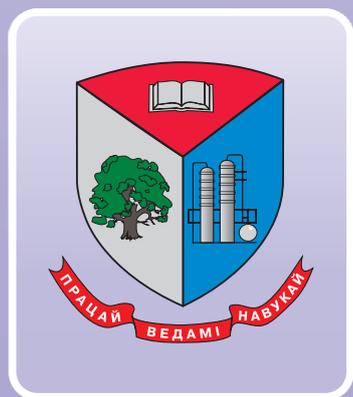


ISSN 2520-6141



ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

№ 2 (284) 2024 год

Рубрики номера:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Механика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Алгоритмизация и программирование



Минск 2024

Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

Издается с июля 1993 года

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (284) 2024 год

Выходит два раза в год

Минск 2024

Учредитель – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Главный редактор журнала – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

Редакционная коллегия журнала:

Флейшер В. Л. кандидат технических наук, доцент (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Флюрик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь;
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;
Черная Н. В., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Куликович В. И., кандидат филологических наук, доцент, Республика Беларусь;
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Башкиров В. Н., доктор технических наук, профессор, Российская Федерация;
Каухова И. Е., доктор фармацевтических наук, профессор, Российская Федерация;
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;
Эркаев А. У., доктор технических наук, профессор, Республика Узбекистан;
Горинштейн Ш., доктор наук, профессор, Государство Израиль;
Маес Воутер, доктор наук, профессор, Королевство Бельгия.

Редакционная коллегия серии:

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь;
Крук Н. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Асмыкович И. К., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Карпович Д. С., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Романенко Д. М., кандидат технических наук, доцент, Республика Беларусь;
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Листопад Н. И., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прихожий А. А., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Фурс А. Н. доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Жумаев Одил, доктор технических наук, Республика Узбекистан;
Маес Воутер, доктор наук, профессор, Королевство Бельгия.

Адрес редакции: ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 343-94-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution
“Belarusian State Technological University”

PROCEEDINGS OF BSTU

Scientific Journal

Published monthly since July 1993

Issue 3

**PHYSICS AND MATHEMATICS.
INFORMATICS**

No. 2 (284) 2024

Published biannually

Minsk 2024

Publisher – educational institution “Belarusian State Technological University”

Editor-in-chief – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

Editorial (Journal):

Fleisher V. L., PhD (Engineering), Associate Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;

Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;

Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus;

Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;

Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;

Chernaya N. V., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;

Kulikovich V. I., PhD (Philology), Associate Professor, Republic of Belarus;

Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;

Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;

Bashkirov V. N., DSc (Engineering), Professor, Russian Federation;

Kaukhova I. E., DSc (Pharmaceutics), Professor, Russian Federation;

Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;

Erkayev A. U., DSc (Engineering), Professor, Republic of Uzbekistan;

Gorinshteyn Sh., DSc, Professor, State of Israel;

Maes Wouter, DSc, Professor, Kingdom of Belgium.

Editorial (Issue):

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;

Urbanovich P.P., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief of the series), Republic of Belarus;

Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor (executive editor), Republic of Belarus.

Kruk N. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Asmykovich I. K., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic Belarus;

Karpovich D. S., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;

Romanenko D. M., PhD (Engineering), Associate Professor, Republic of Belarus;

Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Listopad N. I., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus.

Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Prihozhiiy A. A., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;

Saiko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;

Furs A. N., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;

Shchekin A. K., Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;

Jumaev Odil, DSc (Engineering), Republic of Uzbekistan;

Maes Wouter, DSc, Professor, Kingdom of Belgium.

Contact: 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.

Telephones: editor-in-chief (+375 17) 343-94-32;

editor-in-chief of the series (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВЮЩЕГО ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В публикации рассмотрено решение задачи модальной управляемости для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Дано определение задачи модального управления для исследуемой системы. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно.

В статье получено решение поставленной задачи при определенных значениях параметров исследуемой системы с запаздыванием. Также получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления для рассматриваемой системы. Эти регуляторы найдены в частотной области как элементарные функции коэффициентов системы. Далее приведены правила, согласно которым полученные регуляторы переходят из частотной области в регуляторы по типу обратной связи для исследуемой системы. Приведен иллюстративный пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы.

Дан список литературы, в которой задача модального управления решается для других запаздывающих систем и систем нейтрального типа.

Ключевые слова: запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

Для цитирования: Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в специальном случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 5–9.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL DELAYED SYSTEM IN A SPECIAL CASE

The publication considers the solution of the modal controllability problem for a two-dimensional stationary dynamic system with a retarded argument with one input and two commensurate delays in one special case. The definition of the modal control problem for the system under study is given. The modal control problem is one of the main problems of control theory. Such a problem has been well studied for systems without delay. For systems with a retarded argument and neutral type systems, the solution of the modal control problem is much more complicated. This is due to the fact that the state space of such systems is usually infinite-dimensional.

The article obtains a solution to the problem for certain values of the parameters of the system with delay under study. Feedback-type controllers are also obtained that solve the modal control problem for the system under study. These controllers are found in the frequency domain as elementary functions of the system coefficients. Below are the rules according to which the obtained controllers pass from the frequency domain to feedback-type controllers for the system under study. An illustrative example of solving the modal control problem for the system under study is given.

A list of literature is given in which the modal control problem is solved for other delayed systems and neutral type systems.

Keywords: retarded systems, modal control, regulators, feedback control, delay.

For citation: Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in a special case. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 5–9 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–7] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления. Приведен пример решения такой задачи.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + A_2x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где A_j , $j = 0, 1, 2$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$

(штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det[\lambda I_2 - A_0 - A_1e^{-\lambda h} - A_2e^{-2\lambda h}] \equiv \lambda^2 + (\alpha_{10} + \alpha_{11}e^{-\lambda h} + \alpha_{12}e^{-2\lambda h})\lambda + \alpha_{00} + \alpha_{01}e^{-\lambda h} + \alpha_{02}e^{-2\lambda h} + \alpha_{03}e^{-3\lambda h} + \alpha_{04}e^{-4\lambda h} = 0, \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h}x(t) \equiv x(t - jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^M q'_j x(t - jh) + \int_{-lh}^0 g'(s)x(t+s)ds, \quad (3)$$

где $l, M \in \mathbb{N}$, q_j , $j = 0, 1, \dots, M$ – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^M q'_j e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 2, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с формулой (2)):

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1e^{-\lambda h} - A_2e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11}e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12}e^{-2\lambda h})\lambda + \tilde{\alpha}_{00} + \\ &+ \tilde{\alpha}_{01}e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02}e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03}e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04}e^{-4\lambda h} = 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11}m + \tilde{\alpha}_{12}m^2; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01}m + \tilde{\alpha}_{02}m^2 + \tilde{\alpha}_{03}m^3 + \tilde{\alpha}_{04}m^4, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t) = x(t - h)$), $A(m) = A_0 + A_1m + A_2m^2$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1m & b_0 + b_1m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2. \end{aligned} \quad (8)$$

В работах [6], [7] требовалось выполнение условия $a_1 \neq 0$. В данной работе рассмотрим случай

$$a_1 = 0. \quad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$\begin{aligned} U(\lambda, m) &= [u_1(\lambda, m) \quad u_2(\lambda, m)] = \\ &= [\eta_{11}(m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно m .

Компоненту $\eta_2(\lambda, m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \quad (11)$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно m ; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

где $k = e^{-a_0h}$; c_1, c_2 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 + b_1m + m^2 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (-a_0 - \eta_{21})\lambda - b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \\ &- \eta_{11}m^2 + \eta_{21}a_0 - \eta_{11}b_0 + c_1k - c_1m = 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве η_{21} следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где μ_1 определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda - b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \eta_{11}m^2 - a_0^2 -$$

$$- \mu_1a_0 - b_0\eta_{11} + c_1k - c_1m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение равенства

$$\begin{aligned} -b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \eta_{11}m^2 - a_0^2 - \\ - \mu_1a_0 - b_0\eta_{11} + c_1k - c_1m = \mu_2. \end{aligned}$$

Выразив отсюда η_{11} , получим

$$\eta_{11} = \frac{-\mu_2 + c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1a_0 + c_1k - c_1m}{b_0 + b_1m + m^2}. \quad (12)$$

Последняя дробь, в общем случае, не является полиномом относительно m . Подберем c_1 и c_2 так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в (12).

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= -c_2 + \\ &+ \frac{b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2}{b_0 + b_1m + m^2}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем

$$\begin{aligned} b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2 \equiv \\ \equiv (b_1c_2 + c_2k - c_1)m - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + \\ + c_1k - \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в качестве c_1 можно взять

$$c_1 = b_1c_2 + c_2k. \quad (13)$$

Тогда с учетом соотношения (13)

$$\begin{aligned} b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2 \equiv \\ \equiv (b_0 + b_1k + k^2)c_2 - a_0^2 - a_0\mu_1 - \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + k^2}. \quad (14)$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы c_2 из формулы (14) было полиномом относительно m , необходимо и достаточно выполнения условия

$$b_0 + b_1k + k^2 \neq 0. \quad (15)$$

С учетом того, что

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

и приняв во внимание (13), (14), после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{(a_0^2 + \mu_1a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + k^2} - a_{21}(m); \quad (16)$$

$$u_2(\lambda, m) = -a_0 - \mu_1 - a_{22}(m) + \frac{(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0} \quad (17)$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (15).

Отсюда видна справедливость следующей теоремы

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), выполнение условия (15) необходимо и достаточно. При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (16), (17).

При переходе от регуляторов в частотной области к регуляторам вида (3) нужно следовать следующим правилам.

1. Слагаемым вида $m^i x_j$ соответствует

$$x_j(t - ih).$$

2. Слагаемым вида $\mu_1 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{10} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{11} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{12} x_j(t - 2h).$$

3. Слагаемым вида $\mu_2 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{00} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{01} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{02} x_j(t - 2h) + \tilde{\alpha}_{03} x_j(t - 3h) + \tilde{\alpha}_{04} x_j(t - 4h).$$

4. Слагаемым вида $\frac{m - k}{\lambda - \xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-h}^0 H(t + s) H(h + s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t + s) ds,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

5. Слагаемым вида $m \cdot \frac{m - k}{\lambda - \xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-2h}^{-h} H(t + s) H(2h + s) e^{-(2h+s)\xi} x_j(t + s) ds.$$

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ a_{210} & a_{220} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ a_{211} & a_{221} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{212} & a_{222} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} -3 & 2 + 5m + m^2 \\ a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2 & a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $k = e^{-a_0 h} = e^{3h} \in \mathbb{R}$. Проверим выполнение условия (15):

$$b_0 + b_1 k + k^2 = 2 + 5e^{3h} + e^{6h} > 0.$$

Условие (15) выполнено. Тогда регуляторы (16), (17) примут следующий вид:

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{9 - \mu_1 + \mu_2}{2 + 5k + k^2} - a_{210} - a_{211}m - a_{212}m^2,$$

$$u_2(\lambda, m) = 3 - \mu_1 - a_{220} - a_{221}m - a_{222}m^2 + \frac{(9 - 3\mu_1 + \mu_2)(m + 5 + k)}{2 + 5k + k^2} \frac{m - k}{\lambda + 3}.$$

Нетрудно проверить, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0,$$

где μ_1, μ_2 определены в формулах (5), (6).

