$$\frac{\partial \Delta_v H'(x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\Delta_v f(x(t),u(t))+$$
$$+\Delta_v f'(x(t),u(t))\Psi(t)\Delta_v f(x(t),u(t)),\ v\in U,\ t\in T.$$

Аналогичные результаты справедливы и для систем с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t)=f(x(t),x(t-h),u(t)),\quad t\in T=[0,\ t^*],\ x(t)=x_0(t),\ t\in[-h,\ 0],$$

где $h>0$ – запаздывание, $x_0(t),\ t\in[-h,\ 0]$, – заданная функция. Однако в силу присутствия запаздывания усложняются уравнения для сопряженных переменных и матричных импульсов.

Вместо постоянного запаздывания может рассматриваться и переменное, что еще больше усложняет вид результатов. В силу ограниченности объема данного сообщения результаты для систем с запаздыванием не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Книжный дом "Либроком", 2012. – 256 с.

2. Альсевич, В.В. Оптимизация динамических систем с запаздываниями. – Мн.: БГУ, 2000. – 198 с.

3. Методы оптимизации: уч. пособие / Р. Габасов [и др.]. – Мн.: изд-во “Четыре четверти”, 2011. – 472 с.

УДК 517.977

Н.М. Дмитрук, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ С ДВУМЯ МОМЕНТАМИ ЗАМЫКАНИЯ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

1. В теории управления линейными системами с возмущениями можно выделить три подхода к формулировке задач оптимального управления. Первая, простейшая, задача относится к построению оптимальной гарантирующей программы. Второй подход заключается в применении динамического программирования и формулировке задачи о построении оптимальной обратной связи. Наконец, третий подход предполагает сочетание первых двух и строит оптимальные стратегии управления с моментами замыкания [1].

Настоящий доклад посвящен построению оптимальных стратегий с двумя моментами замыкания в задаче минимизации полного импульса управления для линейной системы и развивает идеи [2].

2. Рассмотрим линейную дискретную систему

$$x(t+1) = Ax(t) + bu(t) + dw(t)\,,\ x(0) = x_0\,,\ t = 0,1,\ldots,T-1\,, \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $u(t), w(t) \in R$ – состояние, управление, неизвестное возмущение в момент времени *t*, *A*, *b*, *d* – заданные матрица и векторы соответствующей размерности.

На управления, состояния и возмущения наложены ограничения:

$$u(t) \in U = \{u \in R : |u| \le 1\}\,,\ w(t) \in W = \{w \in R : |w| \le w_{\max}\}\,,\ t = 0,1,\ldots,T-1\,,$$

$$x(T) \in X_T = \{x \in R^n : Hx \le g\}\,, \qquad (2)$$

где $H \in R^{m\times n}$, $g \in R^m$, таковы, что множество X_T ограничено.

Качество управления системой (1) оценивается величиной полного импульса управления $\sum_{t=0}^{T-1} |u(t)|$ при переводе системы с гарантией, т.е. при всех возможных реализациях возмущения [1], на терминальное множество X_T, определенное в (2). Оптимальным является управление с минимальным значением полного импульса.

3. Определим в рассматриваемой задаче оптимальную стратегию с двумя моментами замыкания. Пусть до начала процесса управления зафиксированы два момента $0 < T_1 < T_2 < T$. Они разбивают интервал управления на промежутки $\Delta_j = \{T_j, T_j+1, \ldots T_{j+1}-1\}$, *j*=0,1,2, где считается, что $T_0 = 0$, $T_3 = T$.

Управление на Δ_j будем обозначать $u_j(\cdot) = (u_j(t), t \in \Delta_j)$, возмущение – $w_j(\cdot) = (w_j(t), t \in \Delta_j)$, множества доступных на Δ_j управлений обозначим U_j, возможных возмущений – W_j. Состояние системы (1) в момент времени $t \in \Delta_j$ при начальном состоянии $x(T_j) = x_j$, управлении $u_j(\cdot)$ и возмущении $w_j(\cdot)$ будем обозначать $x(t\,|\,x_j, u_j, w_j)$. Множество возможных состояний в момент T_{j+1} обозначим $X(T_{j+1}\,|\,x_j, u_j)$.

Следуя [1], сделаем предположение: в моменты T_j, *j*=1,2, можно:

1) измерить текущее состояние $x^*(T_j) \in X(T_{j+1}\,|\,x_j, u_j)$ системы;

2) в зависимости от $x^*(T_j)$ выбрать новое управление $u_j(\cdot\,|\,x^*(T_j))\in U_j$.

Поскольку состояния $x^*(T_j)$, j = 1, 2, заранее не известны, решение задачи будем искать в виде стратегии управления $\pi_0(0,x_0)$.

