$$\begin{aligned}
& + 8a_1 h k m \mu_2 + 4a_0 a_1 b_1^2 - 16a_0 a_1 k m + 2a_1 b_1^2 \mu_1 - \\
& - 8a_1 k m \mu_1 - 8a_0^2 b_1 - 8a_0^2 k - 8a_0^2 m - 8a_0 b_1 \mu_1 - \\
& - 8a_0 k \mu_1 - 8a_0 m \mu_1 - 8b_1 \mu_2 - 8k \mu_2 - 8m \mu_2) + \\
& + \left(\frac{m-k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2} \right)^2} - \frac{kh}{\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}} \right) \cdot \frac{a_1 (b_1 + 2m)}{4(2k + b_1)} \times \\
& \times (a_1^2 b_1^2 - 4a_0 a_1 b_1 - 2a_1 b_1 \mu_1 + 4a_0^2 + 4a_0 \mu_1 + 4\mu_2).
\end{aligned}$$

УДК 517.584

Л.Д. Яроцкая, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУММЫ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ $I_{-\nu} + I_{\nu}$

Многие физические процессы описываются уравнениями в частных производных, решение которых методом разделения переменных в полярных координатах часто приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям специальной структуры, описанных Ф. Бесселем.

Для модифицированного уравнения Бесселя [1, 7.2.2.11]

$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + \nu^2) w(z) = 0, \quad 1)$$

где z – комплексная переменная, ν – параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения, общее решение может быть записано в виде

$$w(z) = C_1 I_{\nu}(z) + C_2 K_{\nu}(z),$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные, а модифицированный функции Бесселя $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ определяются формулами:

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k + \nu}, \quad 2)$$

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu \pi)} [I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)], \quad 3)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера. Если ν не является целым числом, то функции $I_{\nu}(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения (1).

Функции Бесселя могут быть представлены обобщенным гипергеометрическим рядом

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!},$$

содержащий в числителе p , а в знаменателе q параметров, коэффициенты которого определяются символом Похгаммера

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}, \quad (a)_0 = 1.$$

В частности,

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; \frac{z^2}{4}\right) = \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4}\right).$$

Ряд в правой части абсолютно сходится при всех z , если $p \leq q$.

Если $\nu = n$ – целое положительное число, то первые $n-1$ членов бесконечного ряда, определяющего $I_{-n}(z)$, обращаются в нуль, поскольку гамма-функции, стоящие в знаменателе этих членов, имеют полюс. Остающиеся гамма-функции могут быть заменены факториалами, в результате получаем

$$I_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}.$$

Заменяя здесь k на $n+m$, $m=0,1,2,\dots$, получаем

$$I_{-n}(z) = I_n(z). \quad 4)$$

При целом $\nu = n$ функция (3) определяется следующим образом:

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z).$$

Функции Бесселя и модифицированные функции Бесселя сводятся к линейным комбинациям элементарных функций тогда и только тогда, когда ν является половиной нечетного числа или, кратко говорят, полуцелым числом [1]. Найдем предварительно значения функций

$I_{\pm\frac{1}{2}}(z)$, для чего положим в (2) $\nu = \pm\frac{1}{2}$ и воспользуемся для преобразования рядов формулой удвоения гамма-функции

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2z).$$

В результате получим

$$I_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sh} z,$$

и, аналогично,

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{ch} z.$$

Далее, учитывая определение гиперболических функций $\operatorname{ch} z$ и $\operatorname{sh} z$, для суммы модифицированных функций Бесселя имеем выражение

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) + I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^z.$$

Возможность выразить модифицированные функции Бесселя с любым полуцелым параметром через элементарные функции следует из рекуррентной формулы [1]

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_{\nu}(z),$$

пользуясь которой можно последовательно получить:

$$I_{-\frac{3}{2}}(z) + I_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 - \frac{1}{z}\right) e^z,$$

$$I_{-\frac{5}{2}}(z) + I_{\frac{5}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 - \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2}\right) e^z$$

и т.д. Можно показать, что

$$I_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(z) + I_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^z \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2z)^k}.$$

Функции Бесселя допускают интегральные представления с помощью системы определенных и контурных интегралов, которые часто встречаются при решении задач теоретической и прикладной математики. Для рассматриваемой суммы модифицированных функций Бесселя справедливо представление [2, п. 10.12]

$$I_{-\nu}(z) + I_{\nu}(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \theta} \cos \nu \theta d\theta + \frac{2 \sin \nu \pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh} \nu t dt. \quad (5)$$

Отметим, что несобственный интеграл в (5) при $\nu = i\tau$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, определяет специальную функцию двух действительных переменных

$$K(\tau, x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} u} \sin \tau u \, du \quad (6)$$

– ядра интегрального преобразования, введенного в работе [3], в связи с решением интегрального уравнения второго рода с двумя ядрами типа свертки Конторовича – Лебедева. Кроме того, в работе [4] изучались свойства преобразований по индексу, порожденных двойственной формулой

$$f(\tau) = -\frac{2}{\pi^3} \int_0^{\infty} [I_{-i\tau}(x) + I_{i\tau}(x)] \int_0^{\infty} y K(\tau, y) f(y) dy \frac{dx}{x}.$$

Там же показано, что интеграл (6) выражается через функции гипергеометрического типа следующим образом

$$K(\tau, x) = \frac{e^{-x}}{\tau} {}_2F_2\left(\frac{1}{2}, 1; 1-i\tau, 1+i\tau; 2x\right) - \frac{\pi}{2 \operatorname{sh} \pi \tau} [I_{-i\tau}(x) + I_{i\tau}(x)].$$

Справедливо представление интегралом Меллина-Бернса вида

$$I_{-\nu}(\sqrt{z}) + I_{\nu}(\sqrt{z}) = \frac{1}{i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^{-s} \frac{\Gamma(-\frac{\nu}{2}+s)\Gamma(\frac{\nu}{2}+s)}{\Gamma(s)\Gamma(\frac{1}{2}+s)\Gamma(1-s)\Gamma(\frac{1}{2}-s)} ds,$$

где $-\left|\operatorname{Re}\frac{\nu}{2}\right| < \gamma < 1$. Оно может быть получено путем вычисления интеграла с помощью вычетов подынтегральной функции или применения формул [5, 8.4.51].

Отметим, что многочисленные результаты, относящиеся к теории специальных функций, можно найти в справочнике [5] или на сайте Wolfram Functions Site.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М., «Наука», 1974. – 296 с.
2. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. – М., Изд-во иностр. лит., 1949. – 797 с.
3. Гусаревич Л.Д. Об интегральном уравнении с двумя ядрами, разрешимом с помощью преобразования Конторовича – Лебедева // Известия НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук, 1(1999), с. 37–44.
4. Yakubovich S.B., Gusarevich L.D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel function // Fractional Calculus and Applied Analysis, 1998, Vol. 1, № 3, P. 297–309.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.