и требования, и выбор подходящего зависит от конкретной ситуации и целей инвестора.

Таким образом, дальнейшие исследования в этом направлении позволит рассмотреть ключевые аспекты и проблемы, связанные с применением многокритериального анализа в сфере инвестиций, и предложить практические рекомендации для инвесторов, стремящихся принимать информированные и обоснованные решения в условиях сложной финансовой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюгин, В.И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа: Учеб. пособие. – М.:Дело, 2003. – 164 с.

2. Подиновский, В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 194 с.

УДК 517.977

М.А.Закривидорога, студ.;
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В докладе рассматривается проблема управляемости линейных интервальных систем. Приводятся двусторонняя оценка фундаментальной матрицы решений и оценка пучка траекторий при заданном управлении. Требования принадлежности внешней оценки минимальной ε- окрестности конечного бруса рассматриваются в виде задачи линейного программирования [1]. Решён ряд примеров.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\, x(0) \in X_0,\, x(t_1) \in X_1,\, 0 \le t \le t_1, \tag{1}$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$ – векторы состояния и управления соответственно;
$A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$ – постоянные матрицы, удовлетворяющие неравенствам $\underline{A} \le A \le \overline{A}$, $\underline{B} \le B \le \overline{B}$, называются допустимыми,
$X_m = \{x \in R^n : \underline{x}^m \le x \le \overline{x}^m\}$, $m = 0,1$ – заданные брусы в R^n.

Рассмотрим управления $u(t) = u^k,\, \tau_{k-1} \le t < \tau_k,\, k = 1, 2, \dots, s,$ с фиксированными моментами разрыва $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_s = t_1$ и векторными параметрами $u^1, u^2, \dots, u^s$ из множества $U \in R^r$, которое определяется конечной системой неравенств.

Пусть $u(t)$ – некоторое управление и $X(t_1)$ – соответствующее множество фазовых состояний $x(t_1)$ системы (1) в момент времени $t=t_1$.

Требуется установить условия существования управления $u(t)\in U,\ 0\le t\le t_1$, при котором выполняется включение $X(t_1)\subset X_1$. В таком случае, можно говорить об управляемости системы (1).

Используя формулу Коши для системы (1), найдём внешнюю [2] интервальную оценку $P(t_1)$ множества $X(t_1)$ в виде:

$$P(t_1)=\left\{\begin{matrix} x\in R^n : \underline{d}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k-\Delta C_{k0}\left|u^k\right|\right)\le x\le \\ \overline{d}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k+\Delta C_{k0}\left|u^k\right|\right) \end{matrix}\right\},$$

где векторы $\underline{d}$, $\overline{d}$ и матрицы C_{k0}, ΔC_{k0} вычисляются по параметрам системы (1).

Обозначим ε произвольный неотрицательный вектор из R^n и $X_{1,\varepsilon}=\{x\in R^n : x^1-\varepsilon\le x\le x^1+\varepsilon\}$ замкнутую окрестность бруса X_1.

Включение $X(t_1)\subset X_{1,\varepsilon}$ будет выполнено, если $P(t_1)\subset X_{1,\varepsilon}$ или

$$\underline{d}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k-\Delta C_{k0}\left|u^k\right|\right)\ge \underline{x}^1-\varepsilon,$$

$$\overline{d}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k+\Delta C_{k0}\left|u^k\right|\right)\le \overline{x}^1+\varepsilon.$$

Составим по последним неравенствам задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} e'\varepsilon\to\min, \\ -\sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k-\Delta C_{k0}\omega^k\right)-\varepsilon\le\underline{d}-\underline{x}^1, \\ \sum_{k=1}^{n}\left(C_{k0}u^k+\Delta C_{k0}\omega^k\right)-\varepsilon\le-\overline{d}+\overline{x}^1, \\ \varepsilon\ge 0,\ \ u^k\in U,\ \ \left|u^k\right|\le\omega^k,\ k=1,2,\dots,s, \end{gathered}\qquad (2)$$

с неизвестными ε, u, ω. В этой задаче множество планов непусто и целевая функция ограничена на нем снизу, поэтому оптимальный план существует.

Теорема. Для управляемости системы (1) в классе кусочно-постоянных управлений достаточно, чтобы разрешимая задача линейного программирования (2) имела оптимальный план $\varepsilon^0, u^0, \omega^0$, с $\varepsilon^0=0$. При этом управление переводит пучок траектории системы из X_0 в минимальную ε – окрестность X_1.

Пример 1.

Рассмотрим систему (1) с параметрами $s=5,\ |u|\le 1,\ t\in[0,3]$,

$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\le A\le\begin{bmatrix}0&3\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\le b\le\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\le x_0\le\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}20\\2\end{bmatrix}\le x^1\le\begin{bmatrix}21\\3\end{bmatrix}$.

Формируем и решаем задачу линейного программирования (2) и строим траектории (рис. 1–2).

