

венного технологического университета.- Выпуск VI. Физико-математические науки и информатика, 1998.- С.3-17.

3. Труды Белорусского государственного технологического университета // Физико-математические науки и информатика.- Выпуск IV, 1996.-С.3-16, 40-46; выпуск VII, 1999.- С.13-29; выпуск VIII, 2000.

УДК 517.444

Л. Д. Яроцкая, ассистент

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПО ИНДЕКСУ С G-ФУНКЦИЕЙ МЕЙЕРА В ЯДРЕ

This paper deals with an integral transform of non-convolution type with Meijer's G-function in the spaces L_2 . An inversion formula and relation with the Kontorovich-Lebedev transform are given.

В настоящей работе изучаются вопросы действия и обращения W-преобразования по индексу ядра — G-функции Мейера. Класс таких преобразований введен и рассмотрен в [1, 2] в некотором пространстве функций. Известно, что W-преобразование обобщает многие интегральные преобразования по индексу со специальными функциями гипергеометрического типа в ядре.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$(Gf)(x) = 2 \int_0^{\infty} \tau G_{2n, 2m+2}^{m+2, n} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1/2 + (\alpha_n)_n - (\alpha_n)_n \\ i\tau, -i\tau, (\beta_m)_m, 1/2 - (\beta_m)_m \end{matrix} \right. \right) f(\tau) d\tau, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $G_{2n, 2m+2}^{m+2, n}(x^2)$ — G-функция Мейера, векторы $(\alpha_n)_n, (\beta_m)_m$ определены формулами

$$(\alpha_n)_n = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, (\beta_m)_m = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m.$$

Функция f принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R}_+)$. Кроме того, предполагается, что

$$m \geq n, \alpha_i \in \mathbf{R}, \alpha_i < 0, 1 \leq i \leq n, \beta_j \in \mathbf{R}, \beta_j > 0, 1 \leq j \leq m \quad (2)$$

и никакие из параметров $\beta_1, \dots, \beta_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

В случае $m = n = 0$ интеграл (1) обобщает преобразование Конторовича-Лебедева с функцией Макдональда в ядре [3]

$$[KLf](x) = 4 \int_0^{\infty} \tau K_{2i\tau}(2x) f(\tau) d\tau, x > 0. \quad (3)$$

Исследуем композиционную структуру преобразования (1) с помощью преобразования Меллина

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx, s \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Известно [4], что если $x^\gamma f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+, x^{-1})$, то $f^*(s) \in L_2(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, и наоборот. Более того, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 x^{2\gamma-1} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f^*(\gamma + it)|^2 dt. \quad (5)$$

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда преобразования (1), (3) существуют и справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |[KLf](x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |(Gf)(x)|^2 dx. \quad (6)$$

Кроме того, если $h > 0$, $\operatorname{Re} \lambda > h/2 - 1$, тогда

$$(Gf)(x) = hx^{1-(\lambda+1)/h} \frac{d}{dx} x^{(\lambda+1)/h} \times \\ \times \int_0^{\infty} H_{2n+1, 2m+1}^{m+1, n} \left(xt \left| \begin{matrix} (-\lambda, h), (1/2 + \alpha_j, 1/2)_n, (-\alpha_j, 1/2)_n \\ (\beta_j, 1/2)_m, (1/2 - \beta_j, 1/2)_m, (-\lambda - 1, h) \end{matrix} \right. \right) t^{-1} [KLf](t^{-1}) dt, \quad (7)$$

где $H_{2n+1, 2m+1}^{m+1, n}(xt)$ — H-функция Фокса [5].

Доказательство. Неравенство $|K_{i\tau}(x)| \leq e^{-\delta\tau} K_0(x \cos \delta)$, $\delta \in (0, \pi/2)$ [6] и неравенство Гельдера дают оценку преобразования (3)

$$|[KLf](x)| \leq 4K_0(x \cos \delta) \|f\|_2 \left(\int_0^{\infty} \tau^2 e^{-4\delta\tau} d\tau \right)^{1/2} = \frac{\delta^{-3/2}}{\sqrt{2}} K_0(x \cos \delta) \|f\|_2, x > 0. \quad (8)$$

Далее, используя асимптотические свойства функции Макдональда [3]

$$K_{i\tau}(x) = O\left(\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\right), x \rightarrow +\infty, K_0(x) = O(\ln x), x \rightarrow +0,$$

для любой $f(x) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$\int_0^{\infty} \|KLf\|_x^2 dx \leq \frac{1}{2\delta^3} \|f\|_2^2 \int_0^{\infty} K_0^2(x \cos \delta) dx < \infty, \quad \delta \in (0, \pi/2). \quad (9)$$

