УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, канд. физ.-мат. наук, доц.
(БГТУ, г. Минск)

О ВЫЧИСЛЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим линейную граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + f_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

с обобщенными граничными условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_2(0) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = \gamma_2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $0 \le t \le x$ и $x > 0$ – правая подвижная граница отрезка интегрирования.

Обозначим через $z(t)$ фундаментальную матрицу для системы уравнений (1).

Определение. Задача (1,2) имеет единственное решение для $\forall x,$ если выполняется условие:

$$D(x) = \alpha_1(z_{12}(x)\alpha_2 + z_{22}(x)\beta_2) - \beta_1(z_{11}(x)\alpha_2 + z_{21}(x)\beta_2) \ne 0,$$

где $z_{ij}(x)$ – элементы матрицы $z(x)$.

Определение. Минимальное положительное число x^*, удовлетворяющее условию $D(x) = 0,$ называется критической длиной задачи (1,2).

Остальные значения, которые также удовлетворяют условию $D(x) = 0,$ называются псевдокритическими длинами исходной задачи. Для решения данной задачи, переформулируем ее в виде совокупности трех задач Коши вида:

$$\theta' = (a_{11}(t) - a_{22}(t))\sin\theta\cos\theta + a_{21}(t)\cos^2\theta - a_{12}(t)\sin^2\theta) = 0, \quad (3)$$

с начальными условиями вида

$$\sin\theta(0) = \alpha_1, \quad \cos\theta(0) = \beta_1 \quad (4)$$

Далее, вычислив значение $\theta(x)$, приступаем к решению второй задачи Коши, используя прямую прогонку.

$$u' = b_{11}(t)u + c_1(t), \quad (5)$$

с начальными условиями

$$u(0) = \gamma_1. \quad (6)$$

Задачи Коши вида (3,4) и (5,6) можно решать методом дифференциальной ортогональной прогонки в прямом направлении, а третью задачу Коши вида

$$v' = b_{21}(t)u + b_{22}(t)v + c_2(t) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$v(x) = \cos\theta(x) y_1(x) - \sin\theta(x) y_2(x) \tag{8}$$

решаем в обратном направлении.

Полученные три задачи Коши легко решить, используя, например, метод Рунге-Кутта четвертого порядка точности. А критическое и остальные псевдокритичекие решения исходной граничной задачи (1,2) можно вычислить, применяя правило:

$$y_1(t) = v(t)\cos\theta(t), \quad y_2(t) = v(t)(-\sin\theta(t)) \tag{9}$$

Известно, что во всех вычислительных процедурах критическая длина представляет собой точку, в которой уравнение Риккати терпит разрыв первого рода. При переходе от решения исходной граничной задачи к решению совокупности трех задач Коши уравнение Риккати вообще не используется, что значительно облегчает вычислительный процесс. Этот переход осуществляется с помощью ортогональных преобразований и обеспечивает хорошие вычислительные свойства предложенного выше алгоритма.

Рассмотрим первую задачу Коши вида (3,4). Решаем ее в прямом направлении. Для решения задач Коши существует широкий набор хорошо развитых и часто применяемых методов их численного решения, обладающих, например, В-устойчивостью или Д-устойчивостью. Сюда можно отнести асимптотические, двусторонние и другие специализированные методы, учитывающие характер изменения решения.

Вычислим положительное решение уравнения

$$\Delta(x) = 0, \tag{10}$$

где $\Delta(x) = \alpha_2 \cos\theta(x) - \beta_2 \sin\theta(x)$.

Уравнение (10) можно решить по методу секущих, вычисляя при этом *n-е* приближение к искомому корню на отрезке $[a, b]$ по формуле:

$$x_n = \frac{a\,\Delta(x_{n-1}) - x_{n-1}\,\Delta(a)}{\Delta(x_{n-1}) - \Delta(a)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

если выполняется условие

$$\Delta(a)\,\Delta''(x) > 0.$$

В качестве начального приближения в этом случае берем конец отрезка, точку $x_0 = b$.

Проводя аналогичные вычисления, можно заметить, что последовательность полученных чисел x_n $(n = 1, 2, ...)$ сходится к корню $\bar{x}$, т.е. $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$. Если $\Delta'(x) > 0$, то абсолютная погрешность определяется по формуле

$$\left|\bar{x} - x_n\right| \le \frac{\left|\Delta x_n\right|}{\mu},$$

где $\mu = \min_{a \le x \le b} \left|\Delta'(x)\right|$.

По такому же принципу определяются и остальные псевдокритические длины.

Далее переходим ко второму уравнению прямого направления метода дифференциальной ортогональной прогонки, т.е. рассматриваем задачу Коши (5,6). Если правая часть $f_i(t) \equiv 0$ и $\gamma_i = 0$, то $u(t) = 0$.

Определяем нетривиальное решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sin\theta(x) y_1(x) + \cos\theta(x) y_2(x) = 0, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = 0 \end{cases}$$

Нормируем найденные значения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по правилу

$$\left|y_1(x)\right| + \left|y_2(x)\right| = 1.$$

Решаем третью последнюю задачу Коши вида (7,8). Используя метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности, находим искомые значения.

Вычисляем критическое и псевдокритическое решение $y_1(x)$ и $y_2(x)$ по формулам (9), обходя, за счет перехода к задачам Коши, громоздкие системы со множеством неизвестных.

УДК 519.71

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОЛЯХ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В качественной теории управления линейными динамическими системами при решении проблемы о возможности управления состоянием системы в том или ином смысле важно выяснить вопрос о минимальных требованиях на входные устройства, т.е. решить задачу о минимальном числе входов [2, 3] или в более широком смысле задачу о минимальных полях регулирования [1]. Такая задача для управляе-