УДК 535+539.196.5+517.925

В.А. Савва, проф., д-р физ.-мат. наук;
С.А. Банжак, асп. (БГТУ, г. Минск)

# ПЕРИОДЫ КОЛЕБАНИЙ НАСЕЛЕННОСТЕЙ УРОВНЕЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, КОГЕРЕНТНО ВОЗБУЖДАЕМЫХ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Обобщен представленный нами ранее дискретный спектральный алгоритм (ДСА) точного решения дифференциальных уравнений, описывающих возбуждение квантовых систем (КС) – моделей атомов, молекул лазерным излучением.

Эта задача Раби, как полуклассическая, так и квантовая, одна из фундаментальных моделей квантовой механики, уже более 80 лет пользуется вниманием исследователей. Она лежит в основе квантовых технологий: лазерное разделение изотопов, управление химическими реакциями, создание квантовых компьютеров и квантовой криптографии и др.

**Дискретный спектральный алгоритм** использует два сопряженных пространства. Это физическое пространство энергия – время с динамическими уравнениями (в безразмерных переменных):

$$-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}e^{-i\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{+i\varepsilon_n t}a_{n-1}(t); \quad a_n(t=0)=\delta_{n,0};\ n=\overline{0,N}; \quad (1)$$

для искомых функций $a_n(t)$ – амплитуд вероятности найти КС на энергетическом уровне $E_n$ в момент времени $t$. Коэффициенты $\{f_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$, $(f_1=1)$ уравнений представляют характеристики возбуждаемой трехуровневой КС: дипольные моменты обоих переходов $E_0 \rightleftarrows E_1 \rightleftarrows E_2$ и отстройки $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ частоты излучения от собственных частот переходов. Вторым пространством является дискретное Фурье пространство функций $a_n(t)$. Для КС с числом радиационных переходов $N>2$ описание и решение аналогичны. Пространство Фурье полностью задается спектральной функцией $\sigma(x)=\{\sigma_0(x_0),\sigma_1(x_1),\sigma_2(x_2)\}$ дискретного аргумента $x=\{x_0=0; x_1=1; x_2=c\}$. Нормировка $\sum_{n=0}^{N=2}\sigma_n(x_n)=1$ влечет $\sigma_0=1-\sigma_1-\sigma_2$. Значения $x_0$ и $x_1$ – начало отсчета и единица масштаба на оси частот Фурье. Спектральное пространство также определяется тремя величинами $\{\sigma_1=a;\sigma_2=b;x_2=c\}$. Обобщение ДСА путем замены конкретных числовых значений непрерывными параметрами приводит к решению для трехпараметрического семейства КС с разнообразными спектральными и физическими характеристиками $\{f_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2\} \rightleftarrows \{a, b, c\}$.

**Полигармонические режимы колебаний КС.** ДСА приводит к точному аналитическому решению уравнений и дискретному вероятностному распределению частиц по уровням. Их анализ показал, что КС, не подверженные внешнему воздействию, демонстрируют *детерминированные полигармонические* колебательные режимы с тремя или двумя гармониками. Одни КС, параметр *c* которых выражен рациональным числом, совершают *периодические* колебания, другие КС с иррациональным *c* обладают непериодическими колебаниями. Частоты первых КС взаимно соизмеримы. Частоты вторых не соизмеримы.

**Особенности функции, описывающей период полигармонических колебаний**. Функция $T_{SB}(c)$ зависит от параметра-аргумента $c > 1$. Меняя его значение, мы получаем периоды различных КС. Период определяется натуральным числом $M$ :

$$
\begin{aligned}
&T_{SB}\left(c = \tfrac{p}{q}\right) = rt = 2\pi M, \quad M = \min\left\{q, pq, |p-q|q\right\} \in \mathbb{N}; \\
&T_{SB}\left(c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\right) = rt = 2\pi M, \quad M = \infty
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

для КС со спектральным параметром в виде рационального числа, а для КС с иррациональным *c,* период бесконечен. Функция $T_{SB}(c)$ имеет бесконечное количество разрывов-скачков в точках $c \in \mathbb{Q}$, принадлежащих подмножеству рациональных, в том числе целых чисел. Период колебаний в этих точках конечен, где $rt$ – собственное время КС. Величина $M(c)$ определяется дробной частью числа *c*. КС, обладающие иррациональным *c*, имеют бесконечные разрывы, «период» формально бесконечен. График функции $T_{SB}(c)$ построить невозможно, ее значения в некоторых точках представлены в таблице.

