УДК 514.144 + 514.755.44

Н.П. Можей, старший преподаватель

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ЭКВИАФФИННОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ОПЕРАТОРЫ ФОРМЫ

This paper is devoted to the description of locally homogeneous submanifolds with stabilizer in four-dimensional equiaffine geometry, their symmetry algebras and shape operators.

В статье основные факты аффинной дифференциальной геометрии изложены на языке алгебр Ли. Поскольку в работе исследуются только однородные подмногообразия, то все векторные поля и операторы полностью определяются своими значениями в фиксированной точке.

Аффинные связности на однородном пространстве

Предположим, что многообразие M снабжено транзитивным действием группы Ли G. Зафиксируем произвольную точку $o \in M$ и определим $G_0 \subset G$ как стабилизатор точки o. Пусть g — алгебра Ли группы Ли G, а $\mathfrak{g}_o$ — подалгебра в g, соответствующая подгруппе G_0. Тогда многообразие M может быть отождествлено с многообразием левых смежных классов G/G_0, а действие G на M при таком отождествлении принимает вид $g_1(g_2G_0) = (g_1g_2)G_0$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Точка o при этом отождествляется со смежным классом eG_0, а касательное пространство T_0M — с факторпространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ (см. [1]). В дальнейшем мы будем предполагать, что G_0 — связная подгруппа, что всегда можно сделать, ограничиваясь локальной точкой зрения. Изотропное действие группы G_0 на T_0M — это фактордействие присоединенного действия G_0 на g:

$$g.(x + \mathfrak{g}_0) = (\mathrm{Ad}\, g)(x) + \mathfrak{g}_0, \quad \text{для всех } g \in G_0, \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Мы предположили, что подгруппа G_0 связна, следовательно, можно заменять везде требование G_0-инвариантности на инвариантность относительно соответствующих действий алгебры Ли $\mathfrak{g}_o$. При этом алгебра Ли $\mathfrak{g}_o$ действует на касательном пространстве $T_0M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ следующим образом:

$$x.(y + \mathfrak{g}_0) = [x, y] + \mathfrak{g}_0 \qquad \text{для всех } x \in \mathfrak{g}_0, \quad y \in \mathfrak{g}.$$

Пусть (M, G) — однородное пространство, тогда (g, g_0) — соответствующая пара алгебр Ли. *Аффинной связностью* на паре (g, g_0) называется такое отображение $\Lambda : g \to gl(V)$, где $V = g/g_0$, что

(i) $\Lambda|_{g_0} = \lambda$ есть изотропное представление подалгебры $\mathfrak{g}_o$,

(ii) отображение Λ g_0-инвариантно.

Хорошо известно (см., например, [2]), что инвариантные аффинные связности на однородном пространстве (M,G) находятся во взаимно-однозначном соответствии с аффинными связностями на паре (g,g_0).

Определим ряд элементов в $\mathrm{InvT}(V)$ — пространстве инвариантных тензоров, построенных по связности Λ. Тензор кручения $T\in \mathrm{InvT}_2^1(V)$ имеет вид

$$T(X_V,Y_V)=\Lambda(X)Y_V-\Lambda(Y)X_V-[X,Y]_V;$$

тензор кривизны $R\in \mathrm{InvT}_3^1(V)$ имеет вид

$$R(X_V,Y_V)=[\Lambda(X),\Lambda(Y)]-\Lambda([X,Y]).$$

Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T=0$. Далее всегда будем предполагать, что связности имеют нулевое кручение. Если $R=0$, то будем говорить, что связность Λ является *плоской.* Таким образом, связность Λ является плоской тогда и только тогда, когда $R=0$ и $T=0$.

Будем говорить, что аффинная связность Λ является *локально эквиаффинной*, если $\mathrm{tr}\,\Lambda([X,Y])=0$ для всех $X,Y\in \mathfrak{g}$.

Под *эквиаффинной связностью* мы понимаем аффинную связность Λ без кручения, для которой $\mathrm{tr}\,\Lambda(X)=0$ для всех $X\in \mathfrak{g}$.

Аффинные вложения однородных пространств

Напомним, что все связности имеют нулевое кручение.

Пусть (g,g_0,Λ) и $(\tilde{g},\tilde{g}_0,\tilde{\Lambda})$ — две пары алгебр Ли с эквиаффинными связностями.

