

В.М. Марченко, профессор

К ТЕОРИИ ИМПУЛЬСНЫХ И ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ¹

The paper deals with linear nonstationary control impulse and hybrid systems. An integral representation formula for solutions of such systems is given by using an adjoint system solutions. This formula is very similar to the well-known Cauchy one in linear system theory. The results obtained are applied to the investigation of the problem of controllability for such systems and are detailed for the stationary system case.

1. Введение

В 70–80-х годах 20-го столетия специалистами по теории динамических систем с запаздывающим аргументом (СЗА) широко дискутировался вопрос о “правильной” постановке задачи Коши для систем с запаздывающим аргументом ([1–3] и др.).

Рассмотрим простейшую систему функционально-дифференциальных уравнений с управлением (ДУ)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B_1(t)v(t) + B(t)u(t), \quad t > t_0, \quad (1)$$

где $x(t) \in R^n$, $v(t) \in R^p$, $u(t) \in R^r$; $A(\cdot)$, $A_1(\cdot)$, $B(\cdot)$, $B_1(\cdot)$ — действительные матрицы соответствующих размеров с непрерывными элементами, $v(\cdot)$ — возмущение; $u(\cdot)$ — управление (как правило, кусочно-непрерывное); $0 < h$ — постоянное запаздывание.

Одни специалисты (А.Д. Мышкис и его сторонники) считали, что начальная задача Коши для ДУ (1) должна быть с условием “стыковки”:

$$x(t_0 + \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad x(t_0 + 0) = x(t_0). \quad (2)$$

Другие (Н.А. Азбелев [3] и его сторонники) не считали условие стыковки обязательным:

$$x(t_0 + \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0], \quad x(t_0 + 0) = \varphi_0 \in P^n; \quad (3)$$

здесь φ_0 , φ — начальные данные; φ — заданная, как правило, кусочно-непрерывная вектор-функция на промежутке $[-h, 0]$.

В результате этой дискуссии официальный статус в теории СЗА получили обе постановки задачи Коши. Однако скачок (3) решений допускался только в начальный момент $t = t_0$ времени. Возникает вопрос о происхождении скачка. Это мог быть “толчок” в решении системы, например воздействие δ -функции Дирака. Если он возник в реальной системе в начальный момент времени, то следует признать возможность его появления и в другие моменты времени, в частности, представляет интерес система (1), где возмущение $v(t)$ задается δ -функциями:

$$v(t) = \sum_{k=0}^T u_k \delta(t - kh), \quad t \geq t_0. \quad (4)$$

Как следствие, получаем систему (1), (4) с импульсными воздействиями. Примером такой системы может служить и следующая система “с мерами”:

¹ Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

$$dx(t) = A(t)x(t)dt + A_1(t)x(t-h)dt + B_1(t)dv(t) + B(t)du(t). \quad (5)$$

Могут быть разные подходы к вопросам определения и существования решений таких систем на промежутке $[t_0, t]$. Один из них – выполнение равенства

$$\int_{t_0}^{t_*} \psi'(t) dx(t) = \int_{t_0}^{t_*} \psi'(t) (A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h)) dt + \int_{t_0}^{t_*} \psi'(t) B_1(t) dv(t) + \int_{t_0}^{t_*} \psi'(t) B(t) du(t)$$

для произвольной непрерывной n -вектор функции $(\cdot)$; (здесь штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование). Все эти примеры приводят к следующей гибридной системе:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_*], \\ x(t_0 + kh + 0) - x(t_0 + kh - 0) &= B_1(t_0 + kh)v(t_0 + kh), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

с начальными условиями:

$$x(t_0 + \tau) = \varphi(\tau), \quad \tau \in [-h, 0), \quad x(t_0 + 0) = x(t_0) = \varphi_0 + B_1(t_0)v(t_0). \quad (7)$$

