указатель / сост. И.К Асмыкович. – Минск: БГТУ, 2022. – 343 с.
5. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. Berlin: Springer, 2010.
6. Булатов В.И. Об одном свойстве управляемых линейных систем не разрешенных относительно производной // Вестн. БГУ, сер.1 – 1989. – № 1. – С. 63–64.
7. Марченко В.М. Минимальное число входов линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 10. – С. 1789–1796.
8. Асмыкович И.К. О некоторых задачах математической теории управления для линейных дескрипторных систем // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Межд. науч.-техн. конф. – Минск: БГТУ, 2018. – С. 101–104.

УДК 336

И.В. Захаркевич, студ.;
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

ЗАДАЧА ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВА ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

В докладе рассматриваются основные аспекты многокритериального анализа в контексте инвестиций, а также различные методы и подходы к решению многокритериальных задач, позволяющие эффективно учитывать разнообразие факторов, влияющих на процесс принятия инвестиционных решений.

Портфель ценных бумаг – это определенная совокупность финансовых активов, объединенных инвестором для реализации поставленных целей: чаще всего, для максимизации прибыли и минимизации убытков. Использование модели Марковица [1] предполагает только стандартные портфели, которые состоят из реально купленных акций.

Математическая модель портфеля ценных бумаг Марковица имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_{ij} \to \min, \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \, x_i \geq 0, \, i = \overline{1,n}, \end{array}\right\} \quad (1)$$

где x_i, x_j – доли i-ого и j-ого актива соответственно; ρ_{ij} –коэффициент корреляции между i,j-м активом; r_i – доходность i-го актива в портфеле.

Эта модель находит широкое применение среди финансовых брокеров, которые, выступая в роли финансовых консультантов, используют математические вычисления для определения доходности различных инвестиционных портфелей. Таким образом, теория Марковица позволяет эффективно управлять инвестициями, учитывая их доходность и уровень риска.

Очевидно, двухкритериальную модель (1) можно свести к однокритериальной задаче [2]:

$$\left.\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_{ij} \to \min, \\ \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i r_i = m,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где m – выбранное инвестором значение эффективности портфеля.

Пример. Предположим, у нас есть компания, которая хочет вложить часть своего капитала в акции известных компаний. На основании собранных данных о доходности 8 компаний за последние 5 лет, необходимо принять решение о будущих вложениях компании. Нужно сформулировать многокритериальную задачу оптимизации финансового портфеля с доходами в 10%, 15%, 20% и найти риск портфеля и его средний доход. Данные о доходностях представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Доходность по акциям компаний

Компания	Доходность по акциям компаний, %					Средняя доходность,%
	2018	2019	2020	2021	2022	
Газпром	24.5	79.6	–10.0	67.9	–37.7	24.86
ВТБ	–23.3	39.3	–15.6	31.0	–66.0	–34.60
Газпромнефть	53.6	29.0	–18.9	89.3	1.2	30.84
Лукойл	57.4	31.0	–9.6	37.2	–26.0	18.00
Магнит	–40.8	2.0	80.4	10.3	–20.3	6.32
Мосэнерго	–15.6	18.8	–3.4	9.7	–7.2	0.46
Сбербанк	–12.4	46.0	16.2	14.6	–51.9	0.50
Абрау Дюрсо	–0.2	–0.8	44.6	–1.9	0.2	8.38

Для решения нам нужно составить таблицу ковариаций для всех возможных пар компаний. Ковариация между двумя компаниями считается по формуле $\rho_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) / (n-1)$, где x_i, y_i – доходности ценных бумаг в период i, $\bar{x}$, $\bar{y}$ – средние значения доходностей x и y, n – количество периодов.

