

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интеграла Фурье. М., 1948.
5. Глезке Х.-Ю., Килбас А.А., Сайго М., Шлапаков С.А. $L_{\nu, \lambda}$ -теория интегральных преобразований с Н-функцией в ядре // ДАН Беларуси. –1997. – Т.41, 2. С. 10-15.
6. Yakubovich S.B. Index Transforms. World Scientific Publ. Company. Singapore, New Yersey, London and Hong Kong. 1996.
7. Yakubovich S.B., Saigo M., Gusarevich L.D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Rep. 25, 1995, P. 23-32.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
9. Yakubovich S.B., Gusarevich L.D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel's function // Fractional Calc. And Appl. Analysis, 1998, 1, 3, P. 297-309.

УДК 514.144 + 514.755.44

Н. П. Можей, ассистент

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

This paper is devoted to the description of all locally homogeneous submanifolds in four-dimensional affine and projective geometries whose symmetry algebras are of dimension ≥ 4 . Among these submanifolds, we distinguish those whose symmetry algebras act locally transitively on the four-dimensional affine and projective space and have a finite number of orbits. The methods used in the present paper are distinct in the sense that homogeneous submanifolds are classified here by purely algebraic means, using the algebraic analog of the moving frame method.

Введение

Работа посвящена описанию локально-однородных гиперповерхностей в четырехмерной аффинной и проективной геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность ≥ 4 . Однородные подмногообразия являются интересным и важным подклассом в классе всех подмногообразий в однородных пространствах, и задача их клас-

сификации активно обсуждалась в математической литературе начиная с конца прошлого века.

Лучше всего изучены однородные подмногообразия в аффинной и проективной геометриях размерности ≤ 3 . Так, еще Софус Ли описал однородные подмногообразия в трехмерной комплексной проективной геометрии [6]. Классификация однородных поверхностей для трехмерной унимодулярной аффинной геометрии представлена в работах [4, 8, 9]. В последние годы получено описание однородных поверхностей в трехмерной аффинной геометрии [3] (см. также [1], где классифицированы все однородные поверхности с нулевым инвариантом Пика) и в трехмерной проективной геометрии [7, 2].

Однако при переходе к четырехмерным аффинной и проективной геометриям возникает ряд трудностей, связанных с резким увеличением объема вычислений и громоздкостью конечного результата. Так, в этой работе ограничимся описанием однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность ≥ 4 , то есть наиболее симметричных поверхностей. В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. Теоремы 1 и 2 данной работы дают полный список остальных однородных поверхностей из этого класса (27 поверхностей в проективной геометрии и 33 поверхности в аффинной геометрии).

Отметим, что аналогичные классы однородных поверхностей в трехмерном случае (т.е. с алгеброй симметрий размерности ≥ 3) исчерпываются цилиндрами, квадриками и

поверхностью Кэли $z = xy + x^3/3$ в аффинной геометрии;

поверхностью Кэли и поверхностью Энриквеса $(z - xy + x^3/3)^2 = 8/9(y - x^2/2)^3$ в проективной геометрии.

Рассматриваемая в работе задача тесно связана также с описанием аффинных и проективных действий, имеющих нетривиальную открытую орбиту, и, в частности, таких действий с конечным числом орбит. Действительно, в этом случае размерность группы преобразований не менее 4, и эта группа содержится в группе симметрий одной из орбит меньшей размерности. В случае, когда одна из орбит является гиперповерхностью, она попадает в рассматриваемый в работе класс подмногообразий. Таким образом, мы попутно получаем широкий набор примеров действий с открытой орбитой и конечным числом орбит.

Особенностью методики, представленной в данной работе, является использование чисто алгебраических методов описания одно-

родных подмногообразий. Для решения проблемы используется алгебраический аналог метода Картана подвижных реперов, описанный в [3].

Методика классификации

Пусть M — однородное пространство, снабженное транзитивным действием группы Ли $\overline{G}$, и пусть L — вложенное подмногообразие в M . Будем предполагать, что действие $\overline{G}$ на M локально эффективно, и отождествлять алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\overline{G}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли векторных полей на M .