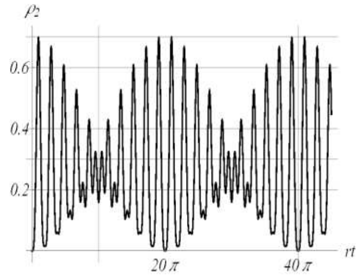
**Таблица – Период колебаний населенностей уровней $(N = 2)$–КС, обладающих различными значениями спектрального параметра *c***

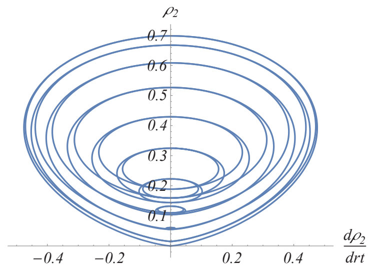
| $c$ | 2.0; 3.0 | $2\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{2}$ | $2\frac{1}{3}$ | $2\frac{1}{5}$ $2\frac{4}{5}$ | $2\frac{1}{7}$ | $2\frac{1}{10}$ $2\frac{7}{10}$ | 2.04 2.08 | 2.02 2.06 | 2.01 2.99 | $\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 10 | 25 | 50 | 100 | $\infty$ |

КС с параметром *c*, имеющим малые дробные части, обладают большими периодами. Между рациональными числами расположено много иррациональных, а такие КС демонстрируют непериодические колебания. Для подобных необычных функций и процессов природы особенность числа быть носителем не только количественного, но и качественного свойства принципиальное важно. Важная характеристика динамических режимов квантовых микрочастиц описывается функцией подобного вида. Рассмотрим примеры. Аналитический расчет и рисунки выполнены с помощью системы компьютерной алгебры «Mathematica».

**КС с периодическим полигармоническим режимом колебаний населенностей**. $(n=2)-KC;\ c=2.1,\ a=0.4,\ b=0.5,\ M=10$.

$$\rho_2=(4/5025)\big(331-231\mathrm{Cos}(rt)-210\mathrm{Cos}(1.1rt)+110\mathrm{Cos}(2.1rt)\big). \quad (3)$$

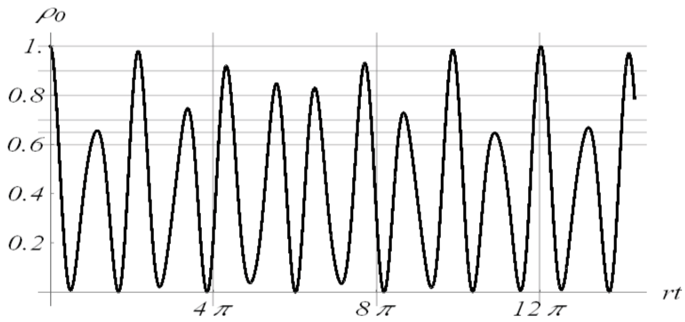


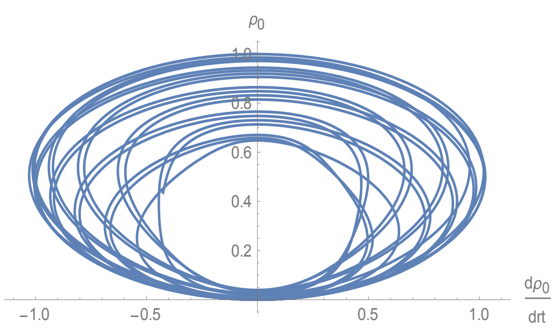

Участок непериодических колебаний повторяется на каждом периоде $T_{SB}(c)$. Эта периодичность есть многократное повторение участка непериодических колебаний определенной конечной длительности.