Ковариация может принимать положительные и отрицательные значения. Положительная ковариация указывает на тенденцию двух переменных (в данном случае, доходности ценных бумаг) изменяться в одном направлении, тогда как отрицательная ковариация указывает на обратную тенденцию. Посчитанные значения ковариации для всех возможных пар компаний приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Взаимная дисперсия

	Газ пром	ВТБ	Газ-пром-нефть	Лу-койл	Маг-нит	Мос энерго	Сбер банк	Абрау Дюрсо
Газпром	1047	2946	1199	1048	–772	404	1166	–338
ВТБ	2946	2248	788	705	330	390	1217	–101
Газпром нефть	1199	985	1458	934	–746	112	244	–468
Лукойл	1048	881	934	958	–542	45	445	–259
Магнит	–772	413	–746	–542	1690	126	606	661
Мосэнерго	404	487	112	45	126	151	303	–41
Сбербанк	1166	1521	244	445	606	303	1086	109
Абрау Дюрсо	–338	–101	–468	–259	661	–41	109	328

Для дальнейшего решения воспользуемся моделью (1), где в качестве ρ_{ij} используем посчитанные нами ковариации, а в качестве r_i – средние доходности. Для нахождения оптимального финансового портфеля с доходами в 10%, 15%, 20%, воспользуемся математической моделью (2). Для решения были использованы некоторые команды, встроенные в язык Pyhton специальными пакетами.

Решение примера методом линейной свёртки. При λ = 0.2: оптимальная доходность = 0.0855, оптимальный риск = 0.5837; λ = 0.4: оптимальная доходность = 0.0886, оптимальный риск = 0.5850; λ = 0.6: оптимальная доходность = 0.0946, оптимальный риск = 0.5916; λ = 0.8: оптимальная доходность = 0.1121, оптимальный риск = 0.6392; λ = 1: оптимальная доходность = 0.3084, оптимальный риск = 14.5800.

Решение примера методом сведения к однокритериальной задаче (2). При целевой доходности 0.1: риск портфеля: 0.7756451322029986. При целевой доходности 0.15: риск портфеля: 0.9508242050853548. При целевой доходности 0.2: риск портфеля: 1.5262446522872992.

Зависимость риска от доходности для двух методов решения одинаковая: чем больше доходность, тем больше риск. Оба метода решения задачи приводят к практически одинаковым результатам.

Отметим, что анализ различных методов многокритериального анализа позволяет выделить их преимущества и ограничения, а также определить области их оптимального применения. В процессе исследования стало ясно, что учет множества критериев в инвестиционном моделировании способствует более полному и точному представлению о рисках и возможностях, с которыми сталкиваются инвесторы. Однако следует отметить, что каждый метод имеет свои предпосылки и требования, и выбор подходящего зависит от конкретной ситуации и целей инвестора.

Таким образом, дальнейшие исследования в этом направлении позволит рассмотреть ключевые аспекты и проблемы, связанные с применением многокритериального анализа в сфере инвестиций, и предложить практические рекомендации для инвесторов, стремящихся принимать информированные и обоснованные решения в условиях сложной финансовой среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюгин, В.И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа: Учеб. пособие. – М.:Дело, 2003. – 164 с.

2. Подиновский, В.В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В.В. Подиновский, В.М. Гаврилов – М.: ЛЕНАНД, 2016. – 194 с.

УДК 517.977

М.А.Закривидорога, студ.;
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В докладе рассматривается проблема управляемости линейных интервальных систем. Приводятся двусторонняя оценка фундаментальной матрицы решений и оценка пучка траекторий при заданном управлении. Требования принадлежности внешней оценки минимальной ε- окрестности конечного бруса рассматриваются в виде задачи линейного программирования [1]. Решён ряд примеров.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) \in X_0,\ x(t_1) \in X_1,\ 0 \le t \le t_1, \tag{1}$$

$x \in R^n$, $u \in R^r$ – векторы состояния и управления соответственно;
$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times r}$ – постоянные матрицы, удовлетворяющие неравенствам $\underline{A} \le A \le \overline{A}$, $\underline{B} \le B \le \overline{B}$, называются допустимыми,
$X_m = \{x \in R^n : \underline{x}^m \le x \le \overline{x}^m\}$, $m = 0,1$ – заданные брусы в R^n.

Рассмотрим управления $u(t) = u^k,\ \tau_{k-1} \le t < \tau_k,\ k = 1, 2, \ldots, s,$ с фиксированными моментами разрыва $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_s = t_1$ и векторными параметрами $u^1, u^2, \ldots, u^s$ из множества $U \in R^r$, которое определяется конечной системой неравенств.