$$u(t)=\frac{Q_1-a_{21}}{b_2}x_1(t)-\frac{a_{22}}{b_2}x_2(t)+\int\limits_0^t\frac{Q_2(s)}{b_2}x_2(t+h-s)ds,\ t\ge 0.$$

В частности, для системы

$$\dot{x}_1(t)=x_3(t-h)+v(t),\ x_3(t)=v(t)$$

не существует регулятора простейшего вида, стабилизирующего эту систему. Однако, замыкая ее регулятором $\breve{v}(p)=Q_1^*(p)\breve{x}_1(p)+Q_2^*(p)\breve{x}_3(p)$ в частотной области, получаем характеристическое уравнение вида

$$0=\det\begin{bmatrix} p-Q_1^*(p) & -e^{-ph}-Q_2^*(p) \\ -Q_1^*(p) & 1-Q_2^*(p) \end{bmatrix}=$$

$$=p-Q_1^*(p)-pQ_2^*(p)-e^{-ph}Q_1^*(p)=p+\alpha,\ \alpha>0.$$

Отсюда

$$Q_1^*(p)=Q_1=-\frac{\alpha}{2},\ Q_2^*(p)=\breve{Q}_2(p)=\frac{\alpha+Q_1^*(p)+e^{-ph}Q_1^*(p)}{-p}=\frac{\alpha(1-e^{-ph})}{-2p}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем искомый стабилизирующий регулятор вида

$$v(t)=-\frac{\alpha}{2}x_1(t)-\frac{\alpha}{2}\int\limits_0^t q(s)x_3(t-s)ds,\ t\ge 0,\ \text{где}\ q(s)=\begin{cases}1,\ s\in[0,h],\\ 0,\ s>h.\end{cases}$$

Рассмотренный пример показывает существенность интегральных элементов при расширении шкалы регуляторов по типу линейной обратной связи.

УДК 519.642

М.В. Чайковский, доц., канд. физ.-мат. наук;
О.А. Архипенко, ст. преп. (БГТУ, Минск)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} x'(\tau)+q(\tau)x(\tau)=\int\limits_0^\tau k_1(\tau-t)x(t)dt+\int\limits_0^\tau k_2(\tau-t)x'(t)dt+f(\tau), \\ x(0)=x_0, \end{cases}\qquad(1)$$

где $x(\tau)$ есть искомая функция, $x'(\tau)$ – её производная, $q(\tau)$, $f(\tau)$ – заданные функции, $k_v(\tau-s)\ (v=1,2)$ – известные ядра интегрального оператора. Предполагается существование и единственность решения данной задачи Коши, а также наличие необходимой гладкости функций, входящих в уравнение (1), обеспечивающей возможность проводимых в дальнейшем преобразований.

Такие интегро-дифференциальные уравнения возникают при решении некоторых практических задач. Особенностью данного интегро-дифференциального уравнения является то, что порядок производной искомой функции в дифференциальном и интегральном операторе совпадают.

Точный метод решения такого рода задач при постоянных коэффициентах в дифференциальном операторе уравнения (1), то есть $q(\tau) = q = const$, возможен с помощью применения аппарата преобразования Лапласа (операционный метод решения). Если ввести следующие обозначения для изображений по Лапласу функций

$$x(\tau) \to X(p),\ x'(\tau) \to pX(p) - x_0,\ f(t) \to F(p)$$

и использовать то, что преобразование Лапласа от свертки функций есть произведение свертываемых функций

$$\int_0^\tau k_1(\tau - t)x(t)dt \to K_1(p)X(P),\ \int_0^\tau k_2(\tau - t)x'(t)dt \to K_2(p)(pX(P) - x_0),$$

то придем к уравнению для изображения неизвестной функции

$$X(p) = \frac{(1 - K_2(p))x_0 + F(p)}{p(1 - K_2(p)) + q - K_1(p)}.$$

Далее находим обратное преобразование Лапласа от полученного выражения, что и является решением исходной задачи Коши.

В случае, если в дифференциальном операторе коэффициенты не являются постоянными величинами, то операционный метод в общем случае может оказаться неприменимым, так как возникнут трудности нахождения преобразования Лапласа от произведения двух функций, одна из которых неизвестна. Кроме того, часть функций или все функции, входящие в уравнение, могут быть получены из эксперимента (заданы таблично). Это существенно понизит эффективность этого метода в связи с необходимостью численного приближения преобразования Лапласа, как прямого, так и обратного. Для решения задачи (1) в этом случае приходится применять численные методы.

