УДК 517.925.6

И. В. Мататова, ассистент

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ГАМИЛЬТОНА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Not autonomus Hamilton system of second order with polynomial right parts for uniqueness of movable singular points are studied. Classes of functions expressing solutions of systems which can have only poles have been established in the article.

Решения нелинейных дифференциальных уравнений, рассматриваемые как аналитические функции комплексной переменной, характеризуются в основном особыми точками. Важно знать расположение особых точек на плоскости независимой переменной, а также представление решений в окрестности таких точек. Большое значение среди этих проблем имеет вопрос о характере подвижных особых точек нелинейных дифференциальных уравнений, т.е. точек, положение которых зависит от начальных данных [1; 2; 3].

Неавтономные системы вида $x' = R_1(z, y)$, $y' = R_2(z, x)$ с рациональными по x и y правыми частями на предмет однозначности подвижных особенностей изучены в [4]. Аналогичная задача для автономных систем Гамильтона с полиномиальными правыми частями решена в статьях [5, 6]. Кубическим неавтономным системам двух дифференциальных уравнений посвящена работа [7], где дан алгоритм исследования подвижных особых точек указанных систем.

В статье изучается неавтономная система Гамильтона

$$\begin{cases} x' = \gamma_0 + \gamma_1 x + 2\beta_0 y + \gamma_2 x^2 + 2\beta_1 xy + 3\alpha_3 y^2 + 2\beta_2 x^2 y + 4\alpha_4 y^3 = M \\ y' = -\delta_1 - 2\delta_2 x - \gamma_1 y - 3\delta_3 x^2 - 2\gamma_2 xy - \beta_1 y^2 - 4\delta_4 x^3 - 2\beta_2 xy^2 = N, \end{cases} \tag{1}$$

где $z \in C$, $(x, y) \in \overline{C}^2, \overline{C} = C \cup \{\infty\}$, $\gamma_0 = \gamma_0(z), \ldots,$ $\beta_2 = \beta_2(z)$ – голоморфные функции. Т.к. $M'_x + N'_y \equiv 0$, то систему (1) можно записать в каноническом виде $x' = \dfrac{\partial}{\partial y} H(z, x, y)$, $y' = -\dfrac{\partial}{\partial x} H(z, x, y)$, причем

$$H(z,x,y) = \alpha_4 y^4 + \alpha_3 y^3 + (\beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0) y^2 + (\gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0) y + \delta_4 x^4 + \delta_3 x^3 + \delta_2 x^2 + \delta_1 x$$

Будем говорить, что система (1) принадлежит классу Р, если ее решения в качестве подвижных особенностей могут иметь только полюсы [1, 2, 3]. Найдем условия того, что (1) $\in P$, и установим классы функций, через которые выражаются решения соответствующих систем с полярными подвижными особенностями. С помощью преобразования $x = X + \mu Y$, $y = Y$ (μ удовлетворяет уравнению $\alpha_4 + \beta_2\mu^2 + \delta_4\mu^4 = 0$) в системе (1) уничтожается член с Y^3 в первом уравнении. К полученной системе, сохранив старые обозначения искомых функций, применяем метод малого параметра [1, 2]. Пусть $x = \xi$, $y = \eta \backslash \lambda$, $z = z_0 + \lambda^2 t$. Требуя, чтобы система нулевого приближения $\xi^1 = a_5(z_0)\eta^2 + a_8(z_0)\xi\eta^2$, $\eta^1 = -\frac{1}{3}a_8(z_0)\eta^3$ была Р-типа, получаем утверждение.

Если исходная система $\in$ классу P, то необходимо, чтобы выполнялись условия $4\alpha_4\delta_4 - \beta_2^2 = 0$, $\delta_4 \neq 0$. Далее вводим в систему параметр λ по формулам $x = \xi/\lambda$, $y = \eta/\lambda^2$, $z = z_0 + \lambda^3 t$. Рассматривая систему нулевого приближения, получим следующий результат.

Если система (1) $\in P$, то необходимо выполнение равенства $\alpha_3 + \beta_1\mu + \gamma_2\mu^2 + \delta_3\mu^3 = 0$, причём μ удовлетворяет уравнению $\alpha_4 + \beta_2\mu^2 + \delta_4\mu^4 = 0$; $|\beta_2| + |\delta_4| \neq 0$.

