УДК 517.977

В.В. Крахотко, доц., канд. физ.- мат. наук;
В.В. Горячкин, доц., канд. физ.-мат. наук (БГУ, г. Минск);
В.В. Игнатенко, доц., канд. физ.- мат. наук (БГТУ, г.Минск)

ОДНА ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ

Вопросы управляемости линейных дискретных двухпараметрических систем исследованы в монографии [1].

Доклад посвящен исследованию задачи управляемости интервальной нестационарной дискретной системы, у которой матрицы уравнения при неизвестной переменной состояния неотрицательные интервалы. Интервальную управляемость можно трактовать как управляемость интервальных систем, то есть систем, у которых коэффициенты являются интервалами и которые подчинены специальной интервальной арифметике [2-4].

Получен интервальный аналог формулы Коши. Рассмотрена задача перевода траектории интервальной двухпараметрической дискретной системы из одного множества начальных состояний в другое за конечное число тактов, используя только точечное управление. Нахождение не интервального управления сведено к решению задачи линейного программирования, сформулированной по коэффициентам системы и интервальному множеству начальных состояний. Предложен конструктивный алгоритм построения искомого управления.

В рамках интервального исчисления [2] рассмотрим интервальную нестационарную двухпараметрическую линейную дискретную систему:

$$[x(t+1,s)]=[A(t,s)][x(t,s+1)]+[D(t,s)][x(t,s)]+[B(t,s)][u(t,s)], \qquad (1)$$

где $(t,s)\in Z_+\times Z$ - независимая переменная; $[x(t,s)]\in I(R^n)$ – интервальная переменная (интервальное состояние), $[u(t,s)]\in I(R^m)$ – интервальное управление; $[A(t,s)],[D(t,s)]\in I(R_+^{n\times n})$ – интервальные неотрицательные матрицы, $[B(t,s)]\in I(R^{n\times m})$ – интервальная матрица.

Зададим интервальное начальное состояние

$$[x(0,s)]=[\alpha(s)]\in I(R^n),\ s\in Z. \qquad (2)$$

Зафиксируем пару (t,s) в множестве $\Omega=[0,T]\times[s,s+T]$, $s\in Z$, $T\in Z_+$ и $T\geq n$; и составим рекуррентное соотношение

$$
\begin{aligned}
&[F(t,s,i,j)] = [F(t,s,i+1,j-1)][A(i,j-1)] + [F(t,.s,i+1,j)][D(i,j)],\\
&i = t, t-1, t-2, \ldots, 1, 0,\\
&j = s+t-i-1, s+t-i-2, s+t-i-3, \ldots, s+1, s
\end{aligned} \tag{3}
$$

с краевыми условиями:

$$
[F(t,s,i,j) = 0 \text{ при } j<1 \text{ или } i+j>t+s, \quad [F(t,s,i,j) = E \text{ при } i=t, \tag{4}
$$

Учитывая соотношения (3), (4) и неотрицательность матриц $[F(t,s,i,j)],\ [A(t,s)],\ [D(t,s)]$, получим

$$
\begin{aligned}
[x(t,s)] \subseteq &\sum_{j=0}^{t} [F(t,s,0,s+j)][\alpha(s+j)] + \\
+ &\sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1} [F(t,s,i+1,j)]([B(i,s+j)][u(i,s+j)]).
\end{aligned} \tag{5}
$$

Включение (5) есть обобщение известной формулы Коши на случай интервальной задачи.

Интервальную функцию в правой части включения (5)

$$
[z(t,s)] = \sum_{j=0}^{t} [F(t,s,0,s+j)][\alpha(s+j)] + \sum_{i=0}^{t-1}\sum_{j=0}^{t-i-1} [F(t,s,i+1,j)]([B(i,s+j)][u(i,s+j)])
$$

назовем приближенным решением задачи Коши системы (1),(2).

Легко видеть, что в случае точечных матриц и векторов включение (5) переходит в равенство.

Рассмотрим задачу перевода траектории решения интервальной системы (1), (2) из одного заданного множества $[\alpha(s)]$ в другое $[x_T]$ за конечное число тактов. Если такая задача разрешима, то будем говорить об управляемости системы (1).

