предположений, сила магнитожидкостного давления, действующая на элемент dS ,

$$d\vec{F} = p \vec{n} dS = \frac{\mu_0 \chi}{2} (H_{\parallel}^2 + H_{\perp}^2 + 2\vec{H}_{\perp} \cdot \vec{H}_{\parallel}) \vec{n} dS. \quad (5)$$

Здесь

$$H_{\parallel} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos\alpha_z}}{r^3} P_m \cos\beta, \quad H_{\perp} = \frac{\sqrt{1 + 3\cos\alpha_x}}{r^3} P_m \sin\beta.$$

Величины, входящие в $d\vec{F}$, выразим через переменные введенных выше сферических систем координат.

Для внешнего взаимодействия получим

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + R_1^2 + 2r_0 R_1 \cos\theta = R_1^2 (1 + a^2 + 2at), 1 < a = r_0 / R_1 < \infty \\ \cos\alpha_z &= \frac{r_0 + R_1 \cos\theta}{r} = \frac{a + t}{(1 + a^2 + 2at)^{1/2}}; \cos\alpha_x = \sin\alpha_z \sin\varphi \\ n_z &= \cos\theta = t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для внутреннего взаимодействия

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= r_0^2 + R_1^2 - 2r_0 R_1 \cos\theta = R_1^2 (1 + a^2 - 2at), 0 < a = r_0 / R_1 < 1 \\ \cos\alpha_z &= \frac{R_1 \cos\theta - r_0}{r} = \frac{t - a}{(1 + a^2 - 2at)^{1/2}}; \cos\alpha_x = \sin\alpha_z \sin\varphi \\ n_z &= \cos\theta = -t. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Рассмотрим простейшие ориентации вектора $\vec{P}_m$. Пусть дипольный момент направлен вдоль оси z ($H_{\perp}=0$). В этом случае имеем

$$F_{z||} = \int dF_{z||} = \frac{\mu_0 \chi P_m^2}{16\pi R_1^4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(1+a^2 \pm 2at)^3} + \frac{3(a \pm t)^2}{(1+a^2 \pm 2at)^4} \right) t dt, \quad (8)$$

$$F_{x||} = \int dF_{x||} = 0.$$

Здесь и далее знак "+" выбирается для силы внешнего взаимодействия; "-" – для внутреннего.

Если дипольный момент направлен вдоль оси x ($H_{||}=0$), имеем

$$F_{z\perp} = \int dF_{z\perp} = \frac{\mu_0 \chi P_m^2}{16\pi R_1^4} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(1+a^2 \pm 2at)^3} + \frac{3(1+t^2)}{2(1+a^2 \pm 2at)^4}, F_{x||}=0 \right) t dt.$$

$$F_{x\perp} = \int dF_{x\perp} = 0 \quad (9)$$

Выражения (8), (9) можно представить в более простом виде:

$$\hat{F}_{z||} = \frac{F_{z||}}{F_*} = - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(1+a^2 + 2at)^3} + \frac{3(a+t)^2}{(1+a^2 + 2at)^4} \right) t dt, \quad (10)$$

$$\hat{F}_{z\perp} = \frac{F_{z\perp}}{F_*} = - \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(1+a^2 + 2at)^3} + \frac{3(1-t^2)}{2(1+a^2 + 2at)^4} \right) t dt, \quad (11)$$

$$F_* = \frac{\mu_0 \chi P_m^2}{16\pi R_1^4} = \frac{1}{9} \mu_0 \chi M_f^2 \pi R_2^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4.$$

Знак $\leftrightarrow$ в (10), (11) означает, что сила противоположна оси Z . Следовательно, в обоих случаях магнитный диполь отталкивается от немагнитного тела (частицы либо сосуда), с которым он взаимодействует.

