Проводя аналогичные вычисления, можно заметить, что последовательность полученных чисел $x_n \quad (n = 1, 2, ...)$ сходится к корню $\bar{x}$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$. Если $\Delta'(x) > 0$, то абсолютная погрешность определяется по формуле

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \le \frac{\left|\Delta x_n\right|}{\mu},$$

где $\mu = \min\limits_{a \le x \le b} \left|\Delta'(x)\right|$.

По такому же принципу определяются и остальные псевдокритические длины.

Далее переходим ко второму уравнению прямого направления метода дифференциальной ортогональной прогонки, т.е. рассматриваем задачу Коши (5,6). Если правая часть $f_i(t) \equiv 0$ и $\gamma_i = 0$, то $u(t) = 0$.

Определяем нетривиальное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin\theta(x) y_1(x) + \cos\theta(x) y_2(x) = 0, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = 0 \end{cases}$$

Нормируем найденные значения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по правилу

$$\left|y_1(x)\right| + \left|y_2(x)\right| = 1.$$

Решаем третью последнюю задачу Коши вида (7,8). Используя метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности, находим искомые значения.

Вычисляем критическое и псевдокритическое решение $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по формулам (9), обходя, за счет перехода к задачам Коши, громоздкие системы со множеством неизвестных.

УДК 519.71

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОЛЯХ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В качественной теории управления линейными динамическими системами при решении проблемы о возможности управления состоянием системы в том или ином смысле важно выяснить вопрос о минимальных требованиях на входные устройства, т.е. решить задачу о минимальном числе входов [2, 3] или в более широком смысле задачу о минимальных полях регулирования [1]. Такая задача для управляемости и наблюдаемости обыкновенных динамических систем и систем с отклоняющимся аргументом при отсутствии и наличии ограничений на входные устройства, широко рассмотрена в работах Марченко В.М. (подробности см. в [2, 7]). Им же были получены алгоритмы построения соответствующих матриц. Решение задачи о минимальном числе выходных устройств, обеспечивающий соответствующую наблюдаемость, обычно получается из принципа двойственности при рассмотрении соответствующей задачи управляемости [2, 3]. Отметим, что вопрос о минимальном числе входов для структурной управляемости обыкновенных систем [2] остается открытым.

При разработке динамических моделей физических процессов и систем управления технологическими и экономическими процессами необходимо учитывать, как дифференциальные, так же алгебраические и логические связи, а во многих случаях и эффекты последействия, которыми нельзя пренебречь. Кроме того, в системе могут объединяться как процессы непрерывного действия, так и дискретные процессы, а также возможно включение логических и случайных компонент. Адекватной моделью таких процессов являются гибридные системы, в частности, дескрипторные динамические системы с отклоняющимся аргументом. Такие системы называют либо вырожденными, либо сингулярными, либо системами неразрешенными относительно производной, либо системами с обобщенным пространством состояний, либо дескрипторными, причем последнее название превалирует [4, 5]. По нашему мнению, это название наиболее точно отражает специфику таких систем.

Для дескрипторных систем эта задача минимальных полей регулирования усложняется в связи с трудностями определения понятия состояния таких систем, их однозначной разрешимости, введением разных типов управляемости для регулярных дескрипторных систем и недостаточной разработанной теорией управляемости для линейных дескрипторных систем с отклоняющимся аргументом.

Рассмотрим линейную дескрипторную систему

$$\begin{aligned} &S\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ &Sx(0) = Sx_0, \quad \det S = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

которую будем полагать регулярной, т.е.

$$\exists \lambda_0, \text{ т тако что } \quad \det[\lambda_0 S \ - A] \neq 0 \tag{2}$$

Известно [5,8], что при условии (2) система (1) для совместимых начальных условий имеет решение причем оно единственное. Рассмотрим для такой системы задачу о нахождении минимального числа входов для некоторых видов управляемости.

Определение 1. Система полностью управляема (С-управляема), если она может достигнуть любого конечного состояния из любого начального состояния.

Определение 2. Система называется управляемой во множестве достижимых состояний (*R*-управляемой), если она может достигнуть любого состояния во множестве допустимых состояний из любого совместимого начального состояния.

Если записать систему в стандартной канонической форме или [4] (EF1), т.е.

$$\dot{x}_1(t) = Lx_1(t) + B_1u(t) \tag{3}$$

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2u(t) \tag{4}$$

то из критериев полной управляемости [4] и результатов по минимальному числу входов для обыкновенных систем [2] следует утверждение

Теорема 1. Минимальное число входов r^0 для обеспечения полной управляемости системы (1) равно сумме числа нетривиальных инвариантных многочленов матриц $L\, u\, N$ и справедливо неравенство $r^0 \geq n - rankS$.