Определение 1. Стратегией управления с моментом замыкания T_2 на $\{\Delta_1,\Delta_2\}$ назовем совокупность

$$\pi_1(T_1,x_1)=\{u_1(\cdot\,|\,x_1);u_2(\cdot\,|\,x_2),x_2\in X(T_2\,|\,x_1,u_1)\}, \tag{3}$$

состоящую из управления $u_1(\cdot\,|\,x_1)\in U_1$ на Δ_1 и семейства управлений $u_2(\cdot\,|\,x_2)\in U_2$ на Δ_2 для всех возможных состояний x_2 в момент T_2.

Стратегией управления с двумя моментами замыкания T_1,T_2 назовем совокупность, состоящую из управления $u_0(\cdot\,|\,x_0)\in U_0$ на Δ_0 и семейства стратегий (3):

$$\pi_0(0,x_0)=\{u_0(\cdot\,|\,x_0);\pi_1(T_1,x_1),x_1\in X(T_1\,|\,x_0,u_0)\}. \tag{4}$$

Определение 2. Управление $u_0(\cdot\,|\,x_0)$ в (4) и $u_1(\cdot\,|\,x_1)$ в (3) будем называть начальной программой (на Δ_0 и Δ_1, соответственно).

Для получения условий допустимости и оптимальности стратегий управления (3), (4) применяем стандартные рассуждения динамического программирования, в результате имеем уравнение Беллмана:

$$V_j(x_j)=\min_{u_j\in U_j}\max_{w_j\in W_j}\left\{\sum\nolimits_{t\in\Delta_j}|u_j(t)|+V_{j+1}\Big(x(T_{j+1}\,|\,x_j,u_j,w_j)\Big)\right\},\ j\text{=0,1}, \tag{5}$$

$$V_2(x_2)=\min_{u_2\in U_2}\sum\nolimits_{t\in\Delta_2}|u_2(t)|,\ X(T\,|\,x_2,u_2)\subset X_T.$$

Решение задач (5) дает оптимальные начальные программы на соответствующих участках. Вычисление управления $u_2(\cdot\,|\,x_2)\in U_2$ не составляет труда, поскольку это задача построения оптимальной гарантирующей программы, как в [2].

С целью вычисления оптимальных начальных программ $u_0(\cdot\,|\,x_0)$ и $u_1(\cdot\,|\,x_1)$ преобразуем задачу (5), j=0,1:

$$V_j(x_j)=\min_{\alpha,u_j\in U_j}\left\{\sum\nolimits_{t\in\Delta_j}|u_j(t)|+\alpha\right\}, \tag{6}$$

$$V_{j+1}\Big(x(T_{j+1}\,|\,x_j,u_j,w_j)\Big)\le\alpha\quad\forall w_j(\cdot)\in W_j.$$

Введем в рассмотрение множества замыкания [1,2]

$$X_j(\alpha)=\left\{x\in R^n : V_j(x)\le\alpha\right\},\ j\text{=1,2}, \tag{7}$$

где $\alpha\in R$ таково, что $X_j(\alpha)\ne\varnothing$. Понятно, что $\alpha\le T-T_j$.

Теперь задачу (6) представим как

$$V_j(x_j)=\min_{\alpha,u_j\in U_j}\left\{\sum\nolimits_{t\in\Delta_j}|u_j(t)|+\alpha\right\}, \qquad (8)$$

$$x(t+1)=Ax(t)+bu_j(t)+dw_j(t),\ x(T_j)=x_j,\ |u_j(t)|\le 1,\ t\in\Delta_j,$$

$$x(T_{j+1})\in X_{j+1}(\alpha)\quad \forall w_j(\cdot)\in W_j,\ \alpha\le T-T_{j+1}.$$

Задача (8) – задача оптимального управления, в которой требуется перевести систему (1) на промежутке Δ_j с гарантией на множество замыкания (7), минимизируя при этом сумму полного импульса управления и параметра, определяющего конкретное множество замыкания. Центральный результат работы – описание свойств множеств (7).

Утверждение 1. Множество $X_2(\alpha)$ при любом $\alpha\le T-T_2$ есть выпуклый многогранник, систему нормалей $\{p_{2i}\}_{i=1}^{l_2}$ к граням которого составляют векторы $\pm d_2(t)^{\perp}, t\in\Delta_2$, $\left(d_2(t_1)\pm d_2(t_2)\right)^{\perp}, t_1,t_2\in\Delta_2, \pm h_k' A^{T-T_2}$, k=1,2,…,m, где $d_2(t)=A^{T_2-t-1}b$, $t\in\Delta_2$.

