Доклады Академии наук БССР

1973 Том XVII № 7

УДК 539.55+539.6

В. Б. НЕМЦОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ГИРОТРОПНОЙ СРЕДЕ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

(Представлено академиком АН БССР М. А. Ельяшевичем)

Развитие теории систем с внутренними и вращательными степенями свободы связано с привлечением новых методов исследования (см., напр. ([1–8]), и приведенную там библиографию). Уже учет вращательных степеней свободы позволяет установить ряд важных физических явлений. Среди них можно отметить интересные особенности распространения звука в негиротропных средах ([7–9]), релеевского рассеяния света ([10]), пьезоэлектрических и оптических свойств ([11]).

Ниже показано, что распространение волн в гиротропных средах с вращательными степенями свободы сопровождается новым явлением — вращением плоскости поляризации этих волн.

Рассмотрим неограниченную однородную изотропную гиротропную диссипативную среду, напряженное состояние которой характеризуется двумя несимметричными тензорами обычных τ_{ik} и моментных π_{ik} напряжений. Соответствующие им тензоры деформации $\varepsilon_{ik}=\partial u_i/\partial x_k - \varphi_m e_{mki}$, $\gamma_{ik}=\partial\varphi_i/\partial x_k$ выражаются через кинематически независимые векторы малых смещения u_i и угла поворота φ_i частиц среды ([2, 6]).

Связь между напряжениями и деформациями с учетом диссипативных явлений в среде описывается с помощью комплексных модулей упругости ([6]):

$$\begin{aligned} \tau_{ik} &= \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ik}+2\mu\varepsilon^s_{ik}+2\delta\varepsilon^a_{ik}+\alpha\gamma_{mm}\delta_{ik}+2\eta\gamma^s_{ik}+2\theta\gamma^a_{ik}; \\ \pi_{ik} &= \alpha\varepsilon_{mm}\delta_{ik}+2\eta\varepsilon^s_{ik}+2\theta\varepsilon^a_{ik}+\beta\gamma_{mm}\delta_{ik}+2\nu\gamma^s_{ik}+2\zeta\gamma^a_{ik}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь λ и μ — комплексные «константы» Ляме, остальные величины являются новыми модулями упругости, отсутствующими в среде без вращательных степеней свободы. Индексы s и a означают симметричную и антисимметричную части тензоров деформации. Для негиротропной среды модули упругости α, η и θ отсутствуют. Определяющие уравнения (1) записаны с учетом соотношений взаимности Онзагера, которые следуют из статистических выражений для комплексных модулей упругости ([6]).

Законы сохранения

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\tau_{ik}}{\partial x_k}, \quad j\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\pi_{ik}}{\partial x_k}+e_{imn}\tau_{nm} \tag{2}$$

совместно с (1) определяют уравнения для полей векторов смещения и угла поворота частицы среды в случае периодических процессов с частотой ω:

$$\rho\omega^2\mathbf{u} + (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\mu+\delta)\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} +$$
$$+ (\alpha+2\eta)\nabla(\nabla\cdot\vec{\varphi}) - (\eta+\theta)\nabla\times\nabla\times\vec{\varphi} + 2\delta\nabla\times\vec{\varphi} = 0, \tag{3}$$
$$j\omega^2\vec{\varphi} + (\alpha+2\eta)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - (\eta+\theta)\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} + (\beta+2\nu)\nabla(\nabla\cdot\vec{\varphi}) -$$
$$- (\nu+\zeta)\nabla\times\nabla\times\vec{\varphi} + 4\theta\nabla\times\vec{\varphi} + 2\delta\nabla\times\mathbf{u} - 4\delta\vec{\varphi} = 0.$$

Здесь ρ — массовая плотность, j — плотность момента инерции.