Алгеброй симметрий подмногообразия L называется подалгебра $\text{sym}(L)$ алгебры $\mathfrak{g}$, определенная следующим соотношением:

$$\text{sym}(L) = \{ X \in \mathfrak{g} \mid X_p \in T_p L \text{ для всех } p \in L \}.$$

Пусть L — замкнутое локально-однородное подмногообразие в M . Тогда группа симметрий, определенная соотношением

$$\text{Sym}(L) = \{ g \in \overline{G} \mid g.L = L \},$$

является подгруппой Ли группы $\overline{G}$ и $\text{sym}(L)$ совпадает с соответствующей подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Более того, L является однородным тогда и только тогда, когда $\text{Sym}(L)$ действует транзитивно на L . Но в общем случае это не совсем верно. Например, если $\overline{G}$ — группа всех параллельных переносов на прямой и L — открытый интервал, то $\text{sym}(L) = \mathfrak{g}$, но $\text{Sym}(L)$ тривиальна.

Пусть $\mathfrak{h}$ — произвольная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и H — соответствующая связная виртуальная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда орбиты H могут быть рассмотрены как вложенные подмногообразия в M . Говорят, что L является орбитой подалгебры $\mathfrak{h}$ через точку $p \in M$, если L — связное открытое подмногообразие (во внутренней топологии) орбиты H , примененной к точке p , и $p \in L$. Конечно, орбита $\mathfrak{h}$ через точку $p \in M$ определяется не однозначно, но любые две орбиты совпадают в некоторой окрестности точки p .

Таким образом, чтобы найти соответствующее однородное подмногообразие L , нужно найти для $\mathfrak{h}$ связную виртуальную подгруппу H группы $\overline{G}$ и ее орбиту через фиксированную точку.

Рассмотрим пример построения подмногообразия по его алгебре симметрий. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5, R)$, $M = RP^4$. Пусть, далее, $\mathfrak{h}$ имеет вид

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & z & 0 & x \\ z & t & x/2 & 0 & y \\ 0 & 0 & -t & 0 & z \\ 0 & z & y & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2t \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in R \right\},$$

и нам известно, что это алгебра симметрий некоторого подмногообразия, проходящего через точку $o \in RP^4$, записываемую в проективных координатах как $o = [0:0:0:0:1]$.

Найдем уравнение, задающее это подмногообразие. Проективное преобразование

$$(x_1:x_2:x_3:x_4:x_5) \longrightarrow (x_4:x_2:x_1:x_3:x_5)$$

приводит подалгебру к верхнетреугольному виду и оставляет на месте точку o . Виртуальная подгруппа $H \subset SL(5, R)$ порождается матрицами вида $\exp(X)$, где $X \in h$ (см. [5]). Нетрудно проверить, что в данном случае

$$H = \left\{ \exp \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2t \end{pmatrix} \exp \begin{pmatrix} 0 & z & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z & x/2 & y \\ 0 & 0 & 0 & z & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x, y, z, t \in R \right\}.$$

Тогда

$$H \cdot o = \{ [(zy + 1/4xz^2 + 1/24z^4)e^{4t} : (y + 3/4zx + 1/6z^3)e^{3t} : (x + z^2/2)e^{2t} : ze^t : 1] \}$$

Таким образом, параметрически в аффинных координатах искомая поверхность записывается в виде

$$\begin{cases} x_1 = (zy + 1/4xz^2 + 1/24z^4)e^{4t}, \\ x_2 = (y + 3/4zx + 1/6z^3)e^{3t}, \\ x_3 = (x + z^2/2)e^{2t}, \\ x_4 = ze^t. \end{cases}$$