Большинство приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений сводит исходное уравнение к дифференциальному и численному решению последнего. Это обусловлено, во-первых, тем, что интегральный оператор Вольтерра является некомпактным оператором, и, во-вторых, что в численных методах решения уравнений Вольтерра имеет место накопление вычислительной погрешности, так как они относятся к явным методам (в отличие от фредгольмовских, для которых характерны неявные методы). В предлагаемой работе строится алгоритм численного решения задачи Коши (1) сведением её к интегральному уравнению Вольтерра и последующему его приближенному решению.

Используя формулу Ньютона-Лейбница, искомая функция выражается через свою производную следующим образом

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} x'(t)dt\,. \tag{2}$$

Подставим в (1) вместо $x(\tau)$ правую часть равенства (2)

$$x'(\tau) + q(\tau)[x_0 + \int_0^{\tau} x'(t)dt] = \int_0^{\tau} k_1(\tau - t)[x_0 +$$

$$+\int_0^{t} x'(s)ds]dt + \int_0^{\tau} k_2(\tau - s)x'(s)ds + f(\tau).$$

Сделав замену порядка интегрирования в получающемся двойном интеграле

$$\int_0^{\tau} k_1(\tau - t)\left[\int_0^{t} x'(s)ds\right]dt = \int_0^{\tau}\left[\int_s^{\tau} k_1(\tau - t)dt\right]x'(s)ds$$

и обозначив $x'(\tau) = y(\tau)$ придем к интегральному уравнению

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} R(\tau, s)y(s)ds + \Phi(\tau), \tag{3}$$

где $\Phi(\tau) = -x_0 q(\tau) + f(\tau) + x_0\int_0^{\tau} k_1(\tau - t)dt$, а ядро полученного интегрального уравнения Вольтерра имеет вид:

$$R(\tau, s) = \int_s^{\tau} k_1(\tau - t)dt - q(\tau) + k_2(\tau - s)\,.$$

Будем искать приближенные значения решения $y_j = y(\tau_j)$ интегрального уравнения в равноотстоящих точках $\tau_j = jh,\ (h = const)$ некоторого отрезка $[0, T]$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_j < \tau_{j+1} < \ldots < \tau_N = T$. Применим алгоритм последовательного повышения порядка точности, идея которого изложена статье [1]. Для простоты восприятия рассмотрим метод решения уравнения (3) на первом шаге более подробно. Предварительно отметим, что значение $y(0)=\Phi(0)=-x_0q(0)+f(0)$. Если применить к интегралу в (3) формулу левых прямоугольников

$$\int_0^{\tau} R(\tau,s)y(s)ds \approx \tau R(\tau,0)y(0),$$

то первое приближение к решению (в точке $0\le\tau\le h$) равно

$$y^{(0)}(\tau)=\tau R(\tau,0)y(0)+\Phi(\tau),$$

то есть может быть вычислено по имеющимся данным. Основной недостаток первого приближения заключается в том, что точность его не очень велика. Однако, оно позволяет найти значение в точке τ используя, например, квадратурную формулу трапеции. Тогда первое приближение решения интегрального уравнения

$$y^{(1)}(\tau)=\frac{h}{2}\Big[R(\tau,0)y(0)+R(\tau,\tau)y^{(0)}(\tau)\Big]+\Phi(\tau).$$

Для последовательного повышения порядка точности можно повторить эту процедуру, но использовать при этом уже имеющееся первое приближение решения интегрального уравнения:

$$y^{(2)}(\tau)=\frac{h}{2}\Big[R(\tau,0)y(0)+R(\tau,\tau)y^{(1)}(\tau)\Big]+\Phi(\tau). \tag{4}$$

Если достаточно вычислительных ресурсов, то можно проводить эту итерационную процедуру до того момента, пока $\left\|y^{(i+1)}(\tau)-y^{(i)}(\tau)\right\|\le\varepsilon$, где ε – заданная точность вычисления. Здесь неравенство рассматривается по любой допустимой норме в заданных условия задачи. С учетом того, что $y(\tau)=x'(\tau)$, это может быть и равномерная норма, но в связи с тем, что данные получаются экспериментальным путем предпочтительнее норма в $L_2\big[0,T\big]$. Если гладкость используемых функций достаточна, то можно применить и квадратурные формулы более высокого порядка точности, например, Симпсона. При небольшом шаге h достаточно и формулы трапеции, так как для формулы Симпсона придется использовать на каждом шаге приближение решения в трех точках, что по времени более затратно. Кроме того, вычислительная устойчивость формулы трапеции выше, чем Симпсона.