Разыскивая решение уравнений (3) в виде

$$\mathbf{u} = \nabla\xi + \nabla\times\mathbf{H}\,(\nabla\cdot\mathbf{H} = 0); \quad \vec{\varphi} = \nabla\psi + \nabla\times\vec{\Phi}\,(\nabla\cdot\vec{\Phi} = 0), \tag{4}$$

получим уравнения для скалярных и векторных потенциалов ξ, ψ, $\mathbf{H}$ и $\vec{\Phi}$:

$$\rho\omega^2\xi + (\lambda+2\mu)\nabla^2\xi + (\alpha+2\eta)\nabla^2\psi = 0,$$
$$j\omega^2\psi + (\alpha+2\eta)\nabla^2\xi + (\beta+2\nu)\nabla^2\psi - 4\delta\psi = 0, \tag{5}$$
$$\rho\omega^2\mathbf{H} + (\mu+\delta)\nabla^2\mathbf{H} + (\eta+\theta)\nabla^2\vec{\Phi} + 2\delta\nabla\times\vec{\Phi} = 0,$$
$$j\omega^2\vec{\Phi} + (\eta+\theta)\nabla^2\mathbf{H} + (\nu+\xi)\nabla^2\vec{\Phi} + 4\theta\nabla\times\vec{\Phi} + 2\delta\nabla\times\mathbf{H} - 4\delta\vec{\Phi} = 0.$$

Первое уравнение в (5) определяет распространение продольной волны смещения, а второе — продольной волны угла поворота. В отличие от негиротропной среды эти продольные волны связаны друг с другом.

Третье и четвертое уравнения описывают связанные поперечные волны смещения и угла поворота. В предельном переходе к случаю классической среды (обращение в нуль дополнительных модулей упругости) первое и третье уравнения становятся уравнениями для обычных продольных и сдвиговых волн.

Рассмотрим решение третьего и четвертого уравнений (5) в виде плоских волн

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \vec{\Phi} = \mathbf{B}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

Для комплексных амплитуд $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ получим уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta_1\mathbf{A} + (\eta+\theta)k^2\mathbf{B} + i2\delta\mathbf{k}\times\mathbf{B} = 0;\\ &\Delta_2\mathbf{B} + 4i\theta\mathbf{k}\times\mathbf{B} - 2i\delta\mathbf{k}\times\mathbf{A} + (\eta+\theta)k^2\mathbf{A} = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\Delta_1 = (\mu+\delta)k^2 - \rho\omega^2, \quad \Delta_2 = (\nu+\zeta)k^2 + 4\delta - j\omega^2.$$

В силу соленоидальности $\mathbf{H}$ и $\vec{\Phi}$ векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ поперечны волновому вектору $\mathbf{k}$. Тогда можно ввести компоненты A_1, A_2, B_1, B_2 векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в плоскости, нормальной волновому вектору.

Исключая компоненты векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в равенствах (6), получим дисперсионное уравнение

$$\{\Delta_1\Delta_2 - k^4(\eta+\theta)^2 - 4\delta^2k^2 - 4k[\Delta_1\theta - \delta k^2(\eta+\theta)]\} \times$$
$$\times \{\Delta_1\Delta_2 - k^4(\eta+\theta)^2 - 4\delta^2k^2 + 4k[\Delta_1\theta - \delta k^2(\eta+\theta)]\} = 0. \tag{7}$$

Для циркулярных компонент $A^{\pm}=A_1 \pm iA_2$, $B^{\pm}=B_1 \pm iB_2$ на основании (6) получим

$$\{\Delta_1\Delta_2 - k^4(\eta+\theta)^2 - 4\delta^2k^2 \mp 4k[\Delta_1\theta - \delta k^2(\eta+\theta)]\} A^{\pm} = 0 \tag{8}$$

и такое же уравнение для $B^{\pm}$.

Отсюда следует, что знаки в дисперсионном уравнении (7) соответствуют различным циркулярным компонентам.

Полагая, что члены с η и θ в (7) малы по сравнению с членами, содержащими модули упругости негиротропной среды, корни уравнения (7) при заданной вещественной частоте ω представим в виде суммы корней негиротропной среды и малых добавок, обусловленных гиротропией среды.

Для негиротропной среды корни уравнения (7) исследованы ранее как для упругого тела [7, 8], так и для жидкостей [9]. Установлено существование некоторой характерной частоты ω_* ($\omega_*=\sqrt{\frac{4\delta}{j}}$ для упругой среды). Статистические оценки [9, 12] показывают, что для сероуглерода при $T=293\,°K$ на кривой существования $\omega_* \approx 10^{12}$ *сек*$^{-1}$.