Заключение. В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с двумя соизмеримыми запаздываниями и одним входом в случае (9). Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов. Также рассмотрен иллюстративный пример.

Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
3. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
4. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 25–27.
5. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

6. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.

7. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в случае кратных корней // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

3. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

4. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 25–27 (In Russian).

5. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 5–8 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 2 (272), pp. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 17.04.2024

УДК 514.76

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

**ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ,
НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ ЭКВИАФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ
НУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ**

Во введении указан объект исследования – аффинные связности на однородных пространствах. В каком случае однородное пространство допускает инвариантную связность? Если существует хотя бы одна инвариантная аффинная связность, то пространство является изотропно-точным. В статье изучены трехмерные изотропно-точные однородные пространства, на которых действует разрешимая группа преобразований, допускающие инвариантные связности только нулевой кривизны. Цель работы – определить, при каких условиях указанные пространства не допускают эквиваффинных связностей. Охарактеризованы основные понятия: изотропно-точная пара, аффинная связность, тензор кручения, тензор кривизны, тензор Риччи, эквиваффинная связность. В основной части работы найдено и приведено в явном виде полное описание трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиваффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложение в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: эквиваффинная связность, группа преобразований, однородное пространство, тензор кривизны, тензор кручения.

Для цитирования: Можей Н. П. Однородные пространства разрешимых групп Ли, не допускающие эквиваффинных связностей нулевой кривизны // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 10–18.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-2.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

**EQUIAFFINE CONNECTIONS OF ZERO CURVATURE ON HOMOGENEOUS
SPACES OF SOLUBLE GROUPS OF TRANSFORMATIONS**

In the introduction, the object of research is indicated – affine connections on homogeneous spaces. When a homogeneous space admits an invariant connection? If there exists at least one invariant affine connection, then the space is isotropically-faithful. In this article we study three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces on which a solvable Lie group of transformations operates, allowing invariant connections of zero curvature only. The purpose of the work is to determine under what conditions these spaces do not admit equiaffine connections. The basic notions, such as isotropically-faithful pair, affine connection, curvature and torsion tensors, Ricci tensor, equiaffine connection are defined. In the main part of the paper, a complete description of three-dimensional homogeneous spaces with a solvable group of transformations, allowing invariant affine connections of zero curvature only, but not allowing equiaffine connections, is found and given explicitly. The features of the methods presented in the work is the application of a purely algebraic approach to the description of manifolds and structures on them. The results obtained can be used in the study of manifolds, as well as have applications in various fields of mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are connected with the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Keywords: equiaffine connection, transformation group, homogeneous space, curvature tensor, torsion tensor.

For citation: Mozhey N. P. Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces of soluble groups of transformations. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 10–18 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-2.

Введение. Важнейшими структурами в дифференциальной геометрии многообразий являются структуры различных связностей, имеющие широкое применение в естествознании и математике. Понятие эквиваффинной кривизны первоначально встречается у В. Бляшке [1], альтернативный подход приведен в работе [2]. Вопрос о существовании связности нулевой кривизны является одной из нерешенных проблем, такие связности позволяют дать геометрическую интерпретацию некоторым понятиям математики и физики, например, понятие связности, определяющее представление нулевой кривизны, играет важную роль в теории солитонов. «Дифференциальная геометрия многомерных пространств различных “связностей” является одним из интереснейших разделов современной математики. Очень велико ее значение и в современной физике и механике» [3]. Трехмерные однородные пространства с разрешимой группой преобразований рассматривались в статье [4], причем внимание сосредоточено на пространствах, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны. В данной работе определено, при каких условиях такое пространство не допускает эквиваффинных связностей; при изложении сохранены обозначения, введенные в работе [4], в которой приведен более подробный тематический обзор, а также обоснование применяемых методов.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$, $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Необходимое условие существования аффинной связности состоит в том, что представление изотропии для G должно быть точным, если G эффективна на \bar{G}/G . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$, и факторпространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры \mathfrak{g} , а все отображение является \mathfrak{g} – инвариантным. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m;$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Будем говорить, что Λ имеет нулевое кручение или является связностью без кручения, если $T = 0$. Определим тензор Риччи $Ric \in \text{Inv}T_2(\mathfrak{m})$: $Ric(y, z) = \text{tr}\{x \mapsto R(x, y)z\}$. Бу-

дем говорить, что аффинная связность Λ является локально эквиваффинной, если $\text{tr}\Lambda([x, y]) = 0$ для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$, то есть $\Lambda([\bar{\mathfrak{g}}, \bar{\mathfrak{g}}]) \subset \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$. Аффинная связность Λ с нулевым кручением имеет симметрический тензор Риччи тогда и только тогда, когда она локально эквиваффинна [5].

Под эквиваффинной связностью будем понимать аффинную связность Λ (без кручения), для которой $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{\mathfrak{g}}$. В этом случае очевидно, что $\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}) \in \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$.

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, через $\{e_1, \dots, e_n, u_1, u_2, u_3\}$ обозначим базис $\bar{\mathfrak{g}}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$). Будем полагать, что подалгебра \mathfrak{g} порождается векторами e_1, \dots, e_n , а $\{u_1, u_2, u_3\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, а для нумерации пар – запись $d.n.m$, соответствующие приведенным в источнике [4], здесь d – размерность подалгебры, n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$, а m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$. Аффинная связность называется тривиальной, если $\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \Lambda(u_3) = 0$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется тривиальной, если существует коммутативный идеал \mathfrak{a} в $\bar{\mathfrak{g}}$, такой, что $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$. Тривиальную пару типа $d.n$ обозначаем $d.n.1$.

Теорема. А) Все трехмерные тривиальные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающие эквиваффинных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{g}}$, где \mathfrak{a} – коммутативный идеал в $\bar{\mathfrak{g}}$, а \mathfrak{g} сопряжена одной из следующих подалгебр в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$:

$$\dim \mathfrak{g} = 1$$

2. $\begin{bmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu x \end{bmatrix}$	4. $\begin{bmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & \mu x \end{bmatrix}$
$\lambda \leq \mu \leq 1, \lambda \mu > 0,$ $(\lambda, \mu) \neq (-2, -1),$ $(\lambda, \mu) \neq (1/4, 1/2),$ $\lambda + \mu \neq -1;$	
$\mu > 0,$ $\mu \neq -2\lambda;$	
7. $\begin{bmatrix} x & & x \\ & \lambda x & \\ & & x \end{bmatrix}$	9. $\begin{bmatrix} x & x & \\ & x & x \\ & & x \end{bmatrix}$
$\lambda \neq 0,$ $\lambda \neq -2;$	
$\dim \mathfrak{g} = 2$	
1. $\begin{bmatrix} x & & \\ & \lambda x & \\ & & y \end{bmatrix}$	2. $\begin{bmatrix} x+y & & \\ & \lambda x & \\ & & \mu y \end{bmatrix}$
$ \lambda \leq 1,$ $\lambda \neq 0;$	
$-1 \leq \mu \leq \lambda,$ $\lambda \mu > 0,$ $(\lambda, \mu) \neq (-1, -1);$	
3. $\begin{bmatrix} \lambda x & x & \\ -x & \lambda x & \\ & & y \end{bmatrix}$	4. $\begin{bmatrix} y & x & \\ -x & y & \\ & & \lambda x + \mu y \end{bmatrix}$
$\lambda \geq 0;$	
$\lambda \geq 0,$ $(\lambda, \mu) \neq (0, 0),$ $(\lambda, \mu) \neq (0, -2);$	

$$5. \begin{pmatrix} y & x+\lambda y \\ x & \\ & y \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} y & y \\ x & \\ & y \end{pmatrix}; 8. \begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0, \lambda \neq -1;$$

$$22. \begin{pmatrix} \lambda x & y & z \\ \mu x & x & \\ -x & \mu x & \end{pmatrix} \quad \lambda \neq -2\mu; \lambda > 0; 23. \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & y & \\ & & (2\lambda-1)x \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1, \frac{1}{2}, 0;$$

$$9. \begin{pmatrix} y & x \\ \lambda y & \\ & \mu y \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu) \neq (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\lambda, \mu) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), \lambda \neq 0, \mu \neq 0, \lambda + \mu \neq -1; 10. \begin{pmatrix} x & y & x \\ x & y & \\ & & x \end{pmatrix}$$

$$24. \begin{pmatrix} y & z \\ x & y \\ & 2x \end{pmatrix}; 26. \begin{pmatrix} x & z \\ y & y \\ & y \end{pmatrix}; 27. \begin{pmatrix} y & x & z \\ \lambda y & y & \\ & & \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0, -\frac{1}{2};$$

$$11. \begin{pmatrix} x & y & -x \\ x & y & \\ & & x \end{pmatrix}; 12. \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \\ & x \end{pmatrix}; 14. \begin{pmatrix} y & y & x \\ y & y & \\ & & y \end{pmatrix}$$

$$28. \begin{pmatrix} x & z \\ y & \\ & x \end{pmatrix}; 29. \begin{pmatrix} x & x & z \\ x & y & \\ & & \mu x \end{pmatrix} \quad \mu \neq 0, -2;$$

$$15. \begin{pmatrix} x \\ y & y \\ y & \end{pmatrix}; 16. \begin{pmatrix} y & x \\ \lambda y & \\ & \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0, \lambda \neq -\frac{1}{2};$$

$$30. \begin{pmatrix} x & x & z \\ x & x+y & \\ & & x \end{pmatrix}; 31. \begin{pmatrix} x+y & z \\ x & z \\ & x-y \end{pmatrix}$$

$\dim \mathfrak{g} = 4$

$$19. \begin{pmatrix} y & y & x \\ y & \\ & & \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0, \lambda \neq -2; 21. \begin{pmatrix} x & y \\ \lambda x & y \\ & (2\lambda-1)x \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 1, 0, \frac{1}{2};$$

$$4. \begin{pmatrix} x & u \\ y & \\ & z \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} x & u \\ \lambda x & z \\ & y \end{pmatrix} \quad -1 \leq \lambda \leq 1; 7. \begin{pmatrix} \lambda x & x & u \\ -x & \lambda x & z \\ & & y \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0;$$

$$22. \begin{pmatrix} y \\ x & y \\ & 2x \end{pmatrix}$$

$\dim \mathfrak{g} = 3$

$$8. \begin{pmatrix} x & u \\ y & z \\ & \lambda x + \mu y \end{pmatrix} \quad \lambda \leq \mu, (\lambda, \mu) \neq (0, 0), (\lambda, \mu) \neq (-1, -1);$$

$$1. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} y & x \\ -x & y \\ & z \end{pmatrix}; 6. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$9. \begin{pmatrix} y & x & u \\ -x & y & z \\ & & \lambda x + \mu y \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, 0), (\lambda, \mu) \neq (0, -2);$$

$$7. \begin{pmatrix} y & x \\ \lambda y & z \\ & \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0; 8. \begin{pmatrix} y & x \\ z & \\ & \lambda y + \mu z \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0), (\lambda, \mu) \neq (-1, -1);$$

$$10. \begin{pmatrix} z & u \\ x & \\ & y \end{pmatrix}; 11. \begin{pmatrix} x & z & u \\ y & \\ & \lambda x + \mu y \end{pmatrix} \quad -1 \leq \mu < 1, (\lambda, \mu) \neq (0, 0), (\lambda, \mu) \neq (-1, -1);$$

