УДК 517.977

И. М. Борковская, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ТИПА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ГИБРИДНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Одним из важнейших свойств, присущих системе управления, является свойство устойчивости. Поэтому центральное место в качественной теории управления динамическими системами занимает задача стабилизации, целью которой является построение регулятора, обеспечивающего устойчивость замкнутой системы. Представляет интерес исследование стабилизации гибридных систем, т.е. систем, описывающих динамические процессы, природа которых носит неоднородный характер. К ним относятся дискретно-непрерывные (ГДН) системы, часть переменных в которых являются непрерывными, а часть – дискретными, а также дифференциально-разностные (ГДР) системы, в которых наряду с дифференциальными связями присутствуют и алгебраические зависимости. Исследование гибридных систем и решение различных задач управления для них позволяет расширить область применения математической теории управления.

В докладе рассматриваются несколько видов линейных регуляторов по типу обратной связи. Они применяются при решении задач стабилизации для систем, которые описывают процессы, носящие неоднородный характер. Основное внимание уделено регуляторам, не выводящим системы за пределы заданного класса, и регуляторам с интегральными составляющими. В частности, рассматриваются примеры построения регуляторов, стабилизирующих системы с запаздыванием, дифференциально-разностные системы. Получен стабилизирующий регулятор разностного типа для реальной системы с запаздыванием.

Рассмотрим гибридную дифференциально-разностную систему в симметрической относительно операторов дифференцирования и сдвига форме:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \tag{1}$$

$$x_2(t+h) = A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), t \geq 0 \tag{2}$$

с начальными условиями

$$x_1(0) = x_{10}, x_2(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [0, h), \tag{3}$$

где $x_1(t) \in R^{n_1}, x_2(t) \in R^{n_2}, u(t) \in R^r, h > 0, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – действительные постоянные матрицы соответствующих размеров;

$u = u(\cdot)$ – внешнее (кусочно-непрерывное) воздействие – управление; $\psi(\cdot)$ – начальная кусочно-непрерывная n_2-вектор-функция.

Рассмотрим линейную обратную связь следующих типов: в виде простейшего регулятора

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_2(t), \tag{4}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы (такой регулятор не выводит замкнутую систему за пределы рассматриваемого класса); в виде регулятора с интегральными составляющими типа свертки

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_2(t) + \int_0^t Q_1(s) x_1(t-s) ds + \int_0^t Q_2(s) x_2(t+h-s) ds, \tag{5}$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы, $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ – матрицы-функции соответствующих размеров, причем элементы функциональных матриц $Q_1(\cdot)$ и $Q_2(\cdot)$ являются кусочно-непрерывными функциями с конечным носителем $H > 0,$ $Q_1(\cdot) \equiv 0, Q_2(\cdot) \equiv 0$ для $t > H$. Положим

$$x_2(t) = x_3(t-h), t \ge 0. \tag{6}$$

Тогда система запишется в виде ГДР-системы запаздывающего типа, более удобной для применения преобразования Лапласа:

$$\dot{x}_1(t) = A_{11} x_1(t) + A_{12} x_3(t-h) + B_1 u(t), \tag{7}$$

$$x_3(t) = A_{21} x_1(t) + A_{22} x_3(t-h) + B_2 u(t), t \ge 0. \tag{8}$$

Регуляторы (4), (5) перепишутся в виде (9) и (10):

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_3(t-h), \tag{9}$$

$$u(t) = Q_1 x_1(t) + Q_2 x_3(t-h) + \int_0^t Q_1(s) x_1(t-s) ds + \int_0^t Q_2(s) x_3(t-s) ds. \tag{10}$$

В скалярном случае ($A_{ij} = a_{ij}, B_j = b_j, i = 1,2, j = 1,2$) $(b_2 \ne 0)$ полагаем

$$u(t) = \frac{1}{b_2}\left(-a_{21} x_1(t) - a_{22} x_3(t-h) + v(t)\right), t \ge 0. \tag{11}$$

Присоединим к системе (7), (8), (11)

$$\dot{x}_1(t) = a_{11}^* x_1(t) + a_{12}^* x_3(t-h) + b_1^* v(t),$$
$$x_3(t) = v(t), \tag{12}$$

где $b_1^* = \dfrac{b_1}{b_2}, a_{11}^* = a_{11} - b_1^* a_{21}, a_{12}^* = a_{12} - b_1^* a_{22},$ регулятор вида (10). Применяя преобразование Лапласа, проведем построение регулятора, стабилизирующего систему (12). После возвращения к системе (1), (2) получаем стабилизирующий регулятор

$$u(t) = \frac{Q_1 - a_{21}}{b_2} x_1(t) - \frac{a_{22}}{b_2} x_2(t) + \int_0^t \frac{Q_2(s)}{b_2} x_2(t+h-s)ds,\ t \geq 0.$$

В частности, для системы

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t-h) + v(t),\ x_3(t) = v(t)$$

не существует регулятора простейшего вида, стабилизирующего эту систему. Однако, замыкая ее регулятором $\breve{v}(p) = Q_1^*(p)\breve{x}_1(p) + Q_2^*(p)\breve{x}_3(p)$ в частотной области, получаем характеристическое уравнение вида

$$0 = \det\begin{bmatrix} p - Q_1^*(p) & -e^{-ph} - Q_2^*(p) \\ -Q_1^*(p) & 1 - Q_2^*(p) \end{bmatrix} =$$

$$= p - Q_1^*(p) - pQ_2^*(p) - e^{-ph}Q_1^*(p) = p + \alpha,\ \alpha > 0.$$

Отсюда

$$Q_1^*(p) = Q_1 = -\frac{\alpha}{2},\ Q_2^*(p) = \breve{Q}_2(p) = \frac{\alpha + Q_1^*(p) + e^{-ph}Q_1^*(p)}{-p} = \frac{\alpha(1 - e^{-ph})}{-2p}.$$

Возвращаясь к оригиналам, получаем искомый стабилизирующий регулятор вида

$$v(t) = -\frac{\alpha}{2} x_1(t) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t q(s) x_3(t-s)ds,\ t \geq 0,\ \text{где}\ q(s) = \begin{cases} 1,\ s \in [0, h], \\ 0,\ s > h. \end{cases}$$

Рассмотренный пример показывает существенность интегральных элементов при расширении шкалы регуляторов по типу линейной обратной связи.

УДК 519.642

М.В. Чайковский, доц., канд. физ.-мат. наук;
О.А. Архипенко, ст. преп. (БГТУ, Минск)

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА

Рассмотрим задачу Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} x'(\tau) + q(\tau)x(\tau) = \int_0^\tau k_1(\tau - t)x(t)dt + \int_0^\tau k_2(\tau - t)x'(t)dt + f(\tau), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(\tau)$ есть искомая функция, $x'(\tau)$ – её производная, $q(\tau)$, $f(\tau)$ – заданные функции, $k_\nu(\tau - s)\ (\nu = 1, 2)$ – известные ядра интегрального