Предполагая, что последние условия имеют место, (1) запишется так:

$$\begin{cases} x' = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_6x^3 + a_7x^2y & (2.1) \\ y' = b_0 + b_1x - a_1y + b_3x^2 - 2a_3xy - \frac{1}{2}a_4y^2 + b_6x^3 - 3a_6y - a_7xy^2, & (2.2) \end{cases}$$

где $a_0 = a_0(z), \ldots, \; a_7 = a_7(z)$ - голоморфные функции (они определенным образом выражаются через коэффициенты исходной системы). Из равенства (2.1) следует, что

$$y = \frac{x' - (a_0 + a_1x + a_3x^2 + a_6x^3}{a_2 + a_4x + a_7x^2}, \tag{3}$$

т.е. y есть рациональная функция x, x' с голоморфными по z коэффициентами. Это позволяет свести систему (2.1)-(2.2) к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка с рациональной по x и x' правой частью.

Дифференцируем равенство (2.1) по z. Используя (2.2) и (3), получим уравнение

$$x'' = A_0(z,x)x'^2 + A_1(z,x)x' + A_2(z,x), \tag{4}$$

причем A_0, A_1, A_2 - известные рациональные функции x с голоморфными по z коэффициентами. Например,

$$A_0 = \frac{0{,}5a_2a_4 + (a_2a_7 + 0{,}5a_4^2)x + 1{,}5a_4a_7x^2 + a_7^2x^3}{(a_2 + a_4x + a_7x^2)^2}.$$

Сравнивая дифференциальное уравнение (4) с каноническими уравнениями Пенлеве-Гамбье [1], будем иметь условия однозначности подвижных особых точек для компоненты x. Т.к. компонента $y = y(z)$ рациональным образом зависит от x и x' (это следует из формулы (3)), то эти же условия обеспечат и однозначность подвижных особенностей функции y. Аналогичным образом рассматривается система (1) и в случае, когда $\beta_2 = \delta_4 = 0$, $\alpha_4 \neq 0$. Т.о., все вышеизложенное позволяет сформулировать утверждение.

Теорема. Если исходная система (1) является системой P-типа, т.е. имеет только полярные подвижные особенности, то её решения выражаются: 1) либо через элементарные функции, 2) либо через эллиптические функции, 3) либо через функции-решения линейных уравнений, 4) либо через функции-решения первого, второго или третьего уравнений Пенлеве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Харьков: ГНТИУ, 1939.
2. Голубев В.В. Аналитическая теория дифференциальных уравнений.-М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.-М.: Мир, 1987.
4. Яблонский А.И. Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны // Диференц. уравнения, 1967. Т. 3, № 3. - С. 468-478.
5. Мататова И.В. Мероморфные решения автономных полиномиальных систем Гамильтона второго порядка // Матем.моделир. и краевые задачи: Тр. Девятой межвуз.конф. Самара, 1999. Ч. 3. - С. 86-90.

6. Мататава І.В. Мераморфныя рашэнні сістэм Гамільтона другога парадку з паліномнымі правымі часткамі // Весці БДПУ, 1999. № 4. - С. 110-114.
7. Мататов В.И., Михайловская Л.В. Неавтономные кубические системы двух дифференциальных уравнений, обладающие свойством Пенлеве // Дифференц.уравнения, 1998. Т. 34. № 2. - С. 216-221.

УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, ст. преп.

О СВОЙСТВЕ ЖЕСТКОСТИ В ЗАДАЧАХ КОШИ И ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

The influence of the stiffness condition on a solution to a typical stiff linear boundary problem with boundary layer is studied.

Большой круг задач, с которыми сталкиваются физики, инженеры и специалисты по прикладной математике, описывается математическими моделями, в основе которых лежат о.д.у. с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом в их решении пограничными слоями. Явление жесткости, как правило, присуще дифференциальным уравнениям с малым параметром при старшей производной. В вычислительной математике это свойство жесткости относится к числу наиболее сложных задач [1], представляющих собой такую математическую модель, построение и реализация для которой соответствующей дискретной модели является по-прежнему трудной и далекой от завершенности проблемой.

Роль жесткости в задачах Коши и в граничных задачах различна, кроме этого, различен и механизм проявления жесткости в этих задачах. В связи с этим представляет интерес изучение взаимодействия этих двух сторон проявления жесткости в рамках вычислительных схем методов редукции граничных задач к задачам Коши, в том числе и в вычислительных схемах метода множественной двусторонней пристрелки.

Рассмотрим граничную задачу с пограничным слоем и фиксированным малым параметром $\varepsilon>0$ при старшей производной вида

$$Ly(x)=\varepsilon\, y''(x)+a(x)\,y'(x)-b(x)\,y(x)=f(x), \quad 0<x<1; \tag{1}$$