$$9. \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & \\ & & x \end{pmatrix}; 10. \begin{pmatrix} x & z \\ y & \lambda x + y \\ & y \end{pmatrix}; 11. \begin{pmatrix} x & z \\ y & x \\ & y \end{pmatrix};$$

$$12. \begin{pmatrix} x & z & u \\ y & \\ & \lambda x + y \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0; 13. \begin{pmatrix} x & z & u \\ \lambda y & y \\ -y & \lambda y \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0;$$

$$12. \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}; 13. \begin{pmatrix} x & z \\ \lambda x & y \\ & \mu x \end{pmatrix} \quad -1 < \lambda \leq 1, \mu \neq 0, \lambda + \mu \neq -1; 14. \begin{pmatrix} x & z \\ -x & y \\ & \mu x \end{pmatrix} \quad \mu > 0;$$

$$14. \begin{pmatrix} \lambda x + \mu y & z & u \\ y & x \\ -x & y \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0, (\lambda, \mu) \neq (0, -2); 15. \begin{pmatrix} x & z & u \\ y & \lambda x + y \\ y & \end{pmatrix} \quad \lambda \geq 0;$$

$$16. \begin{pmatrix} \lambda x & x & z \\ -x & \lambda x & y \\ & & \mu x \end{pmatrix} \quad \mu > 0, \mu \neq -2\lambda; 17. \begin{pmatrix} x & \lambda x + y & z \\ x & \\ & y \end{pmatrix};$$

$$16. \begin{pmatrix} x & z & u \\ y & x \\ & y \end{pmatrix}; 17. \begin{pmatrix} x & \lambda x + y & u \\ x & z \\ & y \end{pmatrix}; 18. \begin{pmatrix} x & x & u \\ x & z \\ & y \end{pmatrix};$$

$$18. \begin{pmatrix} x & x & z \\ x & \\ & y \end{pmatrix}; 19. \begin{pmatrix} y & z \\ x & \\ & \lambda x \end{pmatrix} \quad |\lambda| \leq 1, \lambda \neq 0, \lambda \neq -1;$$

$$19. \begin{pmatrix} y & u \\ z & \\ & x \end{pmatrix}; 20. \begin{pmatrix} y & u \\ x & z \\ & \lambda x \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0, -1;$$

$$20. \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \\ & \mu x \end{pmatrix} \quad \lambda \leq \mu, \lambda \neq 0, \mu \neq 0, \lambda + \mu \neq -1; 21. \begin{pmatrix} y & z \\ \lambda x & x \\ -x & \lambda x \end{pmatrix} \quad \lambda < 0;$$

$$21. \begin{pmatrix} x & y & u \\ \lambda x & z \\ \mu x & \end{pmatrix} \quad \mu \neq 0, \lambda + \mu \neq -1; 22. \begin{pmatrix} x+y & z & u \\ x & z \\ & x-y \end{pmatrix}$$

$\dim \mathfrak{g} = 5$

4.	$\begin{matrix} x & & v \\ & y & u \\ & & z \end{matrix}$	5.	$\begin{matrix} x & y & v \\ -y & x & u \\ & & z \end{matrix}$	6.	$\begin{matrix} x & u & v \\ & y & \\ & & z \end{matrix}$
7.	$\begin{matrix} x & u & v \\ & y & z \\ -z & & y \end{matrix}$	8.	$\begin{matrix} & z & v \\ x & u & \\ & & y \end{matrix}$	9.	$\begin{matrix} x & z & v \\ & \lambda x & u \\ & & y \end{matrix}$
10.	$\begin{matrix} x & z & v \\ & y & u \\ & & \lambda x + \mu y \end{matrix}$	$(\lambda, \mu) \neq (0, 0),$ $(\lambda, \mu) \neq (-1, -1).$			

$\dim \mathfrak{g} = 6$

5.	$\begin{matrix} x & u & w \\ & y & v \\ & & z \end{matrix}$
----	---

Греческими буквами здесь обозначены параметры, подалгебры с одинаковыми номерами, но разными значениями параметров, не сопряжены друг другу, латинскими буквами обозначены переменные, по умолчанию они принадлежат \mathbb{R} ; базис подалгебры выбираем, придав одной из переменных значение 1, а остальным 0, нумерация базисных векторов соответствует алфавиту.

Б) Все трехмерные нетривиальные однородные пространства, допускающие инвариантные аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающие эквивалентных связностей, такие, что $\bar{\mathfrak{g}}$ разрешима, локально имеют вид 1.2.2 ($\lambda < -1$), 1.2.3 ($0 < \lambda \leq 1/2$), 1.4.2 ($\lambda > 0$), 1.7.3, 2.2.2, 2.4.2, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu \neq 0, -1, -1/2$), 2.15.2, 2.16.3, 2.19.5, 3.8.7, 3.13.3 ($0 < \mu < 2$), 3.13.5 ($\mu \neq -1, -2 < \mu < 0$), 3.14.3, 3.19.17, 3.20.25 ($\mu \neq -1/3, \mu < 0$), 3.20.26 ($\lambda \neq 1/4, \lambda > 0$), 4.8.9, 4.11.5, где

1.2.2, $\lambda < -1$	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & \lambda u_2 & (\lambda + 1)u_3 \\ u_1 & -u_1 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -\lambda u_2 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & -(\lambda + 1)u_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
-----------------------	---

1.2.3, $0 < \lambda \leq 1/2$	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & \lambda u_2 & (1 - \lambda)u_3 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -\lambda u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_3 & (\lambda - 1)u_3 & 0 & -u_1 & 0 \end{matrix}$
-------------------------------	--

1.4.2, $\lambda > 0$	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & \lambda u_1 - u_2 & u_1 + \lambda u_2 & 2\lambda u_3 \\ u_1 & -\lambda u_1 + u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -\lambda u_2 - u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & -2\lambda u_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
----------------------	---

1.7.3	$\begin{matrix} e_1 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & u_1 & 2u_2 & u_1 + u_3 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & u_2 \\ u_2 & -2u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 - u_3 & -u_2 & 0 & 0 \end{matrix}$
-------	---

2.2.2	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & u_1 & 0 & u_3 \\ u_1 & -u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & -u_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_3 & 0 & -u_3 & 0 & -u_1 & 0 \end{matrix}$
-------	---

2.4.2	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & 2u_3 \\ e_2 & 0 & 0 & -u_2 & u_1 & 0 \\ u_1 & -u_1 & u_2 & 0 & u_3 & 0 \\ u_2 & -u_2 & -u_1 & -u_3 & 0 & 0 \\ u_3 & -2u_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
-------	--

2.9.2, $\mu \neq 0,$ $\mu \neq -1, -1/2$	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & (1 - \mu)e_2 & u_1 & (\mu + 1)u_2 & \mu u_3 \\ e_2 & (\mu - 1)e_2 & 0 & 0 & 0 & u_1 \\ u_1 & -u_1 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ u_2 & -(\mu + 1)u_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -\mu u_3 & -u_1 & -u_2 & 0 & 0 \end{matrix}$
--	---

2.8.5	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & e_1 & 0 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 & 0 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & -u_3 & -u_2 & 0 & 0 \end{matrix}$
-------	---

2.15.2	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & e_1 & 0 & 0 & u_1 \\ e_2 & -e_1 & 0 & 0 & u_2 & u_2 + u_3 \\ u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\ u_2 & 0 & -u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & -u_2 - u_3 & -u_2 & 0 & 0 \end{matrix}$
--------	---

2.16.3	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & -(1/2)e_1 & 0 & 0 & u_1 \\ e_2 & (1/2)e_1 & 0 & u_1 & (1/2)u_2 & u_2 + \\ & & & & & + (1/2)u_3 \\ u_1 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -(1/2)u_2 & 0 & 0 & u_1 \\ u_3 & -u_1 & -u_2 - \\ & & (1/2)u_3 & 0 & -u_1 & 0 \end{matrix}$
--------	--

2.19.5	$\begin{matrix} e_1 & e_2 & u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 0 & -(1/2)e_1 & 0 & 0 & u_1 \\ e_2 & (1/2)e_1 & 0 & u_1 & u_1 + \\ & & & & + u_2 & + (1/2)u_3 \\ u_1 & 0 & -u_1 & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & -u_1 - u_2 & 0 & 0 & 0 \\ u_3 & -u_1 & -e_1 - (1/2)u_3 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$
--------	--

3.8.7	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

4.8.9	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	$2e_3$	e_4	u_1	0	$-u_3$
e_2	0	0	$-e_3$	0	0	u_2	u_3
e_3	$-2e_3$	e_3	0	0	0	0	u_1
e_4	$-e_4$	0	0	0	0	0	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	u_2
u_2	0	$-u_2$	0	0	0	0	0
u_3	u_3	$-u_3$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_2$	0	0

3.13.3, $0 < \mu < 2$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1-\mu)u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$(\mu-1)u_2$	0	0	0	0	u_1
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

4.11.5	e_1	e_2	e_3	e_4	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	e_3	e_4	u_1	0	0
e_2	0	0	$-e_3$	$-(1/2)e_4$	0	u_2	$(1/2)u_3$
e_3	$-e_3$	e_3	0	0	0	u_1	e_4
e_4	$-e_4$	$(1/2)e_4$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0	0
u_2	0	$-u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	0	$-(1/2)u_3$	$-e_4$	$-u_1$	0	0	0

3.13.5, $\mu \neq -1, -2 < \mu < 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	$(1-\mu)e_3$	u_1	$(1+\mu)u_2$	μu_3
e_2	$-e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	u_2
u_2	$-(\mu+1)u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-u_2$	$-u_1$	$-u_2$	0	0

3.14.3	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-3e_2$	$-e_3$	u_1	$-u_2$	$2u_3$
e_2	$3e_2$	0	0	0	0	u_2
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	u_2	0	0	0	0	u_1
u_3	$-2u_3$	$-u_2$	$-u_1$	0	$-u_1$	0

3.19.17	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$-2e_2$	$-e_3$	0	$2u_2$	u_3
e_2	$2e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	e_3	0	0	0	0	u_1
u_1	0	0	0	0	0	0
u_2	$-2u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

3.20.25, $\mu \neq -\frac{1}{3}, \mu < 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-2\mu)e_2$	$(1-\mu)e_3$	u_1	$2\mu u_2$	μu_3
e_2	$(2\mu-1)e_2$	0	0	0	u_1	e_3
e_3	$(\mu-1)e_3$	0	0	0	0	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-2\mu u_2$	$-u_1$	0	0	0	0
u_3	$-\mu u_3$	$-e_3$	$-u_1$	0	0	0

3.20.26, $\lambda \neq \frac{1}{4}, \lambda > 0$

	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3
e_1	0	$(1-\lambda)e_2$	$(1-2\lambda)e_3$	u_1	λu_2	$2\lambda u_3$
e_2	$(\lambda-1)e_2$	0	0	0	u_1	0
e_3	$(2\lambda-1)e_3$	0	0	0	e_2	u_1
u_1	$-u_1$	0	0	0	0	0
u_2	$-\lambda u_2$	$-u_1$	$-e_2$	0	0	0
u_3	$-2\lambda u_3$	0	$-u_1$	0	0	0

В работе [4] приведен список трехмерных однородных пространств разрешимых групп Ли, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны, соответственно, для доказательства этой теоремы достаточно выбрать из них пространства, не допускающие эквивалентных связностей. Заметим также, что у пространств, указанных в теореме, связность имеет нулевую кривизну, тензор Риччи также нулевой (то есть симметрический), следовательно, при равенстве нулю тензора кручения аффинная связность является локально эквивалентной связностью без кручения. Находим аффинные связности и тензоры кручения. Проверяя, при каких условиях пространство не допускает эквивалентных связностей, получаем искомый результат.