Сходимость интеграла (1), если $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$, следует из асимптотических свойств ядра для достаточно больших положительных τ , которые можно получить аналогично тому, как это сделано в [6, 7]. Тогда на основании [8, (8.4.23.1), (8.4.51.9)] преобразования Меллина (4) операторов (3) и (1) связаны формулой

$$(Gf)^*(s) = K^*(s) [KLf]^*(s), \quad (10)$$

где

$$[KLf]^*(s) = \int_0^{\infty} \tau \Gamma(s/2 + i\tau) \Gamma(s/2 - i\tau) f(\tau) d\tau, \quad (11)$$

$$K^*(s) = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(s/2 + \beta_j) \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{1}{2} - \alpha_j - s/2\right)}{\prod_{j=1}^n \Gamma(s/2 - \alpha_j) \prod_{j=1}^m \Gamma\left(\frac{1}{2} + \beta_j - s/2\right)} \quad (12)$$

и $\Gamma(\cdot)$ — Γ -функция Эйлера. Легко проверить, что

$$K^*(s)K^*(1-s) = 1 \text{ и } |K^*(1/2 + it)|^2 = 1. \quad (13)$$

Если $f(x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$, тогда, в силу (9), $[KLf](x) \in L_2(\mathbf{R}_+)$ и из [5, теорема 1] следует формула (7). Тогда на основании (5), (10), (13) и L_2 -теории обобщенных преобразований [4] можно получить (6). Теорема доказана.

Формулу обращения преобразования (1) получим на основании теоремы типа Планшереля для преобразования Контровича-Лебедева (3).

Теорема 2 [6]. Пусть $f \in L_2(\mathbf{R}_+; \tau \operatorname{sh}^{-1} 2\pi\tau)$. Тогда $[KLf](x) \in L_2(\mathbf{R}_+; x^{-1})$. Кроме того, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} \|KLf\|_x^2 \frac{dx}{x} = 2\pi^2 \int_0^{\infty} \frac{\tau}{\operatorname{sh} 2\pi\tau} |f(\tau)|^2 d\tau. \quad (14)$$

Почти для всех $\tau \in \mathbf{R}_+$ обратный оператор имеет вид

$$f(\tau) = \frac{4 \operatorname{ch} \pi\tau}{\sqrt{\tau} \pi^2} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y K_{2iy}(2x) [KLf](x) \frac{dx dy}{x}. \quad (15)$$

Если $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$, тогда из (14) следует, что $[KLf](x) \in L_2(\mathbf{R}_+; x^{-1})$. Аналогично тому, как это сделано в [9], можно показать, что для каждого $\tau \in \mathbf{R}_+$ функция $h(x, \tau) = \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y K_{2iy}(2x) dy$ принадлежит $L_2(\mathbf{R}_+; x^{-1})$. Тогда, применяя [4, теорему 72], запишем правую часть (15) через преобразование Меллина

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y K_{2iy}(2x) [KLf](x) \frac{dy dx}{x} = \\ & = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y [KLf]^*(-it) \Gamma(it/2 + iy) \Gamma(it/2 - iy) dt dy, \end{aligned} \quad (16)$$

где $[KLf]^*(-it) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N [KLf](x) x^{-1-it} dx,$

$$\frac{1}{4} \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y \Gamma\left(\frac{it}{2} + iy\right) \Gamma\left(\frac{it}{2} - iy\right) dy = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N x^{-1-it} dx \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y K_{2iy}(2x) dy$$

со сходимостью в среднем квадратичном. Подставляя значение $[KLf]^*(-it)$ из (10) в правую часть (16), можем записать

$$I(\tau) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^\infty (Gf)^*(-it) K^*(1+it) \int_0^\tau \sqrt{y} \operatorname{sh} \pi y \Gamma(it/2 + iy) \Gamma(it/2 - iy) dy dt. \quad (17)$$

Далее, при условиях (2) из [4, теорема 71] и интегрального представления [8, (8.4.51.9)] следует соотношение со сходимостью в среднем квадратичном

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} K^*(1+it) \int_0^\tau y^{1/2} \operatorname{sh} \pi y \Gamma(it/2 + iy) \Gamma(it/2 - iy) dy = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{1/N}^N x^{it-1} \int_0^\tau y G_{2n, 2m+2}^{m+2, n} \left(x^2 \middle| \begin{matrix} 1 + (\alpha_n)_{\frac{1}{2}} - (\alpha_n) \\ iy, -iy, 1/2 + (\beta_m), 1 - (\beta_m) \end{matrix} \right) dy, \end{aligned} \quad (18)$$