2. Формула Коши для нестационарных систем

Умножим равенство (6) на непрерывную $n \times n$ матрицу функцию $\Psi(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, и проинтегрируем по t от t_0 до t_* . Тогда, перенося все слагаемые в левую часть и интегрируя по частям в первом интеграле, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t) (\dot{x}(t) - A(t)x(t) - A_1(t)x(t-h) - Bu(t)) dt = \Psi(t_* - 0)x(t_* - 0) - \Psi(t_0)(x(t_0 + 0) + \\ &+ B_1(t_0)v(t_0)) - \sum_{k=1}^{T_{t_*}} \Psi(t_0 + kh)(x(t_0 + kh + 0) - x(t_0 + kh - 0)) - \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)x(t) dt - \\ &- \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)A_1(t)x(t) dt - \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)A_1(t)x(t-h) dt - \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)B(t)u(t) dt, \end{aligned} \quad (8)$$

где $T_{t_*} = \min \left\{ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\lfloor \frac{t_* - \varepsilon}{h} \right\rfloor, T \right\}$, символ $[z]$ означает целую часть числа z . Преобразуя интеграл с $x(t-h)$ в (8), с учетом (6) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \Psi(t_* - 0)x(t_* - 0) - \Psi(t_0)(x(t_0 + 0) + B_1(t_0)v(t_0)) - \sum_{k=1}^{T_{t_*}} \Psi(t_0 + kh)B_1(t_0 + kh)v(t_0 + kh) - \\ &- \int_{t_0}^{t_*} (\dot{\Psi}(t) + \Psi(t)A_1(t) + \Psi(t+h)A_1(t+h))x(t) dt + \int_{t_*-h}^{t_*} \Psi(t+h)A_1(t+h)x(t) dt - \\ &- \int_{t_0-h}^{t_0} \Psi(t+h)A_1(t+h)\varphi(t) dt - \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)B(t)u(t) dt, \end{aligned}$$

откуда, полагая

$$\dot{\Psi}(t) + \Psi(t)A_1(t) + \Psi(t+h)A_1(t+h) = 0, \quad \text{для } t < t_* \quad (9)$$

с конечным условием

$$\Psi(t_* + \tau) = 0, \tau \in [0, h], \Psi(t_* - 0) = I_n, \quad (10)$$

где I_n — единичная ($n \times n$) матрица, получаем

$$\begin{aligned} x(t_* - 0) = & \Psi(t_*)(\varphi_0 + B_1(t_0)u(t_0)) + \sum_{k=1}^{T_{t_*}} \Psi(t_0 + kh)B_1(t_0 + kh)v(t_0 + kh) + \\ & + \int_{t_0-h}^{t_*} \Psi(t+h)A_1(t+h)\varphi(t)dt + \int_{t_0}^{t_*} \Psi(t)B(t)u(t)dt \end{aligned} \quad (11)$$

(здесь матрица-функция $\Psi(t)$ зависит также и от конечного момента времени t_* , т.е. $\Psi(t) = \Psi(t_*, t)$). Таким образом, нами доказана

Теорема 1. Решение системы (6), (7) существует, единственно и может быть вычислено по формуле

$$\begin{aligned} x(t) = & \Psi(t, t_0)(\varphi_0 + B_1(t_0)u(t_0)) + \sum_{k=1}^{T_t} \Psi(t, t_0 + kh)B_1(t_0 + kh)v(t_0 + kh) + \\ & + \int_{t_0-h}^t \Psi(t, \tau+h)A_1(\tau+h)\varphi(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Psi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad t > t_0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Psi(t, \tau) = \Psi(\tau)$ — решение сопряженной системы (9), (10) для $t_* = t$.

Формула (12) позволяет получить неявные критерии различных типов конечно-мерной управляемости системы (6), (7). Рассмотрим для определенности известную проблему относительной управляемости [4].

