Продолжение таблицы 2

1	2
2.9.5, 2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-\alpha & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix},$ при $\alpha \neq 0 \quad q_{22} = -2p_{12}$
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{12} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23}-1 & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

Найдены и описаны в явном виде трехмерные редуктивные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиаффинную, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 13. – P. 1–19.

2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.

3. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.

4. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263p.

5. Можей, Н.П. Трехмерные редуктивные пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, № 6 (99), 2016, С. 74–81.

УДК 62-50

В.В. Альсевич, проф., канд. физ.-мат. наук;
Н.И. Чеботаревский, студ. (БГУ, г. Минск)

ОСОБЫЕ ПРОГРАММЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Особым управлениям (или программам) и выводу условий оптимальности особых управлений посвящено множество работ, среди которых следует выделить [1, 2]. В этих работах, как и во многих других, исследуются особые управления в простейших задачах, когда функционалы не зависят от промежуточных состояний системы управления. Это намного упрощает исследования, поскольку решения сопряженной системы и матричных импульсов являются непрерывно дифференцируемыми функциями. В данном сообщении приведены условия оптимальности особых управлений для специального функционала, зависящего от промежуточных состояний.

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$J(u) = \varphi(x(\tau_1), ..., x(\tau_k)) \to \min, \tag{1}$$

$$\dot{x} = f(x, u), \quad t \in T = [0, t^*], \ x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$u(t) \in U, \ t \in T. \tag{3}$$

Здесь $x = x(t) \in \mathbf{R}^n$ – состояние объекта в момент времени t; $u = u(t) \in \mathbf{R}^r$ – значение управляющего воздействия; t – скаляр (время); x_0 – начальное состояние; T – фиксированный промежуток времени управления, $0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_k = t^*$.

Класс доступных управляющих воздействий – это кусочно-непрерывные (справа) функции $u(t), t \in T$, удовлетворяющие условию (3), где $U \subset \mathbf{R}^r$ – заданное множество. Поскольку в данной задаче нет ограничений на конечное (терминальное) состояние, то доступное управляющее воздействие называют программой [3].

Обозначим $y = (y_i = x(\tau_i), i = \overline{1,k})$. Предположим, что функции $f(x,u), \varphi(y)$ непрерывны вместе с $\partial f / \partial x, \ \partial^2 f / \partial x^2, \partial\varphi / \partial y, \partial^2\varphi / \partial y^2$.

Пусть $u(t), t \in T$, – некоторая программа, $x(t), t \in T$, – соответствующая траектория системы (2). $H(x,\psi,u) = \psi' f(x,u)$, где $\psi = \psi(t), t \in T$, – соответствующее решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H(x(t), \psi, u(t))}{\partial x}, \ t \in T, \tag{4}$$

с граничным условием

$$\psi(t^*) = -\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_k} \tag{5}$$

и условиями скачков

$$\psi(\tau_i - 0) - \psi(\tau_i + 0) = -\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y_i}, \ i = \overline{1, k-1}. \tag{6}$$

Заметим, что все вектора понимаются как вектор-столбцы, штрих ($'$) – оператор транспонирования.

Используя общепринятую методику, можно показать, что в задаче (1)-(3) оптимальная программа $u(t), t \in T$, вместе с соответствующими решениями $x(t), t \in T$, системы (2) и $\psi = \psi(t), t \in T$, сопряженной системы (4)–(6) удовлетворяют условию максимума

$$H(x(t),\ \psi(t),\ u(t)) = \max_{u \in U} H(x(t),\ \psi(t),\ u),\quad t \in [0,\ t^*). \tag{7}$$

Как известно [1, 2], условие (7) может вырождаться, когда существуют непустые множества $\sigma \in T$, $mes\sigma \neq 0$, на которых либо максимум в (7) достигается не на одном элементе, либо функция H не зависит на этом множестве от u. В этом случае условие (7) становится неэффективным. Для простоты будем считать, что $\sigma = T$. Тогда программу $u(t)$, $t \in T$, называют особой, если выполняется тождество

$$\Delta_v H(x(t),\ \psi(t),\ u(t)) \equiv 0,\ \ v \in U,\ t \in T.$$

Здесь $\Delta_v H(x,\ \psi,\ u) = H(x,\ \psi,\ v) - H(x,\ \psi,\ u)$.