Отметим, что в регулярной системе (1), (2) можно выполнить неособое преобразование [5]

$$y(t) = \exp(\lambda_0 t)x(t) \tag{5}$$

и привести систему (1) к виду

$$(\lambda_0 S - A)^{-1} S\dot{y} = y + (\lambda_0 S - A)^{-1} Be^{\lambda_0 t} u(t),$$

т.е.

$$\widetilde{S}\dot{y} = y + \widetilde{B}\widetilde{u}(t)\,. \tag{6}$$

Такая запись системы называется [5] третьей эквивалентной канонической формой (EF3).

Используя результаты работы [6], что система (1) полностью управляема тогда и только тогда, когда полностью управляема симметричная система

$$A\dot{x}(t) = Sx(t) + Bu(t),$$
$$Sx(0) = Sx_0, \quad \det S = 0,$$

получаем утверждение:

Теорема 2. Минимальное число входов r^0 для обеспечения полной управляемости системы (1) равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы $(\lambda_0 S - A)^{-1} S$, где λ_0 число из условия (2) и $r^0 \ge n - rankS$.

Для управляемости во множестве достижимых состояний (R-управляемости) доказан целый ряд достаточных условий, в том числе и что необходимым и достаточным условием является полная управляемость подсистемы медленных движений, т.е. системы

$$\dot{x}_1(t) = Lx_1(t) + B_1 u(t)$$

Это означает справедливость

Теорема 3. Минимальное число входов r^0 для обеспечения управляемости во множестве достижимых состояний системы (1) равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы L .

В теории управления дескрипторными системами важную роль играет импульсная управляемость, или управляемость в бесконечности т.е. управляемость подсистемы быстрых движений. Отсутствие импульсной составляющей является одним из требований для обеспечения устойчивости дескрипторной системы и возможности ее приведения с помощью линейной обратной связи по состоянию к обыкновенной системе, что названо [4] нормализируемостью системы. Известно несколько критериев импульсной управляемости [4], в том числе и полная управляемость подсистемы

$$N\dot{x}_2(t) = x_2(t) + B_2 u(t).$$

Тогда можно доказать

Теорема 4. Минимальное число входов r^0 для обеспечения импульсной управляемости системы (1) равно числу нетривиальных инвариантных многочленов матрицы N.

Аналогичные задачи можно рассматривать для дескрипторных систем с запаздыванием [3, 8] с соответствующими изменениями понятий управляемости и наблюдаемости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лётов А.М. Математическая теория процессов управления. – М.: Наука, 1981. – 255 с.

2. Асмыкович И.К., Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М. Задачи управления конечномерными системами // Автоматика и телемеханика. – 1986. – № 11. – С. 5–29.

3. Асмыкович И.К. О задачах качественной теории управления для дескрипторных систем с запаздыванием // Труды БГТУ. – В. 5. Физ.-мат. науки и информатика. – Минск, 1997. – С. 3–14.

4. Дескрипторные системы управления: библиографический

указатель / сост. И.К Асмыкович. – Минск: БГТУ, 2022. – 343 с.

5. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. Berlin: Springer, 2010.

6. Булатов В.И. Об одном свойстве управляемых линейных систем не разрешенных относительно производной // Вестн. БГУ, сер.1 – 1989. – № 1. – С. 63–64.

7. Марченко В.М. Минимальное число входов линейных управляемых систем // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 10. – С. 1789–1796.

8. Асмыкович И.К. О некоторых задачах математической теории управления для линейных дескрипторных систем // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов: материалы Межд. науч.-техн. конф. – Минск: БГТУ, 2018. – С. 101–104.

УДК 336

И.В. Захаркевич, студ.;
В.В. Крахотко, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

ЗАДАЧА ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ СОСТАВА ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ

В докладе рассматриваются основные аспекты многокритериального анализа в контексте инвестиций, а также различные методы и подходы к решению многокритериальных задач, позволяющие эффективно учитывать разнообразие факторов, влияющих на процесс принятия инвестиционных решений.

Портфель ценных бумаг – это определенная совокупность финансовых активов, объединенных инвестором для реализации поставленных целей: чаще всего, для максимизации прибыли и минимизации убытков. Использование модели Марковица [1] предполагает только стандартные портфели, которые состоят из реально купленных акций.

Математическая модель портфеля ценных бумаг Марковица имеет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{c}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \rho_{ij} \to \min, \ \ \sum_{i=1}^{n} x_i r_i \to \max, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,n},\end{array}\right\} \quad (1)$$

где x_i, x_j – доли i-ого и j-ого актива соответственно; ρ_{ij} –коэффициент корреляции между i,j-м активом; r_i – доходность i-го актива в портфеле.

Эта модель находит широкое применение среди финансовых брокеров, которые, выступая в роли финансовых консультантов, ис-