Действительно, выпишем инвариантные связности на пространствах, приведенных в работе [4]. Прямыми вычислениями получаем, что, например, у пар, перечисленных в пункте Б теоремы (в некотором базисе), аффинная связность тривиальна с нулевой кривизной и кручением, за исключением пар, выписанных ниже. Если тензор кручения нулевой, то аффинная связность (которая также является локально эквивалентной) имеет вид, приведенный в табл. 1.

Если же тензор кручения может быть ненулевым, то аффинная связность и сам тензор кручения имеют вид, приведенный в табл. 2 и 3.

Следовательно, аффинная связность является локально эквивалентной связностью без кручения при $q_{1,3} = \frac{1}{2}$ в случаях 3.14.3, 3.13.3, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 ($\mu \neq 0, -1, -\frac{1}{2}$), 2.15.2, 1.7.3; при $r_{1,2} = q_{1,3} - 1$ в случаях 2.2.2, 1.2.3; при $r_{1,2} = q_{1,3}$ в случае 3.20.26 ($\lambda = \frac{1}{3}$); при $p_{3,2} = \frac{1}{2}$ в случаях 2.4.2, 1.4.2 и при $q_{3,1} = p_{3,2} - 1$ в случае 1.2.2.

Таблица 1

Аффинная связность (тензор кручения нулевой)

Пара	Аффинная связность (тензор кручения нулевой)
4.11.5, 3.19.17, 3.20.25 $\mu \neq 0, -\frac{1}{3}$	$\Lambda(u_1) = 0, \Lambda(u_2) = 0, \Lambda(u_3) =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.20.26 $\lambda \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.19.5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $r_{1,3} \in \mathbb{R}$

Таблица 2

**Аффинная связность
(тензор кручения может быть ненулевым)**

Пара	Аффинная связность (тензор кручения может быть ненулевым, $p_{i,j}, q_{i,j}, r_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1,3}$)
3.13.3 $\mu \neq 0$, 3.14.3	$\Lambda(u_1) = 0, \Lambda(u_2) =$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\Lambda(u_3) =$ $\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5 ($\mu \neq -1$), 2.8.5, 2.9.2 $\lambda \neq \frac{1}{2}$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$) 2.15.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.2.2, 1.2.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.16.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & -q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Окончание табл. 2

3.20.26 $\lambda = \frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & r_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.4.2, 1.4.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,1} & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -p_{3,2} & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2 $\mu = 1$, 1.7.3	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_{2,3} & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.2 $\lambda = \frac{1}{2}$ ($\mu \neq 0, 1, -1, -\frac{1}{2}$)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ -p_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Аналогично, у всех пар, перечисленных в пункте А теоремы, локально эквивалентные связности имеют вид, указанный в табл. 4.

Для остальных трехмерных однородных пространств, приведенных в теореме, локально эквивалентная связность также существует и тривиальна.

Заметим, что в случаях 3.20.25 ($\mu = -\frac{1}{3}$) и 3.13.5 ($\mu = -1$) $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \bar{g}$, то есть эквивалентные связности существуют (и совпадают с локально эквивалентными), в случаях 1.2.1 ($\mu + \lambda = -1$), 1.4.1 ($\mu = -2\lambda$), 1.7.1 ($\lambda = -2$), 2.2.1 ($\lambda, \mu = (-1, -1)$), 2.4.1 ($\lambda, \mu = (0, -2)$), 2.8.1 ($\lambda = -1$),

2.9.1 ($\lambda + \mu = -1$), 2.16.1 ($\lambda = -\frac{1}{2}$), 2.19.1 ($\lambda = -2$), 3.8.1 ($\lambda, \mu = (-1, -1)$), 3.13.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.16.1 ($\mu = -2\lambda$), 3.19.1 ($\lambda = -1$), 3.20.1 ($\mu + \lambda = -1$), 3.21.1 ($\lambda = 0$), 3.22.1 ($\lambda = -2\mu$), 3.23.1 ($\lambda = 0$), 3.27.1 ($\lambda = -\frac{1}{2}$), 3.29.1 ($\mu = -2$), 4.8.1 ($\lambda, \mu = (-1, -1)$), 4.9.1 ($\lambda, \mu = (0, -2)$), 4.11.1 ($\lambda, \mu = (-1, -1)$), 4.14.1 ($\lambda, \mu = (0, -2)$), 4.20.1 ($\lambda = -1$), 4.21.1 ($\mu + \lambda = -1$), 5.10.1 ($\lambda, \mu = (-1, -1)$) также имеем $\text{tr}\Lambda(x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, то есть эквиаффинная связность существует (и тривиальна), а в остальных случаях, приведенных в теореме, $\text{tr}\Lambda(\mathfrak{g}) \neq 0$, так как даже $\Lambda(\mathfrak{g}) \notin \mathfrak{sl}(\mathfrak{m})$, следовательно указанные пары не допускают эквиаффинных связностей.

Таблица 3

Тензор кручения

Пара	Тензор кручения
3.14.3, 3.13.3 $\mu \neq 0, 2.16.3$	$T(u_1, u_2) = T(u_1, u_3) = 0,$ $T(u_2, u_3) = (2q_{1,3} - 1, 0, 0)$
4.8.9, 3.8.7, 3.13.5, 2.8.5, 2.9.2 $\mu \neq 0, -1, -\frac{1}{2},$ 2.15.2, 1.7.3	$(0, 0, 0), (0, 2p_{2,3} - 1, 0), (0, 0, 0)$
3.20.26 $\lambda = \frac{1}{3}$	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2}, 0, 0)$
2.2.2, 1.2.3	$(0, 0, 0), (0, 0, 0), (q_{1,3} - r_{1,2} - 1, 0, 0)$
2.4.2, 1.4.2	$(0, 0, 2p_{3,2} - 1), (0, 0, 0), (0, 0, 0)$
1.2.2	$(0, 0, p_{3,2} - q_{3,1} - 1), (0, 0, 0), (0, 0, 0)$

Таблица 4

Локально эквиаффинная связность

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
4.11.1 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0,$ 4.21.1 $\mu = 1 - \lambda (\lambda \neq 1),$ 3.27.1 $\lambda = \frac{1}{2}, 2.16.1$ $\lambda = \frac{1}{2},$ 2.21.1 $\lambda = \frac{3}{4}$	$\Lambda(u_1) = \Lambda(u_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\Lambda(u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.8.1 $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{2},$ 3.8.1 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = 0,$ 2.8.1 $\lambda = \frac{1}{2}, 2.9.1$ $\lambda = 2\mu$ $(\mu \neq 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 1.2.1 $\mu = \lambda / 2 (\lambda \neq -2, -\frac{2}{3})$ 1.7.1 $\lambda = 2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 4

Пара	Локально эквиаффинная связность (без кручения)
3.7.1 $\lambda = \frac{1}{2},$ 2.1.1 $\lambda = \frac{1}{2},$ 1.2.1 $\lambda = \frac{1}{2} (\mu \neq \frac{1}{2}, 1),$ 1.7.1 $\lambda = \frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.14.1 $\mu \neq 0, 2,$ 2.9.1 $\lambda = 1, \mu = \frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \frac{1}{2}$ $\mu \neq 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\mu = 2\lambda$ $(\lambda \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4.11.1 $\mu = -1, \lambda = 1,$ 3.8.1 $\lambda = -1, \mu = 1,$ 3.20.1 $\mu = 1 - \lambda (\lambda \neq 0),$ 2.2.1 $\lambda = \mu = 1,$ 2.9.1 $\lambda = 1 - \mu$ $(\mu \neq 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}),$ 1.2.1 $\mu = 1 - \lambda$ $(\lambda \neq \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 4

Окончание табл. 4

Пара	Локально экваффинная связность (без кручения)
4.14.1 $\lambda = 0, \mu = 2,$ 3.22.1 $\lambda = 2\mu \neq 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \mu = \frac{1}{2},$ 1.2.1 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & q_{1,2} & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & r_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3.23.1 $\lambda = \frac{2}{3},$ 2.21.1 $\lambda = \frac{2}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 2q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.4.1 $\lambda = 0, \mu = 2,$ 1.4.1 $\mu = 2\lambda$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,1} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2.9.1 $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & r_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1.2.1 $\mu = \lambda + 1$ $(\lambda \neq -2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{3,2} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
1.2.1 $\lambda = \frac{1}{3},$ $\mu = \frac{2}{3}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{3,2} & 0 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 0 & q_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Прямыми вычислениями для всех пар, приведенных в работе [4], получаем, что других трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих аффинные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиваффинных связностей, нет.

Заключение. Таким образом, найдено и приведено в явном виде полное описание трехмерных однородных пространств с разрешимой группой преобразований, допускающих инвариантные связности только нулевой кривизны, но не допускающих эквиваффинных связностей. Особенностью методов, представленных в работе, является применение чисто алгебраического подхода к описанию многообразий и структур на них. Полученные результаты могут быть использованы при исследовании многообразий, а также иметь приложения в различных областях математики и физики, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях связаны с изучением инвариантных объектов на однородных пространствах.

Список литературы

1. Blaschke W. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Berlin: Springer, 1923. Vol. 2. 230 s.
2. Olver P. Recursive moving frames // Results Math. 2011. No. 60. P. 423–452.
3. Veblen O., Whitehead J. The foundations of differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932, 230 p.
4. Можей Н. П. Связности нулевой кривизны на однородных пространствах разрешимых групп Ли // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. 2017. № 6 (105). С. 104–111.
5. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. 263 p.

References

1. Blaschke W. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Berlin, Springer Publ., 1923, vol. 2. 230 s. (Auf Deutsch).

2. Olver P. Recursive moving frames. *Results Math.*, 2011, vol. 60, pp. 423–452.
3. Veblen O., Whitehead J. The foundations of differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1932. 230 p.
4. Mozhey N. P. Connections of zero curvature on homogeneous spaces of solvable Lie groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta* [Izvestiya Gomel State University], 2017, no. 6 (105), pp. 104–111 (In Russian).
5. Nomizu K., Sasaki T. Affine differential geometry. Cambridge, Cambridge Univ. Press Publ., 1994. 263 p.

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила после доработки 15.03.2024

МЕХАНИКА MECHANICS

УДК 531.382

Т. Б. Карлович, А. П. Васеха, Р. Н. Ласовский
Белорусский государственный технологический университет

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТОЧКИ КАСАНИЯ ВОЛЧКА ТИП-ТОП С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ

Волчок тип-топ (tippe top) является примером механической системы, которая при вращении может переворачиваться на 180° , занимая неустойчивое положение равновесия. Волчок представляет собой симметричное тело вращения с одинаковыми моментами инерции относительно горизонтальных осей и отличным от них моментом инерции относительно вертикальной оси. В состоянии покоя центр тяжести волчка располагается ниже центра описанной вокруг него сферы, а при движении он может подниматься выше центра сферы. Переворот волчка обусловлен наличием трения скольжения по поверхности.