Аффинным вложением (g,g_0,Λ) в $(\tilde{g},\tilde{g}_0,\tilde{\Lambda})$ называется такой гомоморфизм алгебр Ли $f:g\to\tilde{g}$, что

(i) $f(g_0)=f(g)\cap\tilde{g}_0$;

(ii) существует такое k-мерное дополнение N к $V=g/g_0$ в $\tilde{V}=\tilde{g}/\tilde{g}_0$ (то есть $\tilde{V}=N\oplus V$), что

$$\tilde{\Lambda}(f(X))f_V(Y_V)=f_V(\Lambda(X)Y_V)+\alpha(X_V,Y_V), \qquad (1)$$

где $\alpha:V\times V\to N$ — некоторое билинейное отображение.

Предположим теперь, что — произвольная подалгебра алгебры Ли ˜. Тогда мы можем определить $g_0=g\cap\tilde{g}_0$, а формула (1) корректно определяет некоторую связность Λ без кручения на паре (g,g_0), которую мы будем называть *индуцированной связностью.*

В дальнейшем нас в первую очередь будет интересовать случай $k=1$. В этом случае запишем формулу Гаусса

$$\tilde{\Lambda}(f(X))f_V(Y_V)=f_V(\Lambda(X)Y_V)+h(X_V,Y_V)\xi,$$

где $X_V,Y_V\in V$, ξ — произвольный ненулевой вектор в $\tilde{V}$, не лежащий в V, а $h:V\times V\to R$ — симметрическая билинейная форма на V.

Будем называть форму h *аффинной фундаментальной формой* (относительно трансверсального вектора ξ).

Назовем *рангом вложения* ранг формы h.

Пусть $\tilde{g} = sl(n+1,R) \prec R^{n+1}$, $\tilde{g}_0 = sl(n+1,R),$, а связность Λ равна тождественно нулю на дополнении R^{n+1} к $\tilde{g}_0$.

В этом случае мы будем говорить, что отображение $f: g \to \tilde{g}$ является аффинным вложением тройки (g, g_0, Λ), если найдется такой трансверсальный вектор $\xi \in R^{n+1}$, что имеет место формула Гаусса. Таким образом, если (g, g_0) — произвольная пара алгебр Ли коразмерности n и $f: g \to \tilde{g}$ — такое вложение, что $f(g_0) = f(g) \cap \tilde{g}_0$, то выбор вектора ξ определяет при помощи формулы Гаусса индуцированную связность Λ.

Пусть, далее, вложение f невырождено.

Трансверсальный вектор ξ называется *эквиаффинным*, если $\mathrm{D}(X)\xi$ лежит в g/g_0 для всех $X \in \mathrm{g}$.

Отождествим g с подалгеброй в $\tilde{\mathrm{g}}$ при помощи вложения f. В этом случае f_* — это в точности естественная проекция $\pi: sl(n+1,R) \prec R^{n+1} \to R^{n+1}$, ограниченная на g. При этом g/g_0 естественным образом отождествляется с образом этой проекции и является n-мерным подпространством в R^{n+1}, а трансверсальный вектор ξ — это просто произвольный ненулевой вектор в R^{n+1}, не лежащий в g/g_0.

Без ограничения общности можем предположить, что

$$g/g_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, \cdots, x_n \in R \right\}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если вложение $f: g \to \tilde{g}$ невырождено (то есть форма h невырождена), то всегда найдется эквиаффинный трансверсальный вектор, причем он будет определен однозначно с точностью до константы.

Далее будем считать, без ограничения общности, что ξ — эквиаффинный трансверсальный вектор.

Тогда для всех $X \in \mathrm{g}$ имеем

$$\mathrm{D}(X)\xi = -f_*(SX_V), \qquad \text{(формула Вейнгартена)}$$

где S — оператор на g/g_0. Назовем оператор S *(аффинным) оператором формы*.

Формулы Гаусса и Вейнгартена для поверхностей в трехмерном эквиаффинном пространстве появляются еще в работах Бляшке. В дальнейшем эти формулы были обобщены на случай гиперповерхности в n+1-мерном пространстве (см., например, работу К. Номидзу и Т. Сасаки [3]).