где $K^*(1+it)$ задано формулой (12). Используя теорему 1 и асимптотические свойства ядра преобразования (1) по τ [6], можно показать, что если $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$, то $[Gf](x) \in L_2(\mathbf{R}_+; x^{-1})$. Тогда, в силу (5),

$(Gf)^*(-it) \in L_2(\mathbf{R})$ и можем получить аналог левой части (15) через оператор (1). Действительно, на основании формул (5), (18), (15) для $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$ из (6) следует

$$f(\tau) = \frac{2ch\pi\tau}{\pi^2} \frac{d}{d\nu} \int_0^\infty \int_0^\tau y G_{2n,2m+2}^{m+2,n} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1 + (\alpha_n), 1/2 - (\alpha_n) \\ iy, -iy, 1/2 + (\beta_m), 1 - (\beta_m) \end{matrix} \right. \right) (Gf)(x) \frac{dydx}{x}. \quad (19)$$

Теорема 3. Если $f \in L_2(\mathbf{R}_+)$, тогда почти для всех $\tau > 0$ формула обращения преобразования (1) может быть получена при помощи интеграла (19).

Замечание. Если можно произвести дифференцирование по τ в интеграле (19), тогда формулу (19) можно записать в виде

$$f(\tau) = \frac{2}{\pi^2} ch \pi \tau \int_0^\infty G_{2n,2m+2}^{m+2,n} \left(x^2 \left| \begin{matrix} 1 + (\alpha_n), 1/2 - (\alpha_n) \\ i\tau, -i\tau, 1/2 + (\beta_m), 1 - (\beta_m) \end{matrix} \right. \right) (Gf)(x) \frac{dx}{x}.$$

Если $m = n = 1$, $\alpha = -1/2$, $\beta = 0$, то получим следующую пару интегральных преобразований:

$$(C_s f)(x) = 4 \int_0^\infty \tau C_s(2x, 2\tau) f(\tau) d\tau, \quad x > 0,$$

$$f(\tau) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty S_c(2x, 2\tau) (C_s f)(x) \frac{dx}{x},$$

где $C_s(x, \tau) = \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} u) \sin \tau u du,$

$$S_c(x, \tau) = \int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} u) \cos \tau u du.$$

Заметим, что похожие проблемы рассмотрены в [9] в связи с не-сверточным преобразованием с ядром, заданным синус-преобразованием Фурье по u функции $\exp(-x \operatorname{ch} u)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Мн.: Наука и техника, 1987.
2. Yakubovich S.B., Luchko Yu.F. The Hypergeometric approach to integral transforms and convolutions. — Kluwer Acad. Publ. Ser. Math. and Appl. 287. Dordrecht, Boston and London, 1994.

3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., 1974.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интеграла Фурье. М., 1948.
5. Глезке Х.-Ю., Килбас А.А., Сайго М., Шлапаков С.А. $L_{\nu, \mu}$ - теория интегральных преобразований с Н-функцией в ядре // ДАН Беларуси. –1997. – Т.41, 2. С. 10-15.
6. Yakubovich S.B. Index Transforms. World Scientific Publ. Company. Singapore, New Yersey, London and Hong Kong. 1996.
7. Yakubovich S.B., Saigo M., Gusarevich L.D. Some asymptotic expansions of special functions by their indices // Fukuoka Univ. Sci. Rep. 25, 1995, P. 23-32.
8. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М., 1986.
9. Yakubovich S.B., Gusarevich L.D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel's function // Fractional Calc. And Appl. Analysis, 1998, 1, 3, P. 297-309.

УДК 514.144 + 514.755.44

Н. П. Можей, ассистент

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

This paper is devoted to the description of all locally homogeneous submanifolds in four-dimensional affine and projective geometries whose symmetry algebras are of dimension ≥ 4 . Among these submanifolds, we distinguish those whose symmetry algebras act locally transitively on the four-dimensional affine and projective space and have a finite number of orbits. The methods used in the present paper are distinct in the sense that homogeneous submanifolds are classified here by purely algebraic means, using the algebraic analog of the moving frame method.

Введение

Работа посвящена описанию локально-однородных гиперповерхностей в четырехмерной аффинной и проективной геометрии, алгебры симметрий которых имеют размерность ≥ 4 . Однородные подмногообразия являются интересным и важным подклассом в классе всех подмногообразий в однородных пространствах, и задача их клас-