Выражая из трех последних уравнений системы переменные x, y, z и подставляя их в первое уравнение, получаем

$$x_1 = x_2 x_4 - 1/2 x_3 x_4^2 + 1/8 x_4^4$$

$$x_4 = x_2 x_3 - 1/2 x_1 x_3^2 + 1/8 x_3^4.$$

Проективное преобразование

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (-4x_1, 8x_2, x_3, 8x_4)$$

приводит поверхность к более простому виду:

$$x_4 = x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_3^4.$$

Пусть L — орбита подалгебры h . Тогда, конечно, $h \subset \text{sym}(L)$. Легко видеть, что L локально-однородно. Но, вообще говоря, $\text{sym}(L)$ больше, чем h . В работе [3] приведен критерий того, когда $h = \text{sym}(L)$. А именно, пусть a — фиксированная точка на M и L — орбита h через точку a . Определим подалгебру $g_0 \subset g$ и построим цепочку подалгебр $g_0 \supset g_1 \supset \dots$ следующим образом: $g_0 = \{X \in g | X_a = 0\}$, $g_{n+1} = \{x \in g_n | [x, h] \subset g_n + h\}$. Тогда $\text{sym}(L) = g_\infty + h$ и подалгебра $\text{sym}(L)$ является наибольшей из подалгебр a таких, что $h \subset a \subset g + h$. Отсюда следует, что подалгебра $h \subset g$ является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия L , содержащего a , тогда и только тогда, когда либо $g_\infty \subset h$, либо каждая подалгебра в g , содержащая h и содержащаяся в $g + h$, совпадает с h (эти условия эквивалентны).

Будем полагать, что две подалгебры алгебры g эквивалентны, если они могут быть преобразованы друг в друга с помощью элементов группы $\text{Aut}(g, g_0)$.

Пусть $V_n = (h + g_n)/g_n \subset g/g_n$ для всех n , а $p_n: g \rightarrow g/g_n$ и $t_n: g/g_{n+1} \rightarrow g/g_n$ — естественные проекции при всех n . Для данного подпространства V_n обозначим через G_{n+1} подгруппу $g + h$ в $\text{Aut}(g, g_0)$, состоящую из всех автоморфизмов, которые сохраняют подалгебру g_n и при индуцировании на g/g_n сохраняют подпространство V_n .

Алгоритм описания всех алгебр симметрий однородных подмногообразий в M (см. [3]):

1. Опишем все подпространства V_0 в g/g_0 (с точностью до преобразований, индуцированных элементами группы $\text{Aut}(g, g_0)$).

2. Для каждого подпространства V_n , найденного на предыдущем шаге, найдем подалгебру g_{n+1} , подгруппу G_{n+1} и подпространство $W = t_n^{-1}(V_n)$ в g/g_{n+1} . Если $g_{n+1} \neq g_n$, опишем все подпространства V_{n+1} в W , для которых выполнены условия:

[-] V_{n+1} является дополнительным к $\ker t_n = g_n/g_{n+1}$;

[-] V_{n+1} удовлетворяет условию: для любых двух элементов $x + g_n, y + g_n \in V_n$ элемент $[x, y] + g_{n+1}$ принадлежит подпространству V_{n+1} .

Затем повторяем этот шаг снова.

3. Если $g_n = g_{n+1}$, найдем $h = p_n^{-1}(V_n)$ в g . Если h является подалгеброй, то h является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия. Более того, таким образом могут быть получены все алгебры симметрий.

Поверхности в проективной геометрии

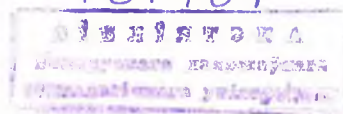
Применяя алгоритм к случаю $g = \text{sl}(5, R)$, $M = RP^4$, получим классификацию:

Теорема 1

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в RP^4 , алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4 , либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