Таким образом, чтобы *классифицировать невырожденные поверхности в эквиаффинной геометрии с заданным оператором формы и их алгебры симметрий,* нужно применить алгоритм, приведенный в статье [4], к случаю

$$\mathfrak{g}_1=\left\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad A\in \mathfrak{sl}(n,R)\right\},\quad V_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & S(v) \\ h(v) & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}\right\},\quad v\in V=R^n,$$

причем подпространство V_1 такое, что $[V_1,V_1]\xi\subset V$, то есть $HS={}^tSH$, где H — матрица аффинной фундаментальной формы, а S — матрица оператора формы. В частности, подалгебра $\mathfrak{g}_2$ должна удовлетворять следующим условиям:

$${}^tAH+HA=0,\ \text{а также}\ [A,S]=0.$$

В статье [4] были найдены следующие однородные подмногообразия:

Теорема 1

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в четырехмерной эквиаффинной геометрии, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, *либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий*:

(1) $x_4=x_3x_2+x_1{x_3}^2$;

(2) $x_4={x_1}^2+x_2x_3+{x_3}^3$;

(3) $x_1+x_3x_4+{x_2}^2+a\ln x_4=0,\ a\neq 0$;

(4) $({x_2}^2+x_1x_3)^3{x_4}^2=a^2,\ a\neq 0$;

(5) $(x_2+x_1x_3)^2x_4=a,\ a\neq 0$;

(6) $(\pm({x_1}^2+{x_2}^2)+{x_3}^2){x_4}^2=a^2,\ a\neq 0$;

(7) $(x_3\pm({x_1}^2+{x_2}^2))^2x_4=a,\ a\neq 0$.

Опишем операторы формы этих подмногообразий.

Теорема 2

Операторы формы однородных подмногообразий теоремы 1 имеют вид:

(1) вырожденная аффинная фундаментальная форма;

(2) оператор формы тождественно равен нулю;

(3) оператор формы тождественно равен нулю;

(4) оператор формы имеет вид cE;

(5) оператор диагональный с одним ненулевым собственным значением;

(6) оператор формы имеет вид cE;

(7) оператор диагональный с одним ненулевым собственным значением.

Итак, найдены операторы формы для локально однородных гиперповерхностей в четырехмерной эквиаффинной геометрии и получен алгоритм классификации невырожденных поверхностей в эквиаффинной геометрии с заданным оператором формы (и заданной аффинной фундаментальной формой) и их алгебр симметрий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии.— М.:Наука, 1981.

2. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. Journ. Math. — 1954.— Vol.76.— N.1 — P.33–65.

3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differentail geometry. — Cambridge Univ. Press, 1994.

4. Можей Н.П. Однородные подмногообразия в четырехмерной аффинной, эквиаффинной и проективной геометрии // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. Вып. IX, 2001. — С. 16–23.

УДК 517.948.32:517.544

Н.А. Дегтяренко, ассистент

РЕШЕНИЕ В ЗАМКНУТОЙ ФОРМЕ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СВЕДЕНИЯ К ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ

The review of the proved in the thesis original results is given. The objects of the research are singular integral equations with analogs of the Cauchy kernel on torus and the equation of the convolution type with four kernels and conjugation. The subject of the research is learning the properties of these objects, in particular their solvability conditions, and the construction of solutions in closed form if these conditions take place. For integral equations to be solved, the method of reducing to conjugation problems is applied. The techniques of solving of the Riemann problem on the Riemann surface of genus h are used.

Данная статья представляет собой обзор оригинальных результатов, полученных автором в процессе работы над кандидатской диссертацией. Эти результаты относятся к конструктивному направлению в теории сингулярных интегральных уравнений, для которого характерны соединение доказательств существования решений с алгоритмами построения самих решений и приоритет второго перед первым. Причем эти алгоритмы должны реализовываться с использованием по возможности наиболее простых средств. Объектами исследования являются сингулярные интегральные уравнения с аналогами ядра Коши на торе и уравнение типа свертки с четырьмя ядрами и с сопряжением. Предметом исследования является изучение свойств вышеуказанных объектов, в частности условий их разрешимости, и построение решений в замкнутой форме при выполнении этих условий. Цель исследований – получение решений в замкнутой форме нескольких сингулярных интегральных уравнений, используя метод сведения интегрального уравнения к задаче сопряжения и технику решения краевой задачи Римана на замкнутой римановой поверхности конечного рода. При написании статей [1] – [7] были использованы работы, относящиеся к конструктивному направлению, таких авторов, как Бикчантаев И.А., Ганин М.П., Гахов Ф.Д., Зверович Э.И., Комяк И.И., Тузик А.И., Черский Ю.И., Шилин А.П., и некоторых других.

В статьях [2], [4], [5], [6] исследуются и решаются сингулярные интегральные уравнения с аналогами ядра Коши на торе. В [4], [5] решается задача о нахождении в явном виде спектра и собственных функций сингулярного интегрального уравнения следующего вида: