

МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где A_j , $j = 0, 1, 2$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h}] \equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h})\lambda + \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h}, \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_0 x(t) + \sum_{j=1}^L q'_j x(t-jh) + \int_{-2h}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (3)$$

где $L \in \mathbb{N}$, q_{ij} , q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = q'_0 + \sum_{j=1}^L q'_j e^{-jh} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 2, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с (2)):

$$\begin{aligned} & \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] \\ & \equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h})\lambda + \\ & + \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11}m + \tilde{\alpha}_{12}m^2; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01}m + \tilde{\alpha}_{02}m^2 + \tilde{\alpha}_{03}m^3 + \tilde{\alpha}_{04}m^4, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}, i=0, j=0, 1, 3, 4; i=1, j=0, 1, 2$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига, $A(m) = A_0 + A_1m + A_2m^2$.

Пусть матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1m & b_0 + b_1m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = [\eta_1(\lambda, m) \quad \eta_2(\lambda, m)]. \quad (9)$$

Нетрудно показать, что если интегральные компоненты регулятора искать в виде $c_0 \frac{m-k}{\lambda-\xi}$,

где $k = e^{-\xi h}$, то ξ удовлетворяет уравнению

$$\xi^2 + (b_1a_1 - 2a_0)\xi + a_0^2 + b_0a_1^2 - a_0a_1b_1 = 0. \quad (10)$$

Дискриминант уравнения (10) имеет вид

$$D = a_1^2b_1^2 - 4a_1^2b_0.$$

Предположим теперь, что $D=0$. Пусть выполнено условие

$$a_1 \neq 0. \quad (11)$$

Тогда из равенства нулю определителя уравнения (10) следует, что

$$b_0 = \frac{b_1^2}{4}.$$

С учетом последнего условия будем считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & \frac{b_1^2}{4} + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор $U(\lambda, m)$ будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = [\eta_1(\lambda, m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m)].$$

Непосредственной проверкой можно установить, что следующий регулятор решает задачу модального управления

$$\begin{aligned} \eta_1(\lambda, m) = & \frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1^3 b_1^2 h k - 4a_0 a_1^2 b_1 h k + \\ & + 4a_0^2 a_1 h k + 4a_1 h k (a_0 + a_1 m) \mu_1 - 4a_1^2 k^2 + \\ & + 4a_1 h k \mu_2 - 8a_0 a_1 k - 4a_0^2 - 4(a_0 + a_1 m) - 4\mu_2) + \\ & + \frac{m - k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1^3 b_1^2 h k - \\ & - 4a_0 a_1^2 b_1 h k + 4a_0^2 a_1 h k + 4a_1 h k (a_0 + a_1 m) \mu_1 + \\ & + a_1^2 b_1^2 + 4a_1^2 b_1 k + 4a_1 h k \mu_2 - 8a_0 a_1 k - \\ & - 4a_0^2 - 4(a_0 + a_1 m) \mu_1 - 4\mu_2) + \frac{1}{2k + a_1 b_1} \times \\ & \times \left(\frac{m - k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}\right)^2} - \frac{kh}{\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}} \right) a_1^2 \times \\ & \times (a_1^2 b_1^2 - 4a_0 a_1 b_1 + 4a_0^2 + 4(a_0 + a_1 m) \mu_1 + 4\mu_2). \\ \eta_2(\lambda, m) = & - \frac{1}{(2k + b_1)^2} (a_1 b_1^2 h k \mu_1 + 4a_1 b_1 h k m \mu_1 + \\ & + 4a_1 h k m^2 \mu_1 + a_1 b_1^2 m + 4a_1 b_1 k m + 4a_1 k^2 m + a_0 b_1^2 + \\ & + 4a_0 b_1 k + 4a_0 k^2 + 4b_1 k \mu_1 - 4b_1 m \mu_1 + 4k^2 \mu_1 - \\ & - 4m^2 \mu_1) - \frac{1}{2(2k + b_1)^2} \cdot \frac{m - k}{\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}} \times \\ & \times (a_1^3 b_1^3 h k + 2a_1^3 b_1^2 h k m - 4a_0 a_1^2 b_1^2 h k - 8a_0 a_1^2 b_1 h k m - \\ & - 2a_1^2 b_1^2 h k \mu_1 - 4a_1^2 b_1 h k m \mu_1 + 4a_0^2 a_1 b_1 h k + \\ & + 8a_0^2 a_1 h k m + 4a_0 a_1 b_1 h k \mu_1 + 8a_0 a_1 h k m \mu_1 + \\ & + 2a_1^2 b_1^2 k + 2a_1^2 b_1^2 m + 8a_1^2 b_1 h k m + 4a_1 b_1 h k \mu_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 8a_1 h k m \mu_2 + 4a_0 a_1 b_1^2 - 16a_0 a_1 k m + 2a_1 b_1^2 \mu_1 - \\
& - 8a_1 k m \mu_1 - 8a_0^2 b_1 - 8a_0^2 k - 8a_0^2 m - 8a_0 b_1 \mu_1 - \\
& - 8a_0 k \mu_1 - 8a_0 m \mu_1 - 8b_1 \mu_2 - 8k \mu_2 - 8m \mu_2) + \\
& + \left(\frac{m-k}{\left(\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2} \right)^2} - \frac{k h}{\lambda - a_0 + \frac{a_1 b_1}{2}} \right) \cdot \frac{a_1 (b_1 + 2m)}{4(2k + b_1)} \times \\
& \times (a_1^2 b_1^2 - 4a_0 a_1 b_1 - 2a_1 b_1 \mu_1 + 4a_0^2 + 4a_0 \mu_1 + 4\mu_2).
\end{aligned}$$

УДК 517.584

Л.Д. Яроцкая, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СУММЫ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ $I_{-\nu} + I_{\nu}$

Многие физические процессы описываются уравнениями в частных производных, решение которых методом разделения переменных в полярных координатах часто приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям специальной структуры, описанных Ф. Бесселем.

Для модифицированного уравнения Бесселя [1, 7.2.2.11]

$$z^2 w''(z) + z w'(z) - (z^2 + \nu^2) w(z) = 0, \quad 1)$$

где z – комплексная переменная, ν – параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения, общее решение может быть записано в виде

$$w(z) = C_1 I_{\nu}(z) + C_2 K_{\nu}(z),$$

где C_1 и C_2 произвольные постоянные, а модифицированный функции Бесселя $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ определяются формулами:

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k + \nu}, \quad 2)$$

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi}{2 \sin(\nu \pi)} [I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)], \quad 3)$$

где $\Gamma(s)$ – гамма-функция Эйлера. Если ν не является целым числом, то функции $I_{\nu}(z)$ и $I_{-\nu}(z)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения (1).