Если вместо τ в формулу (4) подставить $\tau=h$, то получим приближение решения интегрального уравнения в точке $\tau_1=h$

$$y^{(2)}(h)=\frac{h}{2}\Big[R(h,0)y(0)+R(h,h)y^{(1)}(h)\Big]+\Phi(h)\,, \tag{5}$$

то есть найдем приближенное решение уравнения (3) в точке $\tau_1=1\cdot h$. Продолжая итерационную процедуру (5) по формуле

$$y^{(i)}(h)=\frac{h}{2}\Big[R(h,0)y(0)+R(h,h)y^{(i-1)}(h)\Big]+\Phi(h),\, i=1,2,3,...$$

до выполнения условия $\left|y^{(i+1)}(h)-y^{(i)}(h)\right|\le\varepsilon$, принимаем, что

$$y_1=y(h)\approx y^{(i)}(h)$$

и переходим к процедуре вычисления приближенного решения на следующем шаге. Используя свойство аддитивности определенного интеграла для $h\le\tau\le 2h$

$$y(\tau)=\int_0^{\tau_1}R(\tau,s)y(s)ds+\int_{\tau_1}^{\tau}R(\tau,s)y(s)ds+\Phi(\tau) \tag{6}$$

и вышеприведенный алгоритм к этому уравнению, на втором шаге получим итерационный процесс

$$y^{(i)}(2h)=\frac{h}{2}\Big[R(2h,0)y(0)+R(2h,h)y_1\Big]+\frac{h}{2}\Big[R(2h,h)y_1+R(2h,2h)y^{(i-1)}(2h)\Big]+$$
$$+2\Phi(2h),\, i=1,2,3,\dots$$

для нахождения $y_2=y(2h)\approx y^{(i)}(2h)$. И так далее, что позволит найти все приближенные решения уравнения (3) $y_0,y_1,y_2,\dots,y_N$. Когда получен массив значений производных искомого решения, можно найти приближенные значения $x_k\approx x(\tau_k)$ ($\tau_k=k\cdot h,\ k=\overline{1,N}$) решения задачи Коши (1) в заданных точках

$$x\left(\tau_k\right)=x_0+\int_0^{\tau_k}x'(t)dt=x_0+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}}x'(t)dt\approx x_0+\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{k-1}\Big[y_j+y_{j+1}\Big],$$

что и требовалось. Заметим, что точность приближенных квадратурных формул, применяемых для нахождения x_k и y_k, должна быть согласована: воспользовавшись в итерационном процессе для нахождения приближенных решений y_k квадратурной формулой трапеций, не имеет смысла применять квадратурную формулу более высокого порядка точности для нахождения x_k. Также, реализуя данный алгоритм, целесообразно использовать свойства ядер интегрального оператора задачи (1). Например, в случае их быстрого стремления к нулю (то есть ноль начиная с некоторого шага, что характерно для реальных задач после выхода процесса на стационарный режим) нужно учитывать данный факт в программной реализации, что приводит к сокращению времени вычислений и уменьшению вычислительной погрешности. Этот подход, в частности, был реализован в [2] при численном решении задачи Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Янович, Л.А. Об одном численном методе четвертого порядка для решения системы линейных интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа / Л. А. Янович // Докл. АН БССР. – 1984. – Том 28. – № 4. – С. 293–296.

2. Денисенко, Н.В. Об одном алгоритме численного решения интегро-дифференциальных уравнений аэроупругости, учитывающем особенности ядер интегрального оператора / Н. В. Денисенко, Ф. Д. Ложечник, М. В. Чайковский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1990. – № 4. – С. 3–10.

УДК 517.948

С.В. Пономарева, доц., канд. физ.-мат. наук (ГП «Стравита», г. Минск);
О.Н. Пыжкова, зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ВЕЙЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Почти периодические функции возникли при описании процессов, носящих повторяющийся пространственно-временной характер, в частности, различной природы колебания, движение по замкнутой траектории, экономические явления (как пример, экономические циклы Китчина 3–4 года, циклы Жюгляра 7–11 лет, циклы Кузнеца, 15–25 лет, циклы Кондратьева 45–60 лет).

Как правило, для решения такого рода задач используются периодические функции, как математические идеальные модели происходящих процессов, однако почти периодические функции позволят получить большую точность описания, хотя и повысят сложность.

Дело в том, что производная почти периодической функции не обязательно снова почти периодична. А что, если эта производная нецелого порядка? Будем исследовать возможности дробного дифференцирования по Вейлю почти периодических функций, при этом использовать результаты, описанные в монографии [1], которая до сих