В настоящей работе для эксперимента были разработаны два вида волчков в виде тонкостенных сферических оболочек, срезанных выше экватора, и ножек в виде усеченных конусов, вкручиваемых в цилиндрические отверстия на дне сферических оболочек. Внутри одной из сферических оболочек для локализации воздуха добавлялись перегородки. Модели распечатывались на 3D-принтере PLA-пластиком. Затем волчки запускались многократно на гладкой горизонтальной поверхности и производилась видеосъемка их движения. Выяснилось, что траектории движения представляют собой сходящиеся спирали, причем для волчка без перегородок максимальный видимый диаметр витка спирали больше, чем для волчка с перегородками. Это соответствует предсказаниям теории эволюции тяжелого динамически симметричного тела сферической формы на горизонтальной плоскости с малым трением.

Ключевые слова: механическая система, динамически симметричное тело, количество движения, кинетический момент.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 19–24.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3.

T. B. Karlovich, A. P. Vasekha, R. N. Lasovsky
Belarusian State Technological University

EXPERIMENTAL STUDY OF THE TRAJECTORY OF THE TOUCH POINT OF A TIPPE TOP WITH A HORIZONTAL SURFACE DURING ITS MOVEMENT

A tippe top is an example of a mechanical system that is spun by hand and can tip 180° when rotated, exhibited dynamically unstable behavior. A top is a symmetrical body of rotation with equal moments of inertia about the horizontal axes and a different moment of inertia about the vertical axes. At rest, the center of gravity of the top is located below the center of the sphere described around it, and when moving, it can rise above the center of the sphere. The turning of the top is due to the presence of sliding friction on the surface.

In this work, models of two types of tops in the form of thin-walled spherical shells, cut above the equator, and legs in the form of truncated cones, screwed into cylindrical holes at the bottom of the spherical shells, were developed for the experiment. Partitions were added inside of the spheres to contain air. The models were printed on a 3D-printer using PLA-plastic. Then the tops were launched repeatedly on a smooth horizontal surface and their movement was videotaped. It turned out that the trajectories of movement are converging spirals, and for a top without partitions maximum visible diameter of a spiral

turn is greater than for a top with partitions. This corresponds to the predictions of the theory of evolution of a heavy dynamically symmetrical spherical body on a horizontal plane with low friction.

Keywords: mechanical system, dynamically symmetrical body, momentum, kinetic moment.

For citation: Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the touch point of a tippe top with a horizontal surface during its movement. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 19–24 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3.

Введение. Волчком тип-топ или волчком Томпсона называется кинетическое устройство, которое при раскручивании на неподвижной горизонтальной поверхности может переворачиваться на 180° в вертикальной плоскости. Обычно такой волчок представляет собой сферическую оболочку, срезанную выше экватора с конусообразной ножкой внутри. Волчок является симметричным телом с осью вращения, совпадающей с осью конусообразной ножки, и центром тяжести, находящимся ниже центра сферы, описанной вокруг него. Для переворота волчка и поднятия его центра тяжести выше центра сферы необходимо раскрутить волчок до определенной угловой скорости. В случае малой скорости вращения переворот не происходит, а возникает лишь прецессия оси симметрии волчка.

Объяснение опрокидывания волчка связано с решением задачи о движении тела по твердой неподвижной горизонтальной поверхности с учетом силы трения. Еще в середине прошлого века появился ряд работ, качественно объясняющих поворот оси симметрии быстро закрученного волчка, основанных на решении нелинейных динамических уравнений. Задача о существовании и устойчивости непрерывных вращений сферы на горизонтальной поверхности была исследована в работе [1]. В работе [2] рассмотрена модель движения шара, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии. На него действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта волчка с горизонтальной плоскостью. Получены приближенные уравнения, описывающие динамику шара, и на основе диаграмм Смейла продемонстрированы условия существования устойчивых решений, в том числе для случая расположения центра тяжести шара выше его центра симметрии.

В работе [3] исследованы теоретическая модель и экспериментальная реализация волчка тип-топ. Выделены три типа динамического поведения: с опрокидыванием, без опрокидывания и наклонное, при котором волчок поднимается, но не переходит в вертикальное положение, а остается в некотором промежуточном состоянии. Найдены условия, при которых осуществляется переход от одного типа вращения к другому, а также изготовлены и протестированы несколько образцов волчка «три-в-одном» с подвижным

центром тяжести. Перемещение центра тяжести в образцах позволяет наблюдать три типа их динамического поведения.

Основная часть. Для эксперимента были разработаны модели двух волчков, которые изготавливались на 3D-принтере при помощи печати PLA-пластиком плотностью $1,24 \text{ г/см}^3$. Модель волчка тип-топ (рис. 1) представляет собой сферическую оболочку, толщиной 1 мм и внешним диаметром 38 мм. Оболочка срезается приблизительно на $1/4$ диаметра, чтобы в образовавшееся отверстие можно было вставить ножку и вручную за нее раскручивать волчок. Ножка является усеченным конусом длиной 38 мм с меньшим диаметром 3 мм и большим диаметром 5 мм. Она вкручивается в цилиндрическое отверстие высотой 4 мм, сделанное в дне сферы.

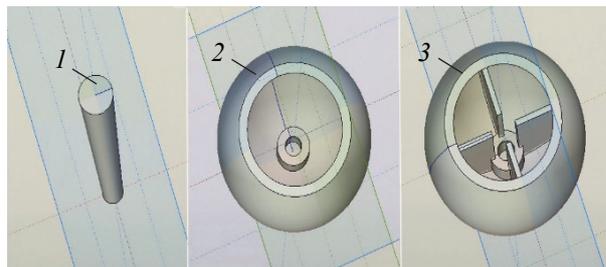


Рис. 1. 3D-модели элементов волчков тип-топ:
1 – ножка; 2 – сферическая оболочка без ребер;
3 – сферическая оболочка с ребрами

Моделирование волчков осуществлялось в САД системе по оригинальным чертежам. Необходимость раздельной печати ножки и шляпки (срезанной сферической оболочки) обусловлена соблюдением сферической формы с точностью 0,5 мм, иначе волчок не будет переворачиваться. Для второго волчка (рис. 1, рис. 2, б) сферическая оболочка печатается с внутренними ребрами (перегородками), разбивающими ее пространство на четыре одинаковых сектора. Масса первого волчка составляет 7,03 г, второго – 8,13 г. Соответствующие элементы моделей представлены на рис. 1.

Готовые собранные волчки показаны на рис. 2. На рис. 2, а представлен образец с полой шляпкой, в которой при раскручивании осуществляется вихревое движение потоков воздуха. Для уменьшения скорости воздушных потоков внутри сферы служат внутренние ребра (рис. 2, б).

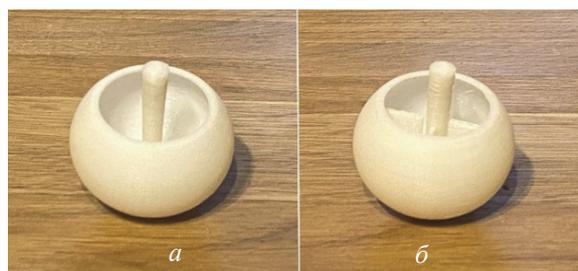


Рис. 2. Волчки тип-топ, распечатанные на 3D-принтере:

а – без перегородок; *б* – с перегородками

Для экспериментов с волчками выбиралась твердая горизонтальная поверхность с малой шероховатостью. Измерение наклона поверхности проводилось уровнем. Максимальные отклонения от горизонтали составили $\pm 0,5^\circ$. В качестве материала для поверхности использовались ламинат и окрашенный порошковой краской металлический лист. Принципиального отличия в движениях волчков на менее шероховатой поверхности (ламинат) и более шероховатой поверхности (металлический лист) не наблюдалось. Лучшее сцепление с поверхностью, большая сила трения скольжения и более четко прописанная траектория точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении наблюдались на металлической поверхности.

Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении проводилась двумя способами. Визуализация траектории первым способом осуществлялась путем видеосъемки со скоростью 240 кадров в секунду с последующей раскадровкой через равные интервалы времени $\sim 0,1$ с. При отсутствии сыпучего материала на поверхности траектории точки касания представляли собой начальный криволинейный отрезок движения до переворота волчка (не показан на рис. 3) и скручивающуюся спираль после его переворота (показана на рис. 3). Причем первоначальный отрезок движения был длиннее для волчка без ребер, так же как и максимальный видимый диаметр витка спирали. Волчок без ребер быстрее переворачивался, но был менее устойчивый при вращении на ножке. Волчок с ребрами переворачивался при большей начальной скорости, однако дольше мог находиться в перевернутом состоянии. Максимальное количество витков спирали было более 10. Видимый радиус закручивания траектории для волчка без ребер составлял ~ 150 мм, для волчка с ребрами ~ 100 мм.

Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности с сыпучим материалом производилась вторым способом: по следу, оставляемому ножкой волчка. Для этого на темный ламинат наносился мелкодисперсный легкосыпучий материал. Лучше

всего для этих целей подошла мука, которая предварительно просеивалась, а затем рассыпалась тонким слоем по поверхности ламината. Волчки много раз запускались вручную на ламинате, в результате их движения в муке образовывались дорожки, повторяющие траекторию точки касания ножки горизонтальной поверхности.

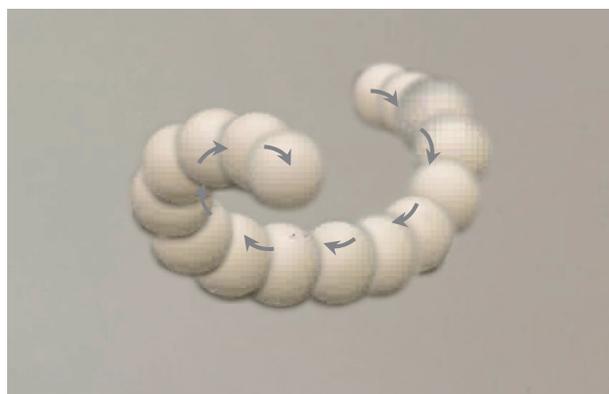


Рис. 3. Фрагмент спиралевидного движения шапочки волчка после его переворота, вид сверху (получен путем раскадровки видео с последующим удалением фона из кадров и наложением их друг на друга; стрелками показано направление движения)

В присутствии сыпучего материала возрастала сила трения скольжения волчка по поверхности. Для волчков с ребрами и без ребер при движении количество витков скручивающейся спирали резко уменьшалось. В некоторых случаях волчки не переворачивались, а прецессировали на шляпке. Типичные траектории движения волчков представлены на рис. 4. Основные этапы эволюции хорошо заметны на рис. 4, *а*. Участок *AB* характеризует движение волчка на шляпке при воздействии внешнего крутящего момента. В точке *B* вследствие неустойчивого движения за короткий интервал времени происходит переворот на ножку. Тонкие линии соответствуют скольжению конца ножки по поверхности. На участке *BC* наблюдается движение волчка по дуге окружности с одновременным вращением вокруг мгновенной вертикальной оси. В точке *C* происходит торможение движения и обратный переворот волчка на шляпку. На участке *CD* движение осуществляется на шляпке до полной остановки. Вследствие неоднородности насыпания муки на ламинированную поверхность движение волчка может сопровождаться случайными поворотами, и тогда его траектория становится петлеобразной, как на рис. 4, *б*. Если переворота волчка во время движения не происходит, то на траектории отсутствует участок *BC* (рис. 4, *а*). Такой случай показан на рис. 4, *в*. Для менее инертного волчка

без ребер показана траектория на рис. 4, *г*. Вначале он движется по спирали, а затем в силу большого сопротивления резко тормозит, разворачивается и заканчивает движение.