А так как сформулированная задача, очевидно, разрешима не всегда, то поэтому поставим задачу управления несколько иначе.

Пусть ε – n-вектор с неотрицательными координатами. Определим ε-окрестность интервального вектора $[x_T] = [x_{1T}, x_{2,T}]$ как $[x_{T,\varepsilon}] = [x_{1T} - \varepsilon, x_{2,T} + \varepsilon]$.

Требуется найти управление $[u] = [u(t,s)] \in I(R)$, такое, что точное решение $[x(t,s,[u])]$ задачи (1), (2) попадет в ε-окрестность бруса $[x_{T,\varepsilon}]$ и $e\varepsilon$ будет минимальна, где вектор $e = (1,1,\ldots,1)$. Рассмотрим более простую задачу о попадании приближенного решения $[z(t,s)]$ в минимальную окрестность бруса $[x_{T}]$.

Следуя работе [5], сформулируем задачу линейного программирования:

$$
\begin{aligned}
& \qquad e\varepsilon \to \min \\
& d_1 + M_{III} v - M_{IV} \phi \ge x_{1T} - \varepsilon, \\
& d_2 + M_{III} w + M_{IV} \psi \le x_{2T} + \varepsilon, \\
& M_I u - M_{II} \omega - v = 0 \\
& M_I u + M_{II} \omega - w = 0, \\
& -\phi \le v \le \phi,\ -\psi \le w \le \psi, -\omega \le u \le \omega, \\
& \varepsilon \ge 0, u \in U
\end{aligned} \tag{6}
$$

с неизвестными векторами $(\varepsilon, u, \omega, v, \phi, w, \psi)$. В задаче (6) целевая функция ограничена снизу нулем и ограничения совместны, поэтому ее оптимальный план $(\varepsilon^*, u^*, \omega^*, v^*, \varphi^*, w^*, \psi^*)$ существует.

Ясно, что равенство $\varepsilon^* = 0$ необходимо и достаточно для совместности системы ограничений (6). Справедлива

Теорема 1. Для управляемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы оптимальный план задачи (6) имел составляющую $\varepsilon^* = 0$. *В этом случае управление* u^* *переводит траекторию системы (1) из начального состояния (2) в терминальный брус* $[x(t,s,u^*)] \subseteq z(t,s,u^*) \subseteq [x_T]$. *Если* $\varepsilon^* > 0$, *то траектория системы (1) из начального состояния (2) точечным управлением* u^* *переводится в минимальную окрестность бруса* $[x(t,s,u^*)] \subseteq [x_{T,\varepsilon}]$.

Проиллюстрируем решение задачи управляемости на следующем простом примере. Пусть $s = 0, T = 3, n = 2, m = 1$. Матрицы-коэффициенты и начальное условие представлены в таблице.