- (1) $x_4 = x_1 x_3^2 + x_2 x_3$;
- (2) $x_4 = x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + x_3^4$;
- (3) $x_4 = x_1^2 x_3 + x_2 x_3$;
- (4) $x_4 = x_1^2 + x_2 x_3 + x_3^3$;
- (5) $x_4 = x_1^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + a x_3^4$;
- (6) $x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_4 = 0$, $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
- (7) $x_4(1 + x_1^2) = x_1(x_2^2 - x_3^2) + 2x_2 x_3$;
- (8) $x_1 + x_3 x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0$, $a \sim 2-a$, $a \neq -1, 0, 1, 2, 3$;
- (9) $x_1 + x_3 x_4 \pm x_2^2 + (1 + x_4^2)e^{a \arctg x_4} = 0$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
- (10) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 + x_4 \ln x_4 = 0$;
- (11) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 + (1 + x_4^2) \arctg x_4 = 0$;
- (12) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
- (13) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;
- (14) $x_2^2 + x_1 x_3 = x_4^a$, $a \sim 2-a$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (15) $x_2^2 + x_1 x_3 = (1 + x_4^2)e^{a \arctg x_4}$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
- (16) $x_2^2 + x_1 x_3 = e^{x_4}$;
- (17) $x_2 + x_1 x_3 + \ln x_4 = 0$;
- (18) $x_2 + x_1 x_3 + e^{x_4} = 0$;
- (19) $x_2 + x_1 x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
- (20) $x_2 + x_1 x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (21) $\pm (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a$, $a \sim 2-a$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (22) $\pm (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = (1 + x_4^2)e^{a \arctg x_4}$, $a \sim -a$, $a \neq 0$;
- (23) $\pm (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4}$;
- (24) $x_3 x_4 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (25) $x_3 x_4 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4$;
- (26) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4}$;
- (27) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4$.

781434



Замечание. В случае (6) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые, как следует из доказательства, не являются проективно-эквивалентными. В дальнейшем мы будем обозначать эти связные компоненты через (6,+) и (6,-) соответственно.

Поверхности в аффинной геометрии

Классифицируем теперь трехмерные однородные подмногообразия в четырехмерном аффинном пространстве, применяя классификационный алгоритм к случаю $g = \text{aff}(4, R)$, $g_0 = \text{gl}(4)$, $M = R^4$. Классификация проводится аналогично классификации подмногообразий в проективной геометрии. Проводя классификацию по алгоритму, получаем следующий результат:

Теорема 2

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в R^4 , алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4 , либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

- (1) $x_2^2 + x_1 x_2 x_3 + x_4 x_1^2 = 0$;
- (2) $x_4 = x_1 x_3^2 + x_2 x_3$;
- (3) $x_4 = x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + x_3^4$;
- (4) $x_4 = x_1^2 x_3 + x_2 x_3$;
- (5) $x_4 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 = 0$;
- (6) $x_4 = x_1^2 + x_2 x_3 + x_3^3$;
- (7) $x_4 = x_1^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 + a x_3^4$;
- (8) $x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_4 = 0$, $x_1 > 0 \vee x_1 < 0$;
- (9) $x_1 + x_3 x_4 \pm x_2^2 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2, 3$;
- (10) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm x_4 \ln x_4 = 0$;
- (11) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm \ln x_4 = 0$;
- (12) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm x_4^2 \ln x_4 = 0$;
- (13) $x_1 + x_3 x_4 + x_2^2 \pm e^{x_4} = 0$;
- (14) $x_2^2 + x_1 x_3 = x_4^a$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (15) $x_2^2 + x_1 x_3 = e^{x_4}$;
- (16) $x_2 x_4 + x_1 x_3 + x_4^2 \ln x_4 = 0$;
- (17) $x_2 + x_1 x_3 + \ln x_4 = 0$;
- (18) $x_2 + x_1 x_3 + e^{x_4} = 0$;
- (19) $x_2 x_4 + x_1 x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
- (20) $x_2 + x_1 x_3 + x_4 \ln x_4 = 0$;
- (21) $x_2 + x_1 x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;
- (22) $x_2 x_4 + x_1 x_3 + x_4^a = 0$, $a \neq 0, 1, 2$;