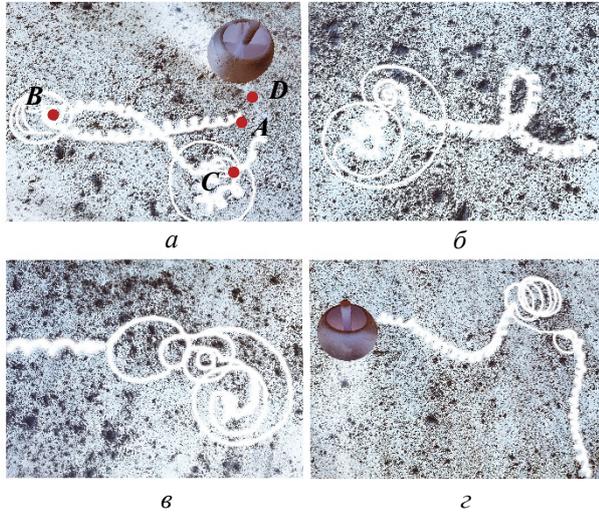


Рис. 4. Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении, полученная путем инверсии изображения (для улучшения качества изображения сделана обводка траекторий): *а* – траектория для волчка с ребрами: *A* – начало траектории, *B* – момент переворота волчка, *BC* – движение на ножке, *C* – опрокидывание на шляпку; *D* – конец движения; *б* – петлеобразная траектория для волчка с ребрами; *в* – траектория для волчка, который не перевернулся на ножку; *г* – траектория для волчка без ребер

Спиральное движение волчка теоретически предсказывается в статье [4] на основе нелинейной динамической модели сферической оболочки на плоскости с вязким трением. Для описания прецессии сферы радиуса ρ используются неподвижная система отсчета $Oxuz$ и подвижная система отсчета $G\xi\eta\sigma$ с началом в центре масс, который отстоит от центра симметрии C на величину ε (рис. 5). Система векторных дифференциальных уравнений записывается с учетом теорем об изменении количества движения и момента количества движения сферы, условия постоянства вектора восходящей вертикали γ и условия безотрывного движения сферы по горизонтальной плоскости в точке касания плоскости Q :

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}; \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}; \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0; \\ (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \boldsymbol{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса сферы; \mathbf{v} – скорость центра масс; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор

восходящей вертикали; \mathbf{R} – реакция, приложенная в точке Q ; $\mathbf{R} = N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}$, где N – нормальная составляющая реакции; \mathbf{F} – сила трения скольжения; I – центральный тензор инерции сферы относительно осей координат $G\xi, G\eta, G\sigma$, связанных со сферой; \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из центра масс к нижней точке сферы Q ; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ – суммарный момент силы трения и силы сопротивления воздуха.

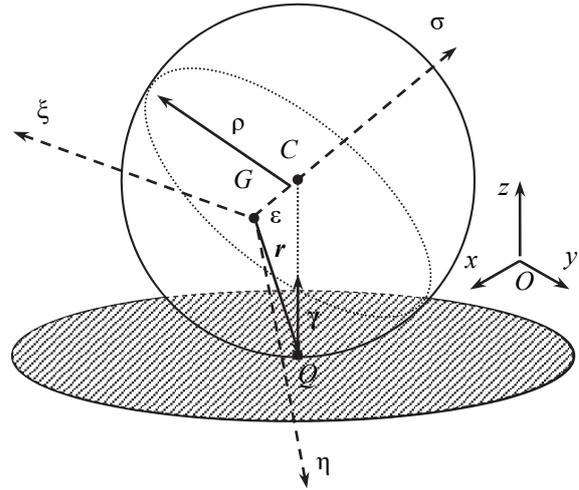


Рис. 5. Схематическое движение сферического волчка по горизонтальной плоскости Oxu

Предполагается, что моменты инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$ одинаковы между собой, равны A и отличаются от момента инерции относительно оси $G\sigma$ – C , так что тензор инерции I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В работе [4] аналитически определяются координаты точки касания Q в виде периодических зависимостей от времени, которые задают сходящееся спиральное движение, однако с ограничением радиуса эволюционирующей окружности радиусом сферы ρ .

В эксперименте с двумя волчками наблюдались спиральные движения с видимым радиусом окружности вращения, большим радиуса сферы волчков. Несовпадение с теоретическими расчетами может быть обусловлено несколькими причинами: 1) использованием теории возмущений в работе [4]; 2) несферической формой волчков; 3) несимметричным раскручиванием волчка вручную (большой и указательный пальцы руки создают несимметричную пару сил); 4) влиянием сопротивления воздуха. В случае вращения цельной сферы

обтекание воздухом происходит только снаружи, в случае срезанной сферической оболочки движение воздуха наблюдается как снаружи, так и внутри. Сила сопротивления воздуха, действующая на сферический объект, оценивается по формуле

$$F_c = c \frac{\rho_0 w^2}{2} s, \quad (3)$$

где c – коэффициент аэродинамического сопротивления для вращающихся тел; ρ_0 – плотность воздуха; w – скорость набегающего воздушного потока; s – эффективная площадь.

Для чисел Рейнольдса $\sim 10^5$ в соответствии с работой [5] примем значение $c = 0,48$. Тогда $F_c = 0,0065$ Н. Оценку силы трения произведем для коэффициента трения скольжения $\mu = 0,5$ с использованием равенства

$$F_m \simeq \mu mg = 0,0245 \text{ Н}. \quad (4)$$

В соответствии с расчетами по формулам (3) и (4) сила сопротивления воздуха может составлять до 27% от силы трения скольжения. В случае срезанной сферы обтекание воздухом происходит как по внешней, так и по внутренней поверхности волчка с перемешиванием

воздушных потоков на поверхности среза сферы.

Теоретически сопротивление воздуха учитывается в уравнениях (1) в виде пары сил, эквивалентной моменту M_2 , направление которого совпадает с направлением кинетического момента волчка [6].

Заключение. В работе экспериментально исследованы траектории точки касания волчка тип-топ горизонтальной поверхности при его движении. Для этого были смоделированы и распечатаны на 3D-принтере два волчка, шляпка одного из которых была полый, а внутри шляпки другого находились ребра, повышающие сопротивление воздуха при движении. Экспериментальные исследования показали, что оба волчка при раскручивании вручную на шляпке очень быстро переворачиваются на ножку и движутся по закручивающейся спирали, причем максимальный видимый диаметр витка спирали у волчка без ребер оказывается большим, чем у волчка с ребрами. Также было проведено сравнение с аналитическими результатами, полученными в работе [4]. Оказалось, что форма траектории полностью совпадает с теоретическими предсказаниями, однако есть отличие в параметрах спирали.

Список литературы

1. Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
2. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 114–121.
3. К созданию прототипа сферического китайского волчка / М. С. Чоччи [и др.] // Нелинейная динамика. 2012. Т. 1, № 2. С. 391–425.
4. Маркеев А. П. К динамике волчка // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 3. С. 30–38.
5. Герасимов С. А. Об автомодельности аэродинамического сопротивления // Вестник машиностроения. 2007. № 1. С. 34–35.
6. Паус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. В 2 т. Т. 2 / под. ред. Ю. А. Архангельского, В. Г. Демина. М.: Наука, 1983. 544 с.

References

1. Karapetyan A. V. Global quality analysis of Chinese spinning top (tippe top) dynamics. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Dinamika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics], 2008, vol. 43, no. 3, pp. 33–41 (In Russian).
2. Karapetyan A. V., Munitsyna M. A. Dynamics of a tip-top with viscous friction. *Trudy MFTI*. [Proceedings of MFTI], 2021, vol. 13, no. 1, pp. 114–121 (In Russian).
3. Ciocci M. S., Malengier B., Langerok B., Grimonprez B. Towards the creation of a prototype of Spherical Chinese top. *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2012, vol. 1, no. 2, pp. 391–425 (In Russian).
4. Markeev A. P. To the dynamics of a top. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [News of the USSR Academy of Sciences. Solid Body Mechanics], 1984, no. 3, pp. 30–38 (In Russian).
5. Gerasimov S. A. On the self-similarity of aerodynamics drag. *Vestnik mashinostroyeniya* [Bulletin of Mechanical Engineering], 2007, no. 1, pp. 34–35 (In Russian).
6. Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. Vol. 2. Ed. Yu. A. Arkhangelsky, V. G. Demin Moscow, Nauka Publ., 1983. 544 p.

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Васеха Антон Павлович – ассистент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: anton.vaseha@mail.ru

Ласовский Руслан Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lasovskyr@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Vasekha Anton Pavlovich – Assistant, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anton.vaseha@mail.ru

Lasovsky Ruslan Nikolayevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lasovskyr@gmail.com

Поступила после доработки 10.07.2024

ФИЗИКА PHISICS

УДК 531.19;538.911

И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтowa

Белорусский государственный технологический университет

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИИ ПОЛЯ ПЛОТНОСТИ В СФЕРИЧЕСКИХ МОЛЕКУЛЯРНЫХ НАНОЧАСТИЦАХ

Ранее предприняты первые шаги для практической реализации идеи о принципиальной возможности сокращенного описания флуктуаций поля плотности с помощью введенной цепочки коррелятивных функций для ансамбля взаимодействующих *элементарных флуктуаций плотности* (ЭФП). Они с определенной вероятностью возникают и исчезают случайным образом на фоне однородной макроскопической системы с заданными термодинамическими параметрами, и поэтому их можно рассматривать в качестве квазичастиц. Их коррелятивные функции введены аналогично тому, как это сделано для системы реальных частиц (атомов либо молекул) в известном методе Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ). В качестве потенциалов взаимодействия ЭФП с однородной средой (без учета флуктуаций) и между собой в этой работе используются энергии образования одиночных и парных (бинарных) ЭФП, расчет которых возможен в рамках двухуровневого статистического метода описания свойств неоднородных систем, одним из примеров которых как раз и являются системы с флуктуирующим полем плотности. Конкретные численные расчеты выполнены для простой молекулярной системы с межчастичным взаимодействием Леннарда-Джонса, которая представляет собой сферическую наночастицу, находящуюся в термостате с заданными термодинамическими параметрами (температура и химический потенциал). В связи с этим для статистического описания такой системы используется большой термодинамический потенциал, который является функционалом поля плотности при наличии ЭФП в объеме системы.

В результате усреднения флуктуаций поля плотности в двух точках сферической наночастицы с использованием рассчитанных потенциалов для бинарных ЭФП определяется *пространственная корреляционная функция* флуктуаций в сферической наночастице, что, понятно, не может быть получено в рамках известной теории флуктуаций для макроскопических систем.

Ключевые слова: двухуровневый статистический метод, наносистемы, флуктуации плотности в наночастицах.

Для цитирования: Наркевич И. И., Фарафонтowa Е. В. Статистическое исследование флуктуации поля плотности в сферических молекулярных наночастицах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 25–30.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-4.