Таблица – Решение задачи управляемости

$[A(t,s)]$	$[D(t,s)]$	$[B(t,s)]$	$[\alpha(s)]$
Матрица [A(0,0)] [1.00 , 1,00] [0,00 , 0,20] [0.00 , 0,00] [1,00 , 1,00]	Матрица [D(0,0)] [0.00 , 0,00] [0,00 , 0,00] [0.20 , 0,50] [0,00 , 0,00]	Вектор [B(0,0)] [- 0.40 , - 0,30] [3.00 , 3,00]	Вектор [Alfa(0)] [- 4.00 , 1.00] [2.00 , 3.00]
Матрица [A(0,1)] [2.00 , 3,00] [0,40 , 0,50] [3.00 , 4,00] [0,20 , 0,30]	Матрица [D(0,1)] [0.00 , 1,00] [1,00 , 1,00] [0.00 , 0,00] [0,00 , 0,00]	Вектор [B(0,1)] [- 2.00 , - 1,00] [- 4.00 , - 0,40]	Вектор [Alfa(1)] [1.00 , 2.00] [- 2.00 , -1.00]
Матрица [A(0,2)] [1.00 , 2,00] [1,00 , 1,00] [3.00 , 5,00] [0,40 , 0,60]	Матрица [D(0,2)] [0.00 , 1,00] [0,10 , 0,40] [0.00 , 1,00] [1,00 , 4,00]	Вектор [B(0,2)] [- 0.60 , - 0,50] [- 2.00 , - 1,00]	Вектор [Alfa(2)] [0.00 , 2.00] [- 2.00 , 0.00]
Матрица [A(1,0)] [5.00 , 5,00] [2,00 , 4,00] [1.00 , 1,00] [0,50 , 0,60]	Матрица [D(1,0)] [0.30 , 0,50] [1,00 , 2,00] [0.40 , 0,50] [0,00 , 4,00]	Вектор [B(1,0)] [- 1,00 , - 1,00] [0.12 , 0,12]	Вектор [Alfa(3)] [2.00 , 3.00] [- 3.00 , 1.00]
Матрица [A(1,1)] [1.00 , 1,00] [1,00 , 3,00] [0.50 , 0,60] [0,60 , 0,80]	Матрица [D(1,1)] [0.20 , 0,40] [0,10 , 0,60] [0.00 , 0,70] [0,10 , 0,10]	Вектор [B(1,1)] [- 0.30 , - 0,30] [- 0.40 , - 0,20]	
Матрица [A(2,0)] [0.30 , 0,50] [0,50 , 0,70] [0.00 , 0,30] [0,00 , 0,10]	Матрица [D(2,0)] [1.00 , 1,00] [1,00 , 1,00] [0.30 , 0,30] [2,00 , 2,00]	Вектор [B(2,0)] [- 3.00 , - 0,30] [- 0.20 , - 0,20]	

Терминальное условие: $[x(t,s)] \subseteq [x_T] = \begin{pmatrix} [-105, 65] \\ [-80, 65] \end{pmatrix}$.

Решение задачи (6) с заданными параметрами получено в среде пакета компьютерной математики "Mathematica". Нас интересует только следующие вектор-столбцы решения оптимизационной задачи (6): левая и правая окрестности терминального бруса $\varepsilon = (31.492, 0)$, $\varepsilon_R^* = (0, 3.70373)$ и точечное управление $u = (0, 0, 0, 80.40454, 0, 0)$. Для анализа воспользуемся найденным управлением u^* и вычислим точное и приближенное решения. Имеем: точное решение $[x(3,0,u)] = \begin{pmatrix} [\ \text{-}126.676\ ,\ 61.87\ ] \\ [\ \text{-}55.6\ ,\ 64.36373\ ] \end{pmatrix}$, приближенное решение $[z(3,0,u)] = \begin{pmatrix} [\ \text{-}136.491\ ,\ 65.00\ ] \\ [\ \text{-}62.390\ ,\ 68.703\ ] \end{pmatrix}$, терминальный брус $[x_T] = \begin{pmatrix} [-105,65] \\ [-80,65] \end{pmatrix}$ и его минимальная окрестность $[x_{T,\varepsilon_L^*\varepsilon_R^*}] = \begin{pmatrix} [-136.491, 65] \\ [-80, 68.70373] \end{pmatrix}$. Евклидова норма матрицы метрик Хаусдорфа попадания точного решения в минимальную окрестность наперед заданного терминального бруса равна 31.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления.– Мн.: Навука і тэхніка, 1996. – 200 с.

2. Шарый С.А. Конечномерный интервальный анализ, Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2013. Электронная книга, URL: htth://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/Shary Book.pdf.

3. Гайшун И.В., Горячкин В.В. Интервальная и робастная устойчивость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Том 51, №10. – С. 1277–1283.

4. Гайшун И.В.,. Горячкин, В.В., Крахотко В.В. Оценка решений двухпараметрической дискретной системы с интервальными коэффициентами // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 3. – С.5–8.

5. Ащепков Л.Т. Неотрицательная управляемость интервальной линейной дискретной системы // Известия Иркутского государственного университета. Серия "Математика". – 2009. – Т. 2, № 1. – С. 37–51.