Решение задачи (2)

$$\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} 12.2925 \\ 0.7075 \end{bmatrix}, \quad u^0=[0.1219, 0.1234, 0.1867, 0.3019, 0.4453].$$

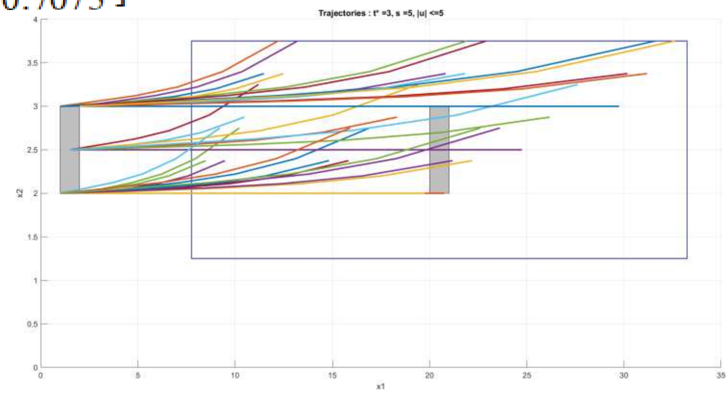

Рисунок 1 – Траектории при $|u| \le 1$

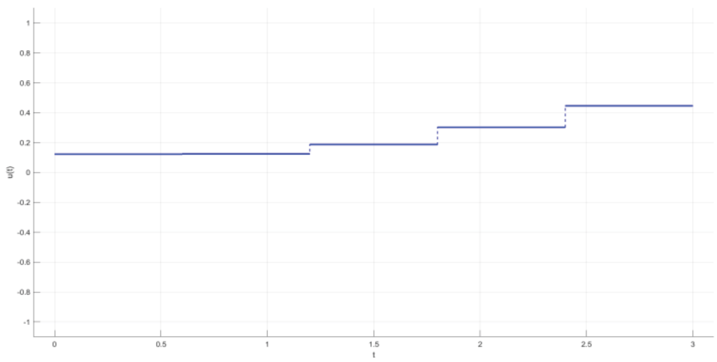

Рисунок 2 – Управление

Пример 2.

Рассмотрим систему (1) с параметрами $s = 5$, $|u| \le 5$, $t \in [0, 3]$, $\begin{bmatrix} -0.0055 & 0.995 \\ -1.0055 & -0.0055 \end{bmatrix} \le A \le \begin{bmatrix} 0.0055 & 1.0045 \\ -0.9945 & 0.0055 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \le b \le \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \le x_0 \le \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 20 \\ 2 \end{bmatrix} \le x^1 \le \begin{bmatrix} 21 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Формируем и решаем задачу линейного программирования (2) и строим траектории (рис. 3–4).

Решение задачи (2) $\varepsilon^0 = \begin{bmatrix} 14.3796 \\ 5.7182 \end{bmatrix}$, $u^0 = [-5, -4.6728, 0, 5, 5]$.

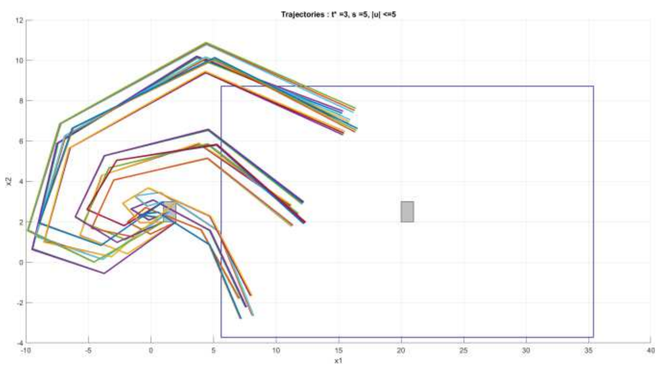

Рисунок 3 – Траектории при $|u| \le 5$

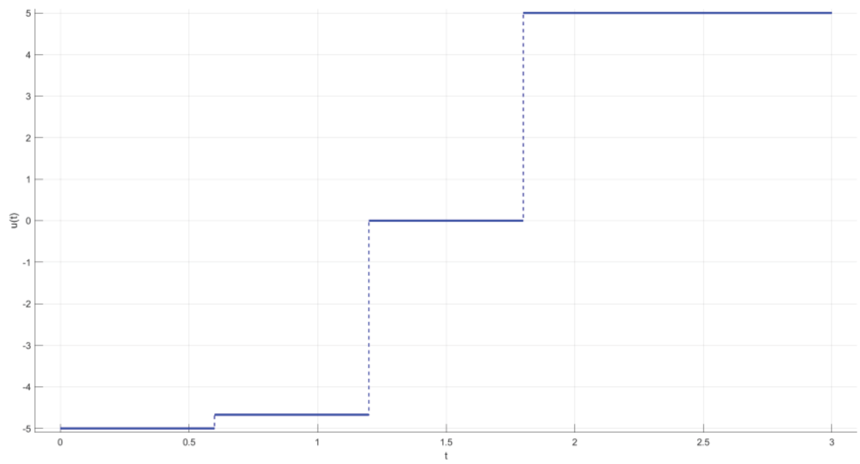

Рисунок 4 – Управление

Можно сделать вывод, что ограничение на управление непосредственно влияет на поведение траекторий и минимальную окрестность конечного бруса.

Заметим, что одним управлением мы переводим пучок траекторий на конечный брус. Попадание в точку – это исключительный случай. Если $\varepsilon^0 \neq 0$, то найденное управление, переводит пучок траекторий в минимальную окрестность конечного бруса.

Часто на практике в задачах управления параметры систем известны лишь в той или иной степени точности. Одновременная управляемость класса таких систем получила название “робастная управляемость”. Наряду с робастной управляемостью в рамках интервального анализа имеет место понятие интервальная управляемость. Различие между этими понятиями заключается в том, что в случае робастной управляемости требуется управление всех систем при всевозможных реализациях параметров, а интервальная управляемость накладывает ограничения на поведение решений интервальной системы как единого целого в интервальной арифметике [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Внешние оценки и ступенчатая управляемость интервальной линейной системы / Л.Т.Ащепков // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 51–58.

2. Ащепков Л.Т. Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления / Л.Т. Ащепков, Д.А. Давыдов. – М.: Наука, 2006. – 151 с.

3. Шарый С.А. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2013. – [Электронная книга] – Режим доступа: htth://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/Shary Book.pdf.