Пусть далее, P_2 – матрица, строками которой являются p_{2i}; Q_2 – матрица, строками которой являются векторы $q_{2i}=(|p_{2i}'d_2(t)|, t\in\Delta_2)$, в которых элементы отсортированы в порядке убывания; вектор $\omega_2(\alpha)=(1,\dots,1,\{\alpha\},0,\dots,0)\in R^{T-T_2}$, $\{\alpha\}$ – дробная часть α, находится на месте [α]+1, [α] – целая часть α; $g_2=(g_{2i}, i=1,2,\dots,l_2)$:

$$g_{2i}=\min_y (g-\gamma_2)'y,\ y'HA^{T-T_2}=p_{2i}',\ y\ge 0,$$

где $\gamma_2=w_{\max}\sum\nolimits_{t\in\Delta_2}|HA^{T-t-1}d|$.

Утверждение 2. Множество замыкания $X_2(\alpha)$, $\alpha\le T-T_j$, имеет вид

$$X_2(\alpha)=\{x\in R^n : P_2x\le g_2+Q_2\omega_2(\alpha)\}. \qquad (9)$$

Обозначим $d_1(t)=A^{T_1-t-1}b$, $t\in\Delta_1$; $q_{1i}(y)=(y'Q_2, |p_{1i}'d_1(t)|, t\in\Delta_1)$ таковы, что их элементы отсортированы в порядке убывания; $\omega_1(\alpha)$ построена по тем же правилам, что и $\omega_2(\alpha)$, имеет размерность как у векторов $q_{1i}(y)$; $g_{1i}(y)=(g_2-\gamma_1)'y$, $\gamma_1=w_{\max}\sum\nolimits_{t\in\Delta_1}|P_2A^{T-t-1}d|$; Y_i – конечное подмножество из $\{\, y'P_2A^{T_2-T_1}=p_{1i}',\ y\ge 0\,\}$, состоящее из векторов оптимальных двойственных переменных в задачах вида $\max p_{1i}'x, x\in X_1(\alpha)$.

Утверждение 3. Множество $X_1(\alpha)$ при любом $\alpha \le T - T_1$ есть выпуклый многогранник. Если известна система нормалей $\{p_{1i}\}_{i=1}^{l_1}$, то множество замыкания $X_1(\alpha)$, $\alpha \le T - T_1$, имеет вид

$$X_1(\alpha) = \{x \in R^n : p'_{1i}x \le g_{1i}(y) + q'_{1i}(y)\omega_1(\alpha),\ y \in Y_i,\ i = 1,2,\ldots,l_1\}. \quad (10)$$

Задача (8) при $j = 0$, т.е. задача построения оптимальной начальной программы $u_0(\cdot \mid x_0)$ с учетом (10) примет вид:

$$V_0(x_0) = \min_{\omega_0, u_0 \in U_0} \left\{ \sum\nolimits_{t \in \Delta_0} |u_0(t)| + \|\omega_0\|_1 \right\}, \quad (11)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + bu_0(t) + dw_0(t),\ x(0) = x_0,\ |u_0(t)| \le 1,\ t \in \Delta_0,$$
$$p'_{1i}x(T_1) - q'_{1i}(y)\omega_0 \le g_{1i}(y),\ y \in Y_i,\ i = 1,2,\ldots,l_1,\ \forall w_0(\cdot) \in W_0,$$
$$\omega_0 \ge 0,\ \alpha \le T - T_1.$$

Задача (8) при $j = 1$, т.е. задача построения оптимальной начальной программы $u_1(\cdot \mid x_1)$ с учетом (9) примет вид:

$$V_1(x_1) = \min_{\omega_1, u_1 \in U_1} \left\{ \sum\nolimits_{t \in \Delta_0} |u_1(t)| + \|\omega_1\|_1 \right\}, \quad (12)$$

$$x(t+1) = Ax(t) + bu_1(t) + dw_1(t),\ x(T_1) = x_1,\ |u_1(t)| \le 1,\ t \in \Delta_1,$$
$$P_2x(T_2) - Q\omega_1 \le g_2,\ \forall w_1(\cdot) \in W_1,$$
$$\omega_1 \ge 0,\ \alpha \le T - T_2.$$

Задачи (11) и (12) далее могут сведены к задачам линейного программирования, аналогично тому, как подобные задачи сводились в [1,2].

Основным преимуществом оптимальных стратегий с замыканиями является простота их построения и повышение качества управления в сравнении с оптимальными гарантирующими программами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дмитрук, Н.М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления / Н.М. Дмитрук // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2022. – Т. 28, № 3. – С. 66–82.

2. Дмитрук, Н.М. Оптимальная стратегия с одним моментом замыкания в линейной задаче оптимального гарантированного управления // Ж. выч. мат. и матем. физики. – 2018. – Т. 58, № 5. – С. 664–681.