

РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ

В работе обсуждается существование и свойства инвариантных связностей на однородных пространствах, результаты Вана [1] применяются к ситуации, когда существует инвариантная структура на однородном пространстве, а именно, на редуктивном пространстве. Инвариантные связности на редуктивных однородных пространствах изучались П.К. Рашевским, М. Куритой, Э.Б. Винбергом, Ш. Кобаяси, К. Номидзу [2] и др. Понятие нормальной связности ввел Э. Картан (для риманова многообразия, см. [3]).

Класс пространств с симметрическим тензором Риччи значительно шире класса римановых пространств, это так называемые пространства эквиаффинной связности. Они, вообще говоря, не обладают метрикой, но в их касательных пространствах можно ввести измерение объемов так, что объем n -мерного параллелепипеда, построенного на n векторах, сохраняется при параллельном перенесении этих векторов по любому пути.

Соответствующее свойство можно принять за определение пространств эквиаффинной связности. Аффинная связность является эквиаффинной, если допускает параллельную форму объема (см. [4]). Трехмерные редуктивные однородные пространства разрешимых групп Ли изучались в [5], в данной работе определяется, при каких условиях пространство допускает нормальную связность, но не допускает эквиаффинную.

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пространство редуктивно, если алгебра Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ может быть разложена в прямую сумму векторных пространств – алгебры Ли \mathfrak{g} и $\text{ad}(G)$ -инвариантного подпространства \mathfrak{m} . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры \mathfrak{g} , а все отображение является

\mathfrak{g} -инвариантным. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид: $T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m$, $R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$ имеет вид $Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Будем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквиаффинной, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$ (то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$). Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиаффинна.

Под эквиаффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$, тогда $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$. Через $\{e_1, \dots, e_n\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$). Будем полагать, что \mathfrak{g} порождается e_1, \dots, e_{n-3} , а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в [5], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$.

Теорема. Все трехмерные редуцированные однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиаффинную, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, а $\dim \mathfrak{g} > 1$, локально имеют следующий вид:

<u>2.9.4, $\mu = 0$</u>		<u>e_1</u>	<u>e_2</u>	<u>u_1</u>	<u>u_2</u>	<u>u_3</u>	
	e_1	0	e_2	u_1	0	0	
	e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	
	u_1	$-u_1$	0	0	u_1	0	,
	u_2	0	0	$-u_1$	0	$-u_3$	
	u_3	0	$-u_1$	0	u_3	0	
<u>2.9.5, 2.9.6</u>		<u>e_1</u>	<u>e_2</u>	<u>u_1</u>	<u>u_2</u>	<u>u_3</u>	
	e_1	0	e_2	u_1	0	0	
	e_2	$-e_2$	0	0	0	u_1	,
	u_1	$-u_1$	0	0	0	$\pm e_2$	$, \alpha \geq 0$,
	u_2	0	0	0	0	αu_2	
	u_3	0	$-u_1$	$\mp e_2$	$-\alpha u_2$	0	

2.9.7		e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1		0	e_2	u_1	0	0
e_2		$-e_2$	0	0	0	u_1
u_1		$-u_1$	0	0	0	0
u_2		0	0	0	0	u_2
u_3		0	$-u_1$	0	$-u_2$	0

Доказательство для случая нормальной связности приведено в [5]. Выберем из пространств, найденных в [5], не допускающие эквиваффинных связностей.

В частности, для пар 2.9.4 ($\mu=0$), 2.9.5, 2.9.6, 2.9.7 аффинные связности имеют вид

$$\Lambda(u_1) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & q_{11} \end{pmatrix}, \Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 & 0 \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & r_{11} + p_{13} \end{pmatrix},$$

где $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1,3}$. В табл. 0 приведены тензоры кручения указанных связностей.

Таблица 1 – Тензоры кручения

Пара	Тензоры кручения $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$
2.9.4 при $\mu=0$	$(p_{12} - q_{11} - 1, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22}, q_{11} - p_{12} + 1)$
2.9.5, 2.9.6.	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22} - \alpha, q_{11} - p_{12})$
2.9.7.	$(p_{12} - q_{11}, 0, 0), (p_{13} - r_{11}, 0, 0), (0, q_{23} - r_{22} - 1, q_{11} - p_{12})$

Тогда локально эквиваффинные связности (без кручения) на трехмерных редуктивных однородных пространствах разрешимых групп Ли, приведенных в теореме, принимают вид, приведенный в табл. 2. Во всех приведенных случаях $\text{tr}\Lambda(e_1) \neq 0$, поэтому пары не допускают эквиваффинных связностей.

Прямыми вычислениями получаем, что других трехмерных редуктивных однородных пространств разрешимых групп Ли, допускающих нормальную связность, но не допускающих эквиваффинную, не существует.

Таблица 2 – Локально эквиваффинные связности

Пара	Локально эквиваффинная связность (без кручения) $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$
1	2
2.9.4, $\mu=0$	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & -3p_{13} \\ 0 & 0 & p_{1,2} - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & -3p_{13} & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

1	2
2.9.5, 2.9.6	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} - \alpha & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix},$ <p style="text-align: center;">при $\alpha \neq 0 \quad q_{22} = -2p_{12}$</p>
2.9.7	$\begin{pmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & -2p_{12} & q_{23} \\ 0 & 0 & p_{1,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_{13} & 0 & 0 \\ 0 & q_{23} - 1 & r_{23} \\ 0 & p_{12} & 2p_{13} \end{pmatrix}$

Найдены и описаны в явном виде трехмерные редуцируемые однородные пространства, допускающие нормальную связность, но не допускающие эквиаффинную, рассмотрен случай разрешимой группы Ли преобразований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang, H. C. On invariant connections over a principal fibre bundle / H. C. Wang // Nagoya Math. J. – 1958. – No 13. – P. 1–19.
2. Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 2 т.
3. Картан, Э. Риманова геометрия в ортогональном репере / Э. Картан. – М. : Моск. ун-т, 1960. – 307 с.
4. Nomizu, K. Affine differential geometry / K. Nomizu, T. Sasaki. – Cambridge Univ. Press, 1994. – 263p.
5. Можей, Н.П. Трехмерные редуцируемые пространства разрешимых групп Ли / Н. П. Можей // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины, № 6 (99), 2016, С. 74–81.

УДК 62-50

В.В. Альсевич, проф., канд. физ.-мат. наук;
Н.И. Чеботаревский, студ. (БГУ, г. Минск)

ОСОБЫЕ ПРОГРАММЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Особым управлениям (или программам) и выводу условий оптимальности особых управлений посвящено множество работ, среди которых следует выделить [1, 2]. В этих работах, как и во многих других, исследуются особые управления в простейших задачах, когда