- (23) $\pm (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = x_4^a, a \neq 0, 1, 2;$
 (24) $\pm (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = e^{x_4};$
 (25) $x_3 x_4 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4^a, a \neq 0, 1, 2;$
 (26) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4^a, a \neq 0, 1, 2;$
 (27) $x_3 x_4 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4^2 \ln x_4;$
 (28) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) - \ln x_4;$
 (29) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + e^{x_4};$
 (30) $x_3 x_4 = \pm (x_1^2 + x_2^2) - x_4 \ln x_4;$
 (31) $x_3 = \pm (x_1^2 + x_2^2) + x_4 \ln x_4;$
 (32) $(x_1 x_3^2 - x_4 x_2 x_3 + x_4^3/3)^2 = -8/9 (x_3 x_2 - x_4^2/2)^3;$
 (33) $x_1 x_2 x_3 + x_1^2 x_4 + x_2^3 = 0.$

Замечание. В случае (8) поверхность имеет две связанные компоненты, определяемые условиями $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, которые не являются проективно-эквивалентными.

Анализ результатов

Сопоставление результатов классификаций

Сравним полученные классификации для аффинной и проективной геометрий. Группа аффинных преобразований конечномерного пространства естественным образом вкладывается в группу преобразований проективизации данного пространства. Следовательно, всякое аффинно-однородное подмногообразие является проективно-однородным, но некоторые аффинно-неэквивалентные подмногообразия являются проективно-эквивалентными. В теореме 2 проективно-эквивалентными являются следующие пары подмногообразий: (1) и (2), (4) и (5), (6) и (9, $a = -1$), (9, a) и (9, $2-a$), (10, $+$) и (10, $-$), (11) и (12), (14, a) и (14, $2-a$), (16) и (17), (19) и (20), (21) и (22), (23, a) и (23, $2-a$), (25) и (26), (27) и (28), (30) и (31). Подмногообразиям (32) и (33) соответствуют проективные цилиндры. С другой стороны, поверхности (7), (9), (11), (15) и (22) из теоремы 1, которые отсутствуют в теореме 2, не являются аффинно-однородными.

Действия с открытой орбитой

Выделим из найденных аффинных и проективных действий те, которые имеют открытую орбиту и, в частности, имеют конечное число орбит. У приведенных выше подмногообразий в случаях (1)-(7) теоремы 1 и случаях (1)-(8) теоремы 2 алгебры симметрий действуют с конечным числом орбит. Кроме этого, алгебры симметрий квадрик имеют конечное число орбит. Далее, алгебра симметрий цилиндра имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда алгебра симметрий основания этого цилиндра имеет конечное число орбит. Заме-

тим, что основание является поверхностью в пространстве меньшей размерности, а все такие подмногообразия классифицированы в работах [3, 2]. Итак, классифицированы все локально-однородные гиперповерхности в четырехмерной аффинной и проективной геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность не менее 4 (с точностью до аффинной и проективной эквивалентности соответственно). Отдельно выделены подмногообразия, алгебры симметрий которых имеют открытую орбиту и, в частности, конечное число орбит. При классификации для каждой поверхности найдена ее алгебра симметрий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdalla B., Dillen F., Vranken L. Affine homogeneous surfaces in R with vanishing Pick invariant // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1997, Vol. 67. - P.105-115.
2. Dillen F., Sasaki T., Vranken L. The classification of projectively homogeneous surfaces II // Osaka J. Math., 1998, Vol. 35. - P.117-146.
3. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry // Geometry of submanifolds, 1996, Vol. 8. - P. 168-178.
4. Favard J. Cours de geometrie differentielle locale.-Paris: Gauthier-Villars, 1957.
5. Goto M., Grosshans F. Semisimple Lie algebras. - New York: Marcel Decker, 1978.
6. Lie S. Bestimmung aller Flachen, die eine kontinuierlich Schar von projectiven Transformationen gestatten // Gesammelte Abhandlungen, Leipzig, 1926, Vol. 6. - P. 494-538.
7. Nomizu K., Sasaki T. On the classification of projectively homogeneous surfaces // Results Math., 1991, Vol. 20. - P. 698-724.
8. Nomizu K., Sasaki T. A new model of unimodular-affinely homogeneous surfaces // Manuscripta Math., 1991, Vol. 73. - P. 39-44.
9. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry.- Cambridge Univ. Press, 1994.