6. Мататава І.В. Мераморфныя рашэнні сістэм Гамільтона другога парадку з паліномнымі правымі часткамі // Весці БДПУ, 1999. № 4. - С. 110-114.
7. Мататов В.И., Михайловская Л.В. Неавтономные кубические системы двух дифференциальных уравнений, обладающие свойством Пенлеве // Дифференц.уравнения, 1998. Т. 34. № 2. - С. 216-221.

УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, ст. преп.

О СВОЙСТВЕ ЖЕСТКОСТИ В ЗАДАЧАХ КОШИ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

The influence of the stiffness condition on a solution to a typical stiff linear boundary problem with boundary layer is studied.

Большой круг задач, с которыми сталкиваются физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, описывается математическими моделями, в основе которых лежат о.д.у. с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом в их решении пограничными слоями. Явление жесткости, как правило, присуще дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной. В вычислительной математике это свойство жесткости относится к числу наиболее сложных задач [1], представляющих собой такую математическую модель, построение и реализация для которой соответствующей дискретной модели является по-прежнему трудной и далекой от завершенности проблемой.

Роль жесткости в задачах Коши и в граничных задачах различна, кроме этого, различен и механизм проявления жесткости в этих задачах. В связи с этим представляет интерес изучение взаимодействия этих двух сторон проявления жесткости в рамках вычислительных схем методов редукции граничных задач к задачам Коши, в том числе и в вычислительных схемах метода множественной двусторонней пристрелки.

Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\varepsilon>0$ при старшей производной вида

$$Ly(x)=\varepsilon y''(x)+a(x)y'(x)-b(x)y(x)=f(x), \quad 0<x<1; \qquad (1)$$

$y(0)=A,\ y(1)=B,\ a(x)\geq \alpha >0,\ b(x)\geq 0.$ (2)

Изучим некоторые аспекты проблемы жесткости на примере жесткой граничной задачи вида (1,2) с одним пограничным слоем вблизи точки x=0 и выясним, в какой мере переход от граничной задачи к задачам Коши может оказаться эффективным.

В задаче (1,2) будем “замораживать” коэффициенты, предполагая при этом, что a(x)=const, b(x)=const и положим в уравнении (1) f(x)=0.

Тогда общее решение граничной задачи вида (1,2) запишется в виде

$y(x)=C_1\exp(\lambda_1 x)+C_2\exp(\lambda_2 x),\quad \lambda_1>0,\ \lambda_2>0.$ (3)

И, используя граничные условия, определим C_1 и C_2

$C_1=(B-A\exp(\lambda_1))/(\exp(\lambda_1)-\exp(\lambda_2)),$

$C_2=(B-A\exp(\lambda_1))/(\exp(\lambda_2)-\exp(\lambda_1)).$

Представим теперь y(x) в таком виде, чтобы в нем явно выделялось влияние величин A и B:

$y(x)=AG_1(x)+BG_2(x),$ (4)

где

$G_1(x)=(\exp(\lambda_1+\lambda_2 x)-\exp(\lambda_2+\lambda_1 x))/(\exp(\lambda_1)-\exp(\lambda_2)),$

$G_2(x)=(\exp(\lambda_1 x)-\exp(\lambda_2 x))/(\exp(\lambda_1)-\exp(\lambda_2)).$

Обозначим

$C^{(0)}=A,\ C^{(1)}=y'(0)=AG_1'(0)+BG_2'(0)=$

$=(A(\lambda_2\exp(\lambda_1)-\lambda_1\exp(\lambda_2))+B(\lambda_1-\lambda_2))/(\exp(\lambda_1)-\exp(\lambda_2))$

и запишем решение граничной задачи (1,2) в следующем виде:

$y1(x)=G((0)H1(x)+G(1)H2(x),\qquad x\in J(+)=\{0<x<1\},$ (5)

где

$H_1(x)=(\lambda_1\exp(\lambda_2 x)-\lambda_2\exp(\lambda_1 x))/(\lambda_1-\lambda_2),$

$H_2(x)=(\exp(\lambda_1 x)-\exp(\lambda_2 x))/(\lambda_1-\lambda_2).$

Легко заметить, что $y_1(x)=y(x)$.

Аналогично получается решение граничной задачи вида (1,2) и на правом конце отрезка. Обозначим $y(1)=D^{(0)}=B$ и $y'(1)=D^{(1)}=$

$=AG_1'(1)+BG_2'(1)$. Тогда решение граничной задачи с пограничным слоем вида (1,2) запишется в следующем виде:

$$y_2(x)=D^{(0)}P_1(x)+D^{(1)}P_2(x), \quad x\in J^{(-)}=\{1>x>0\}, \qquad (6)$$

где

$$P_1(x)=(\lambda_1\exp(-\lambda_2(1-x))-\lambda_2\exp(-\lambda_1(1-x)))/(\lambda_1-\lambda_2),$$

$$P_2(x)=(\exp(-\lambda_2(1-x))-\exp(-\lambda_1(1-x)))/(\lambda_1-\lambda_2).$$

Легко заметить, что $y_2(x)=y(x)$.