Вычисление интегралов (10) (11) приводит к следующим выражениям для модуля силы:

$$\hat{F}_{||} = - \frac{3}{8a^4} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| + \frac{3-11a^2+53a^4+3a^6}{4a^3(1-a^2)^4}, \quad (12)$$

$$\hat{F}_{\perp} = \frac{3}{16a^4} \ln \left| \frac{1+a}{1-a} \right| - \frac{3-11a^2-43a^4+3a^6}{8a^3(1-a^2)^4}. \quad (13)$$

Здесь область изменения независимой переменной $1 < a < \infty$ соответствует внешнему взаимодействию, $0 < a < 1$ – внутреннему взаимодействию частицы.

Зависимости (12), (13) представлены на рис. 3 кривыми 1 и 2 соответственно.

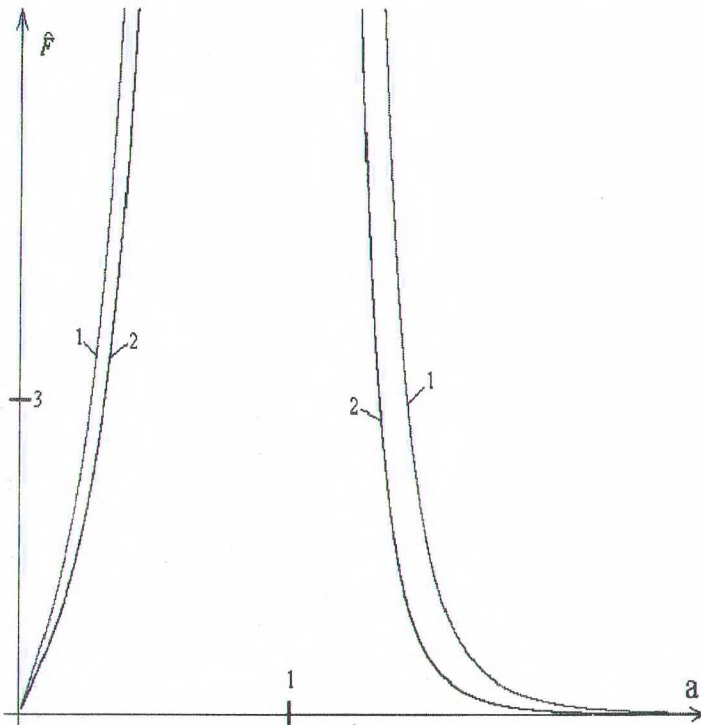


Рис. 3

Плавание магнитного диполя в сферическом сосуде с магнитной жидкостью (внутреннее взаимодействие) рассматривалось в работах [6], [7]. Формулы (12) и (13) согласуются с результатами [6] в общей области их применимости. Новыми результатами настоящей работы являются постановка задачи о внешнем взаимодействии сферических тел в магнитной жидкости и доказательство того, что формулы (12), (13) имеют физический смысл во всей области изменения параметра a ($0 < a < \infty$) и описывают как внутреннее, так и внешнее взаимодействие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баштовой В.Г., Берковский Б.М., Вислович А.Н. Введение в термомеханику магнитных жидкостей. М., ИВТАН СССР, 1985. 188 с.
2. Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М. Химия. 1989.
3. Берковский Б.М., Вислович А.Н., Ждановский А.А., Фертман В.Е. Магнито-жидкостный подшипник. АС 883581. 1980.
4. Берковский Б.М., Вислович А.Н. Цилиндрический магнито-жидкостный подвес // Десятое рижское совещание по магнитной гидродинамике. Саласпилс. 1981. С.97–98.
5. Вислович А.Н., Лобко С.И., Лобко Г.С. Взаимодействие твердых тел, взвешенных в магнитной жидкости в однородном поле. Магнитная гидродинамика. 1986. №4. С.43–51.
6. Налетова В.А., Моисеева Л.А., Турков В.А. Левитация магнита в магнитной жидкости в сферическом сосуде // Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика, механика. 1997. в 4. С. 32–34.
7. Налетова В.А., Турков В.А. Вынужденные колебания магнита в намагничивающейся жидкости в вибрирующем сосуде // Труды МИРАН. М.: МИРАН, 1998. Т. 223. С. 233–237.