На особой программе $u(t), t \in T$, и соответствующем решении $x(t), t \in T$, системы (2) определим следующие функции. Пусть функции $F(\tau_j, t),\ t \in [\tau_i, \tau_j],\ i = \overline{1, k-1},\ j = \overline{i+1, k}$, – решения систем

$$\frac{\partial F(\tau_j, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} F(\tau_j, t),\ \ t \le \tau_j, F(\tau_j, \tau_j) = E,\ j = \overline{2, k},$$

где E – единичная матрица; $\Psi(t)$, $t \in T$, – решение системы

$$\dot{\Psi}(t) = -\frac{\partial f'(x(t), u(t))}{\partial x}\Psi(t) - \Psi(t)\frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} -$$

$$-\frac{\partial^2 H(x(t), \psi(t), u(t))}{\partial x^2}, t \in T, \tag{8}$$

с граничным условием

$$\Psi(t^*) = -\frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_k^2} \tag{9}$$

и скачками

$$\Psi(\tau_i - 0) - \Psi(\tau_i + 0) = -\frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_i^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=i+1}^{k}\left(\frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_i \partial y_j} F(\tau_j, \tau_i) + F'(\tau_j, \tau_i)\frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y_j \partial y_i}\right), i = \overline{1, k-1}. \tag{10}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Каждая особая оптимальная программа* $u(t), t \in T$, *задачи* (1)-(3) *вместе с соответствующими решениями* $x(t), t \in T$, *системы* (2), $\psi = \psi(t), t \in T$, *сопряженной системы* (4)–(6), $\Psi(t), t \in T$, *системы* (8)–(10) *удовлетворяет условию*

$$\frac{\partial \Delta_v H'(x(t),\psi(t),u(t))}{\partial x}\Delta_v f(x(t),u(t)) +$$
$$+\Delta_v f'(x(t),u(t))\Psi(t)\Delta_v f(x(t),u(t)),\ v\in U,\ t\in T.$$

Аналогичные результаты справедливы и для систем с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = f(x(t),x(t-h),u(t)),\quad t\in T=[0,\ t^*],\ x(t)=x_0(t),\ t\in[-h,\ 0],$$

где h>0 – запаздывание, $x_0(t),\ t\in[-h,\ 0],$ – заданная функция. Однако в силу присутствия запаздывания усложняются уравнения для сопряженных переменных и матричных импульсов.

Вместо постоянного запаздывания может рассматриваться и переменное, что еще больше усложняет вид результатов. В силу ограниченности объема данного сообщения результаты для систем с запаздыванием не приводятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. – М.: Книжный дом "Либроком", 2012. – 256 с.

2. Альсевич, В.В. Оптимизация динамических систем с запаздываниями. – Мн.: БГУ, 2000. – 198 с.

3. Методы оптимизации: уч. пособие / Р. Габасов [и др.]. – Мн.: изд-во “Четыре четверти”, 2011. – 472 с.

УДК 517.977

Н.М. Дмитрук, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ С ДВУМЯ МОМЕНТАМИ ЗАМЫКАНИЯ В ЗАДАЧЕ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛНОГО ИМПУЛЬСА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

1. В теории управления линейными системами с возмущениями можно выделить три подхода к формулировке задач оптимального управления. Первая, простейшая, задача относится к построению оптимальной гарантирующей программы. Второй подход заключается в применении динамического программирования и формулировке задачи о построении оптимальной обратной связи. Наконец, третий подход предполагает сочетание первых двух и строит оптимальные стратегии управления с моментами замыкания [1].