Определение 1. Система (6), (7) называется относительно t_* — управляемой при $t_* > t_0$, если для любых начальных данных φ_0, φ , для любого возмущения $v(t)$, $t \in [t_0, t_*]$ и для любого заданного конечного положения $x_* \in \mathbb{R}^n$ найдется кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, такое, что для соответствующего решения $x(t) = x(t, t_0, \varphi_0, \varphi, v, u)$, $t > t_0$, выполняется соотношение $x(t_* - 0) = x_*$.

По аналогии с [4] имеет место

Теорема 2. Система (6) относительно t_* — управляема тогда и только тогда, когда строки матрицы-функции $\Psi(t_*, t)B(t)$ линейно независимы на промежутке $[t_0, t_*]$.

Определение 2. Система (6), (7) называется импульсно t_* — управляемой, если для любых начальных данных φ_0, φ , любого конечного положения $x_* \in \mathbb{R}^n$ и любой кусочно-непрерывной r -вектор функции $u(t)$, $t \in [t_0, t_*]$ существует импульсное p -вектор-управление $v(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, т.е. существуют p -векторы, $u(t_0), u(t_0 + h), \dots, u(t_0 + T_{t_*}h)$, такие, что соответствующее решение $x(t) = x(t, t_0, \varphi_0, \varphi, v, u)$, $t > t_0$, обладает свойством $x(t_* - 0) = x_*$.

Теорема 3. Система (6) импульсно t_* — управляема тогда и только тогда, когда

$$\text{rank} \left[\Psi(t_0)B(t_0), \Psi(t_0 + h)B(t_0 + h), \dots, \Psi(t_0 + T_{t_*}h)B(t_0 + T_{t_*}h) \right] = n.$$

Замечание 1. Для стационарных систем (6), (7) результаты можно уточнить, в частности, стационарная система (6) ($A(t) = A$, $A_1(t) = A_1$, $B(t) = B$, $B_1(t) = B_1$) относительно t_* — управляема тогда и только тогда, когда

$\text{rank} [X_k(t)B, k = 0, 1, \dots, n-1; t \in [0, t_* - t_0]] = n$, где $X_k(t)$, $t \geq 0$, $k = 0, 1, \dots$, — решение определяющего уравнения

$$X_k(t) = AX_{k-1}(t) + A_1X_{k-1}(t-h) + BU_k(t), \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

с начальными условиями $X_k(t) = 0$, если $k < 0$ или $t < 0$; $U_k(t) = 0$, если $k^2 + t^2 \neq 0$, $U_0(0) = Ir$.

Определение 3. Система (6), (7) называется $R^n - (s, p)$ — управляемой в t_* , где $s > 0$, $s \geq p \geq 0$. Если для произвольных начальных данных φ_0, φ и ψ_0, ψ , и произвольных возмущений $v(\cdot)$, $v_1(\cdot)$, а также для произвольной кусочно-непрерывной функции $u_1(\cdot)$ найдется кусочно-непрерывное управление $u(\cdot)$ такое, что для соответствующих решений системы (6) имеет место соотношение

$$x(t_* - 0, t_* - s, \varphi_0, \varphi, v(\cdot), u(\cdot)) = x(t_* - 0, t_* - p, \psi_0, \psi, v_1(\cdot), u_1(\cdot)).$$

Замечание 2. $R^n - (s, p)$ — управляемость в t_* допускает игровую интерпретацию как задача преследования однотипных объектов, когда начало движения преследуемого $t_* - s$ и преследуемого $t_* - p$ различны и управление преследуемого известно на всем промежутке преследования (т.е. с дискриминацией преследуемого).

Ясно, что $R^n - (s, p)$ — управляемость в t_* для $p = 0$ эквивалентна относительной t_* — управляемости для $t_0 = t_* - s$; в случае $p = s$ получаем t_* — относительную нуль-управляемость для $t_0 = t_* - s$.

Проблема. Получить критерии $R^n - (s, p)$ — управляемости системы (6) для различных p и s .

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
2. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
3. Азбелев Н.В. О линейных краевых задачах для функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1974, №4. — С.579-584.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1971.