I. I. Narkevich, E. V. Farafontova

Belarusian State Technological University

STATISTICAL RESEARCH OF DENSITY FIELD FLUCTUATIONS IN SPHERICAL MOLECULAR NANOPARTICLES

Previously, the first steps were taken to practically implement the idea of the fundamental possibility of an abbreviated description of density field fluctuations using the introduced chain of correlative functions for an ensemble of interacting *elementary density fluctuations* (EDF). With a certain probability, they appear and disappear randomly against the background of a homogeneous macroscopic system with given thermodynamic parameters and therefore they can be considered as quasiparticles. Their correlative functions are introduced in the same way as was done for a system of real particles (atoms or molecules) in the well-known Bogolyubov – Born – Green – Kirkwood – Yvon (BBGKY) method. As potentials of interaction of EDFs with a homogeneous medium (without taking into account fluctuations) and among themselves, this work uses the formation energies of single and paired (binary) EDFs, the calculation of which is possible within the framework of a two-level statistical method for

describing the properties of inhomogeneous systems, one of the examples of which is systems with a fluctuative density field. Specific numerical calculations were performed for a simple molecular system with Lennard-Jones interparticle interaction, which is a spherical nanoparticle located in a thermostat with given thermodynamic parameters (temperature and chemical potential). That is why to statistically describe such a system, a large thermodynamic potential is used, which is a functional of the density field in the presence of an EDF in the volume of the system.

As a result of averaging fluctuations of the density field at two points of a spherical nanoparticle using calculated potentials for binary EFPs, the spatial correlation function of fluctuations in a spherical nanoparticle is determined, which, of course, cannot be obtained within the framework of the known fluctuation theory for macroscopic systems.

Keywords: two-level statistical method, nanosystems, density fluctuation in nanoparticles.

For citation: Narkevich I. I., Farafontova E. V. Statistical research of density field fluctuations in spherical molecular nanoparticles. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 25–30 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-4.

Введение. К настоящему времени в рамках двухуровневого статистического метода [1–3] сформулирована идея о принципиальной возможности сокращенного статистического описания термодинамических флуктуаций с помощью статистического ансамбля взаимодействующих ЭФП [4, 5], которые возникают случайным образом на фоне однородной макроскопической системы с заданными термодинамическими параметрами. Для этого введены эффективные потенциалы взаимодействия одиночных ЭФП со средой ($\Psi(x_i)$) и друг с другом (для двух флуктуаций $\Psi(x_i, x_j)$, трех и так далее). В результате большой термодинамический функционал $\Omega\{\rho_l\}$ неоднородной системы с произвольным полем плотности ρ_l , сформированным с помощью соответствующего ансамбля ЭФП, можно представить в виде разложения по неприводимым эффективным потенциалам Ψ взаимодействия ЭФП, т. е. квазичастиц [6]:

$$\Omega\{\rho_l\} = \Omega\{\rho_{cp}\} + \sum_{i=1}^M \Psi(x_i) + \sum_{i<j}^M \Psi(x_i, x_j) + \sum_{i<j<k}^M \Psi(x_i, x_j, x_k), \quad (1)$$

$$\Psi_1(x_i) = \tilde{\Omega}(x_i), \quad (2)$$

$$\Psi(x_i, x_j) = \tilde{\Omega}(x_i, x_j) - \tilde{\Omega}(x_i) - \tilde{\Omega}(x_j), \quad (3)$$

$$\Psi(x_i, x_j, x_k) = \tilde{\Omega}(x_i, x_j, x_k) - \tilde{\Omega}(x_i, x_j) - \tilde{\Omega}(x_i, x_k) - \tilde{\Omega}(x_j, x_k). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{\Omega}(x_i)$ – флуктуационная часть большого потенциала системы с одиночной ЭФП, которую можно рассматривать как энергию образования этой флуктуации, а $\tilde{\Omega}(x_i, x_j)$ и $\tilde{\Omega}(x_i, x_j, x_k)$ – аналогичные потенциалы системы с двумя и тремя ЭФП и т. д.

Первое интегро-дифференциальное уравнение для младшей коррелятивной функции $W_1(x_i)$,

описывающей распределение значений параметров одиночной флуктуации в различных точках изучаемой системы, имеет следующий вид [1, 2]:

$$\frac{\partial W_1(x_i)}{\partial x_i} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Psi(x_i)}{\partial x_i} W_1(x_i) + \frac{1}{\theta} \sum_{j \neq i}^M \int_{x_j} \frac{\partial \Psi(x_i, x_j)}{\partial x_i} W_2(x_i, x_j) dx_j = 0. \quad (5)$$

1. Расчет пространственной корреляционной функции с использованием ЭФП в виде сферических пространственных волн. Основная особенность используемого здесь нового статистического подхода состоит в том, что его можно применять при изучении флуктуаций как в макроскопических системах, так и в наноразмерных системах (наночастицах), тогда как широко известные результаты теории флуктуаций [7, 8] относятся к бесконечным системам. В связи с этим в конкретных расчетах поле параметра порядка разлагается в ряд Фурье по плоским пространственным волнам и выполняется интегрирование по всему бесконечному объему.

Для наноразмерной системы, которая находится в равновесии с окружающей ее макроскопической системой (термостатом), в данной работе предлагается описывать флуктуации поля плотности с помощью набора сферических волн с центрами в определенных точках изучаемой системы. Двухуровневый статистический метод позволяет рассчитать термодинамические потенциалы одиночных сферических элементарных флуктуаций поля плотности со всевозможными амплитудами и волновыми числами, а также их групп, в частности бинарных флуктуаций с двумя центрами, находящимися на расстоянии r , представляющих собой суперпозицию двух одиночных ЭФП. Этого достаточно, чтобы с их помощью выполнить усреднение флуктуаций плотности в двух точках изучаемой системы, которые совпадают с центрами бинарных флуктуаций. Понятно, что это не

может быть реализовано в рамках хорошо известной феноменологической флуктуационной теории, в которой с неизбежностью приходится использовать эффективный гамильтониан системы в виде разложения большого термодинамического потенциала Ω по степеням параметра порядка и его первых производных.

В данной работе для практической реализации идеи о сокращенном описании поля флуктуаций в молекулярной среде со средней плотностью n_c будем использовать ЭФП в виде сферических волн с различными значениями амплитуд x и волновых чисел k [6]:

$$\Delta n(x, k, r) = n\{\rho_l\} - n_c = x \frac{\sin(kr)}{kr}. \quad (6)$$

В качестве примера на рис. 1 представлены радиальные профили двух одиночных ЭФП с противоположными значениями амплитуд ($x_1 > 0$ и $x_2 < 0$), а также профиль бинарной ФЭП (верхняя кривая), полученной в соответствии с принципом суперпозиции для двух одиночных ЭФП.

Потенциалы $\tilde{\Omega}(x_1, k_1, x_2, k_2, r)$ для бинарных ЭФП с двумя центрами на фиксированном расстоянии r друг от друга позволяют выполнить численное усреднение произведения флуктуаций плотности в двух точках системы. Это позволит рассчитать бинарную корреляционную функцию $G(\vec{r})$ наноразмерной либо макроскопической системы с учетом флуктуаций поля плотности по следующей формуле:

$$G(\vec{r}) = \frac{\sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} (\Delta n_1 \Delta n_2) e^{\frac{\tilde{\Omega}(x_1, k_1, x_2, k_2, r)}{\theta}}}{\sum_{x_1} \sum_{x_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} e^{\frac{\tilde{\Omega}(x_1, k_1, x_2, k_2, r)}{\theta}}}, \quad (7)$$

где $\Delta n_1 = \Delta n(x_1, k_1, 0)$, $\Delta n_2 = \Delta n(x_2, k_2, r)$.

Учитывая вышесказанное, отметим также, что для наночастицы радиуса R , имеющей собственную сферическую границу, функция $G(\vec{r})$

зависит от положения центров бинарных ЭФП и их ориентации внутри сферы, т. е. она анизотропна, тогда как аналогичная функция одно-родной макроскопической системы изотропна, т. к. зависит только от r .

Численные расчеты потенциалов $\tilde{\Omega}(x_1, k_1, x_2, k_2, r)$ выполнены с помощью специальных компьютерных программ (разработанных с использованием системы Mathcad) для наночастицы как молекулярной термодинамической системы, находящейся в равновесии с термостатом в окрестности критической точки жидкость – газ. При этом все величины обезразмерены с помощью линейного и энергетического параметров потенциала Леннард-Джонса. Конкретные расчеты выполнены для сферической наночастицы радиусом $R = 31,4$, что примерно соответствует 15 нм. Она находится в термостате при температуре $\theta = 3,5$ и плотности $\rho = 1/v = n_c/\omega$, здесь $n_c = 0,505$ – средние числа заполнения элементарных ячеек кубической решетки в статистическом методе условных распределений; ω – объем ячеек, для которых расстояние между ближайшими узлами $d = 1,096$. Для этих термодинамических параметров химический потенциал системы $\mu = -3,0523$ при учете взаимодействия каждой молекулы с тремя ближайшими соседями в решетке.

2. Численные расчеты энергии образования бинарных флуктуаций плотности и их вероятностей возникновения в объеме наночастицы. В выполненных численных расчетах значения потенциалов $\tilde{\Omega}(x_1, k_1, x_2, k_2, r)$, имеющих смысл энергии образования бинарных ЭФП с заданными наборами параметров x_1, k_1, x_2, k_2, r , рассчитывались для бинарных ЭФП, центры которых совпадали с центром наночастицы радиусом R . Результаты расчетов для бинарных ЭФП с заданными значениями амплитуд x_1, x_2 и расстояний r представлены в виде матриц Ω_{ij} , элементами которых являются исходные параметры решаемой статистической модели и рассчитанные значения энергий образования этих флуктуаций. Последние зависят от волновых чисел k_1 и k_2 .

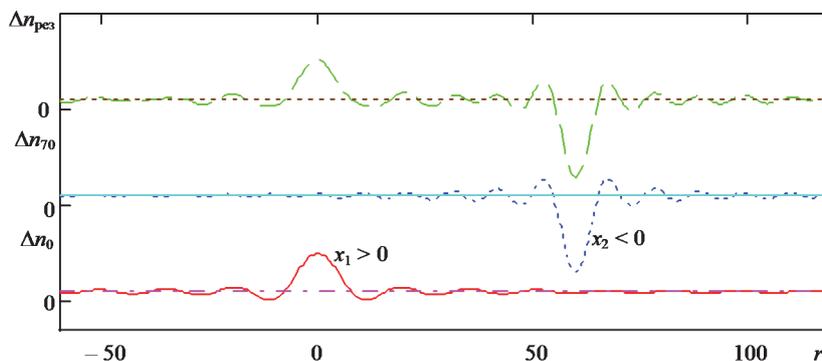


Рис. 1. Профили плотности для двух разноименных элементарных флуктуаций Δn_0 и Δn_{70} и их общий профиль $\Delta n_{рез} = \Delta n_0 + \Delta n_{70}$

Значения элементов матрицы $\Omega_{i,j}$: $\Omega_{0,0} = x_1$, $\Omega_{0,1} = \theta$, $\Omega_{0,2} = \mu$, $\Omega_{0,3} = n_c$, $\Omega_{0,4} = r$, $\Omega_{1,0} = x_2$, остальные элементы нулевого столбца и все элементы первой строки определяют значения волновых чисел k_1 и k_2 соответственно, а элементы $\Omega_{i,j}$ при i больше 1 и j больше 0 определяют значения энергий образования бинарных ЭФП.

В качестве примера на рис. 2 приведена матрица $\Omega_{i,j}$ для бинарной ЭФП с амплитудами $x_1 = 0,02$ и $x_2 = 0,04$, центры которых находятся на расстоянии $r = 2$.