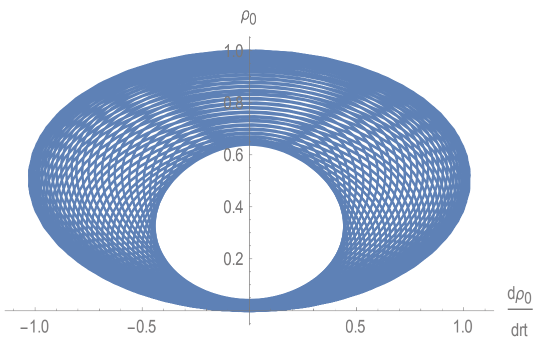
**КС с непериодическим полигармоническим режимом колебаний населенностей**. $KC;\ c=2\sqrt{2},\ a=0.4,\ b=0.5,\ M=\infty$.

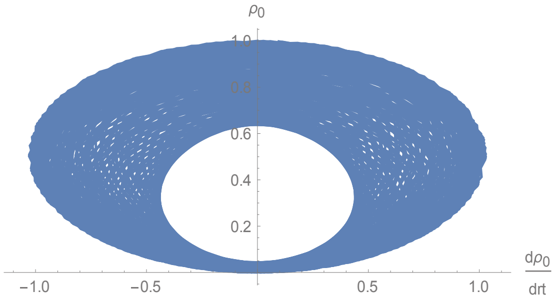
$$\rho_0=(1/50)\Big(21+4\mathrm{Cos}(rt)+5\mathrm{Cos}(2\sqrt{2}rt)+20\mathrm{Cos}((1-2\sqrt{2})rt)\Big). \quad (4)$$

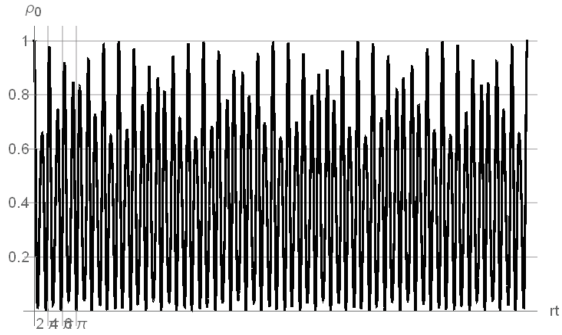



Здесь представлен начальный участок непериодических колебаний $\rho_0(rt)$, ниже – начальная часть траектории фазового портрета и ее вид








на все больших временных интервалах. Последний график $\rho_0(rt)$, соответствует фазовому портрету, расположенного над ним Отметим, что на обоих графиках функций $\rho_0(rt)$ на малом и большом временных интервалах явственно виден почти период длительностью $\sim 2\pi \cdot 6$.

КС из *c*-семейства характеризуются полигармоническими колебательными режимами двух типов. КС с рациональным значением спектрального параметра *c* обладают периодическими режимами разнообразных периодов $T_{SB} = rt = 2\pi M$, где $1 \le M(c) < \infty$ натуральное число, зависимое не от величины *c,* но от его дробной части. Однако, на протяжении периода колебания не являются периодическими, и эта картина многократно повторяется на каждом периоде. Второе подмножество КС характеризуется иррациональным значениям параметра *c* и демонстрирует непериодический режим, то есть динамический хаос. Поскольку рациональные и иррациональные числа перемешаны на числовой прямой действительных чисел, значения которых может принимать параметр *c*, малейшее изменение этого параметра, например, под влиянием наблюдения, измерения резко изменяет период и тип колебательного режима.

УДК 517.977

А.И. Калинин, проф., д-р физ.-мат. наук;
Л.И. Лавринович, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О МИНИМИЗАЦИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ В РАЗНОТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

1. В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется асимптотическим методам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Как известно, численное решение задач оптимальных