При $\omega<\omega_*$ и $\omega>\omega_*$ имеются поперечные волны смещения и угла поворота. Для жидкостей эти волны характеризуются поглощением на длину волны равным 2π при $\omega=0$, которое затем убывает с возрастанием частоты.

Кроме того, при $\omega>\omega_*$ появляются новые поперечные волны смещения и угла поворота. Частотная зависимость фазовой скорости этих волн для упругой среды обладает сингулярностью при $\omega=\omega_*$. В случае жидкостей на частотах $\omega<\omega_*$ указанные поперечные волны имеют сильное поглощение на длину волны, которое неограниченно возрастает при $\omega\to 0$ и становится равным 2π при $\omega=\omega_*$, а затем убывает при $\omega>\omega_*$. Благодаря диссипативным процессам при $\omega=\omega_*$ снимается сингулярность в частотной зависимости фазовой скорости этих волн.

Наличие двух знаков в дисперсионном уравнении имеет принципиальное значение и указывает на то, что в гиротропной среде поперечные волны смещения и угла поворота с правой и левой круговой поляризацией распространяются с различной фазовой скоростью.

Суперпозиция таких двух круговых волн в случае вещественных волновых векторов (упругая среда) дает волну линейной поляризации. Плоскость поляризации этой волны поворачивается на длине z на угол Ω, определяемый разностью волновых векторов круговых волн левой и правой поляризации ($\Omega=1/2(k_- - k_+)z$).

При наложении круговых волн с комплексными волновыми векторами (диссипативная среда), благодаря различию в поглощении волн левой и правой круговой поляризации, образуется эллиптически поляризованная волна. В этом случае происходит вращение осей эллипса.

Основываясь на результатах исследования распространения волн в негиротропных средах и предполагая малым влияние гиротропии, укажем области частот и типы волн, для которых проявляются отмеченные эффекты.

Вращение плоскости поляризации поперечных волн в гиротропной среде с вращательными степенями свободы имеет место для тех поперечных волн смещения и угла поворота, которые существуют в области частот $0<\omega<\infty$, включающей и ω_*.

Кроме того, указанный эффект осуществляется и для новых поперечных волн смещения и угла поворота, которые распространяются при частотах $\omega>\omega_*$.

Автор благодарен Л. А. Ротту и В. С. Вихренко за полезное обсуждение.

Белорусский технологический институт им. С. М. Кирова

Поступило 13. X 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Н. Зубарев, Неравновесная статистическая термодинамика, «Наука», 1971. [2] Е. В. Кувшинский, Э. Л. Аэро, ФТТ, **5**, вып. 9, 2591, 1963. [3] Л. И. Седов, УМН, **20**, вып. 5, 121, 1965; ПММ, **32**, вып. 5, 771, 1968. [4] Л. А. Покровский, ДАН СССР, **177**, № 5, 1054, 1967. [5] В. Б. Немцов, Л. А. Ротт, В. С. Вихренко, ДАН БССР, **13**, № 1, 30, 1969. [6] В. Б. Немцов, ПММ, **35**, вып. 3, 411, 1971. [7] В. А. Пальмов, ПММ, **28**, вып. 3, 401, 1964. [8] A. C. Eringen, in «Fracture», ed. by H. Liebowitz, vol. 2, p. 621, 1968. [9] V. B. Nemtsov, V. S. Vikhrenko, E. T. Brook-Levinson, L. A. Rott, Phys. Lett., **A34**, 105, 1971; В. Б. Немцов, АЖ, **19**, № 1, 113, 1973. [10] В. С. Вихренко, В. Б. Немцов, Л. А. Ротт, ЖЭТФ, **61**, вып. 5, 1769, 1971. [11] В. Б. Немцов, Весці АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 3, 114, 1972. [12] Э. Т. Брук-Левинсон, В. С. Вихренко, В. Б. Немцов, Весці АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, № 4, 129, 1971.