Проанализируем поведение функций влияния $G_i(x)$, $H_i(x)$, $P_i(x)$, $i=1,2$.Особое внимание уделим этим функциям на концах отрезка [0;1]. Если $x\to 0$, то $G_1(x)\to 1$; если $x\to 1$, то $G_1(x)\to 0$. Для $G_2(x)$ справедлива обратная картина: $G_2(x)\to 0$ при $x\to 0$ и $G_2(x)\to 1$ при $x\to 1$.

Если $H_1(x)\to 1$ при $x\to 0$ и $H_1(x)\to M_1$ при $x\to 1$, то

$$M_1=(\lambda_1\exp(\lambda_2)-\lambda_2\exp(\lambda_1))/(\lambda_1-\lambda_2)>1,$$

Если $H_2(x)\to 0$ при $x\to 0$ и $H_2(x)\to M_2$ при $x\to 1$, то

$$M_2=(\exp(\lambda_1)-\exp(\lambda_2))/(\lambda_1-\lambda_2)>1.$$

Если $P_1(x)\to K_1$ при $x\to 0$, то

$$K_1=(\lambda_1\exp(-\lambda_2)-\lambda_2\exp(-\lambda_1))/(\lambda_1-\lambda_2)>1.$$

Если $P_1(x)\to 1$ при $x\to 1$, $P_2(x)\to K_2$ при $x\to 0$, то

$$K_2=(\exp(-\lambda_2)-\exp(-\lambda_1))/(\lambda_1-\lambda_2)>1.$$

Таким образом, функции $G_1(x)$, $P_1(x)$ и $P_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x=0$, а функции $G_2(x)$, $H_1(x)$ и $H_2(x)$ имеют пограничный слой в точке $x=1$. В качественном отношении изменение производных для всех этих функций в соответствующих зонах пограничного слоя является равносильным. Исходя из этого, не следует однозначно отдавать предпочтение форме (4), которая представляет решение исходной граничной задачи, перед соответствующими формами вида (5) и (6). И, кроме этого, нужно учитывать, что функции $G_1(x)$ и $G_2(x)$ сами имеют пограничные слои в обеих точках: $x=0$ и $x=1$, что создает в представлении решения определенную дополнительную сложность.

Анализируя поведение функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ и $P_1(x)$, $P_2(x)$, можно заметить, что есть возможность указать такую внутреннюю точку $x_0\in(0,1)$ вблизи точки $x=0$ и такую внутреннюю точку $x_1\in(0,1)$ вблизи точки $x=1$,что поведение функций $H_1(x)$, $H_2(x)$ на $[0:x_0)$, а функций

$P_1(x)$, $P_2(x)$ на $[x_1:1)$ будет благоприятным в том смысле, что на этих отрезках отрицательное влияние пограничных слоев будет нейтрализовано. Это обстоятельство можно использовать для того, чтобы отрезок [0;1] покрыть совокупностью положительных $J^{(+)}$ и отрицательных $J^{(-)}$ подинтервалов пристрелки, причем таких, на которых будет нейтрализовано отрицательное влияние пограничных слоев.

Этот механизм четко прослеживается в методе множественной двусторонней пристрелки. Еще можно отметить, что обнаруженные здесь закономерности имеют место и в случае линейных граничных задач общего вида с пограничным слоем [2], а также нелинейных граничных задач, поскольку они определяются внутренней природой граничной задачи, задач Коши, длиной отрезков интегрирования и направлением интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений / Пер. с англ. М.,1983.
2. Кулешова И.Ф. О численном решении граничных задач, обладающих сильной чувствительностью к изменению входных данных // Известия АН БССР, сер. физико-матем. Минск, 1986. 18с. Деп. в ВИНИТИ 11.04. 2618-В86.

УДК 536.758

В. Б. Немцов, профессор;
В. В. Белов, доцент;
А. В. Кондратенко, ассистент

СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

The review of the results of investigations carried out by the staff of Theoretical Mechanics Department over recent years is presented. The main field of these researches is statistical mechanics of complex systems, namely, statistical theory of viscosity of liquid crystals, statistical thermodynamics of deformation of DNA molecule, electrostatical effects of ion environment of DNA molecule and biomembranes, statistical friction theory of complex molecules.

Макроскопические свойства материи зависят не только от природы образующих ее частиц, но и от ее структуры, зачастую описываемой в терминах самоорганизующейся упорядоченности системы.