На рис. 3 и 4 показаны графики энергий образования бинарных ЭФП для разных наборов значений амплитуд x_1, x_2 и расстояния $r = 2$.

$$\Omega := \begin{pmatrix} 0.02 & 3.5 & -3.0523 & 0.505 & 2 & 1.324 \times 10^3 & 31.4038 & 0 & 0 \\ 0.04 & 0 & 0.05 & 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.3 & 0.35 \\ 0 & 14.3002 & 10.8973 & 5.6027 & 2.8277 & 1.9051 & 1.9731 & 1.9907 & 1.7013 \\ 0.05 & 12.515 & 9.4442 & 4.8164 & 2.4777 & 1.5732 & 1.496 & 1.4759 & 1.2478 \\ 0.1 & 9.1832 & 6.7843 & 3.5269 & 2.1272 & 1.32 & 0.973 & 0.8603 & 0.7358 \\ 0.15 & 6.9122 & 4.9547 & 2.6404 & 1.9836 & 1.3898 & 0.9357 & 0.7337 & 0.6292 \\ 0.2 & 6.2225 & 4.2835 & 2.0679 & 1.6252 & 1.2744 & 0.9486 & 0.7261 & 0.556 \\ 0.25 & 6.4088 & 4.3229 & 1.8369 & 1.2876 & 1.0651 & 0.923 & 0.7658 & 0.5548 \\ 0.3 & 6.4818 & 4.3576 & 1.7786 & 1.14 & 0.8973 & 0.8205 & 0.7571 & 0.5933 \\ 0.35 & 6.2534 & 4.1911 & 1.7158 & 1.0972 & 0.789 & 0.6713 & 0.6551 & 0.5702 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Пример матрицы $\Omega_{i,j}$ для бинарной ЭФП

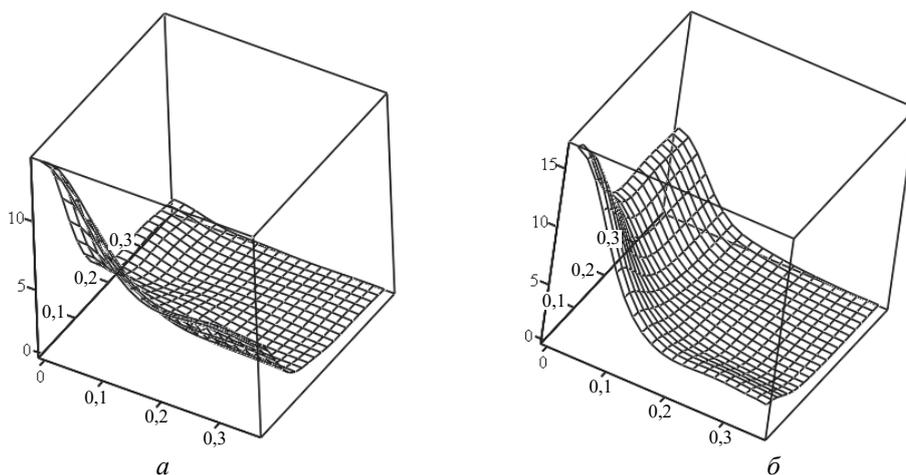


Рис. 3. Спектральные зависимости энергии образования двух бинарной ЭФП с заданными разными значениями амплитуд одинаковых знаков: $a - x_1 = 0,02$ и $x_2 = 0,04$; $б - x_1 = -0,04$ и $x_2 = -0,02$

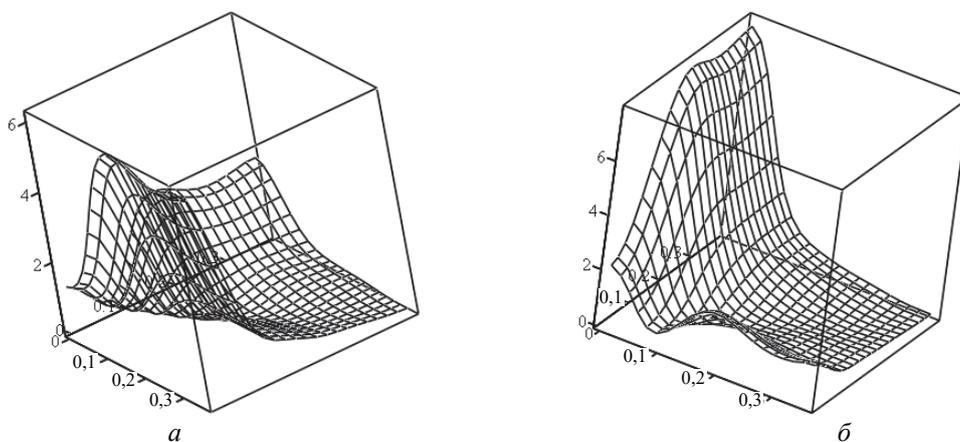


Рис. 4. Спектральные зависимости энергии образования двух бинарной ЭФП с заданными разными значениями амплитуд противоположных знаков: $a - x_1 = -0,02$ и $x_2 = 0,04$; $б - x_1 = -0,04$ и $x_2 = 0,02$

Заключение. Выполненные в работе численные расчеты энергии образования бинарных флуктуаций показали, что сформулированная ранее идея о принципиальной возможности сокращенного статистического описания флуктуаций поля плотности может быть практически реализована при исследовании вкладов тепловых флуктуаций в термодинамические характеристики наноразмерных систем, что в принципе

невозможно сделать известными из литературы методами.

Следует также отметить, что предложенное описание флуктуаций с помощью ЭФП позволит в дальнейшем рассчитывать функции распределения одиночных и бинарных ЭФП по значениям их амплитуд, волновых чисел и расстояний r между двумя одиночными ЭФП.

Список литературы

1. Наркевич И. И. Сокращенное описание неоднородных систем на основе условных пространственных корреляционных функций плотности // Известия АН БССР, серия физико-математических наук. 1980. № 5. С. 107–112.
2. Narkevich I. Statistical theory of nonuniform systems and reduced description in the density fluctuation theory // *Physica*. 1982. Vol. 112 A. P. 167–192.
3. Наркевич И. И. Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем. Ч. 1. Симбиоз методов коррелятивных функций и термодинамических функционалов плотности: монография. Нордерштедт: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 с.
4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles // *Nanoscience and Technology: International Journal*. 2019. No. 10 (4). P. 365–376.
5. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Практическая реализация идеи о сокращенном описании флуктуаций поля плотности с помощью двухуровневого статистического метода // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 49–54.
6. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Волосевич З. Г. Статистическое исследование амплитудных и спектральных характеристик энергии образования флуктуаций поля плотности в наноразмерных системах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 40–46.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика: в 2 ч. М.: Наука. 1987. Ч. 1. 586 с.
8. Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 382 с.

References

1. Narkevich I. I. Abbreviated description of inhomogeneous systems based on conditional spatial density correlation functions. *Izvestiya AN BSSR* [News of the Academy of Sciences of the BSSR], series of physical and mathematical sciences, 1980, no. 5, pp 107–112 (In Russian).
2. Narkevich I. Statistical theory of nonuniform systems and reduced description in the density fluctuation theory. *Physica*, 1982, no. 112 A, pp. 167–192.
3. Narkevich I. I. *Dvukhurovnevyy statisticheskiy metod opisaniya neodnorodnykh sistem. Simbioz metodov korrelyativnykh funktsiy i termodinamicheskikh funktsionalov plotnosti* [Two-level statistical method for describing heterogeneous systems. Symbiosis of methods of correlative functions and thermodynamic functionals of density]. Norderstedt, LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 p. (In Russian).
4. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Two-level statistical description of structure of homogeneous macroscopic system and spherical crystalline nanoparticles. *Nanoscience and Technology: International Journal*, 2019, no. 10 (4), pp. 365–376.
5. Narkevich I. I., Farafontova E. V. Practical implementation of the idea of a reduced description of density field fluctuations using a two-level statistical method. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2 (260), pp. 49–54 (In Russian).
6. Narkevich I. I., Farafontova E. V., Volosevich Z. G. Statistical research of amplitude and spectral characteristics of density field fluctuations formation energy in nanosimensional systems. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (272), pp. 40–46.
7. Landau L. D., Lifshits E. M. *Statisticheskaya fizika* [Statistical physics: in 2 part], Moscow, Nauka Publ., 1987, part 1. 586 p. (In Russian).
8. Patashinsky A. Z., Pokrovsky V. L. *Fluktuatsionnaya teoriya fazovykh perekhodov* [Fluctuation theory of phase transitions]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 382 p. (In Russian).

Информация об авторах

Наркевич Иван Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: narkevich@belstu.by

Фарафонтова Елена Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

Information about the authors

Narkevich Ivan Ivanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: narkevich@belstu.by

Farafontova Elena Valer'yevna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova @belstu.by

Поступила 28.05.2024

УДК 539.1.06:539.23.234

В. В. Тульев

Белорусский государственный технологический университет

**ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ СТРУКТУР МЕТАЛЛ / КРЕМНИЙ,
ПОЛУЧЕННЫХ ИОННО-АССИСТИРУЕМЫМ ОСАЖДЕНИЕМ ПОКРЫТИЙ
В ВАКУУМЕ**

В работе обсуждаются экспериментальные результаты по изучению распределения элементов в приповерхностных слоях Me/Si-структур (Me = Ti, Zr, Mo), сформированных методом ионно-ассистируемого осаждения в вакууме. Этот метод заключается в осаждении покрытия на подложку, в процессе которого поверхность формируемой структуры облучается пучком ускоренных ионов. Время осаждения покрытий составляло 1–6 ч при ускоряющем напряжении $U = 5–10$ кВ и плотности ионного тока $\sim 4–10$ мкА/см². В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении $\sim 10^{-2}$ Па. Средняя скорость нанесения покрытия находилась в пределах 0,2–0,4 нм/мин. Отношение J_i/J_a плотности потока J_i ассистирующих ионов к плотности потока J_a нейтральных атомов составляло 0,2–0,5, что соответствует условию роста покрытия на подложке.

Состав и распределение элементов по глубине в сформированных покрытиях изучались методом резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием RUMP и методом резонансных ядерных реакций. Механические свойства поверхности сформированных структур изучались при помощи наноиндентирования, топография поверхности образцов – сканирующим атомно-силовым микроскопом.

Исследования Me/Si-структур, проведенные с применением метода резерфордовского обратного рассеяния и метода резонансных ядерных реакций, показали, что сформированные структуры содержат атомы осажденного металла (~ 5 ат. %), атомы кремния из подложки (10–15 ат. %), атомы технологических примесей углерода (20–25 ат. %), кислорода (10–15 ат. %) и водорода (30–40 ат. %). Источником технологических примесей является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса.

Установлено, что нанотвердость поверхности Me/Si-структур на глубине ~ 50 нм превышает нанотвердость чистого кремния в ~ 5 раз, а на глубине ~ 100 нм – в 3 раза. Увеличение твердости поверхности полученных структур приводит к уменьшению ее модуля Юнга в 5–10 раз. При дальнейшем увеличении глубины индентирования твердость модифицированной поверхности и модуль Юнга приближаются к характеристикам поверхности немодифицированного кремния. Исследование топографии поверхности образцов показало, что шероховатость поверхности немодифицированного кремния очень незначительна и составляет $\sim 0,2$ нм. Шероховатость сформированных Me/Si-структур увеличивается до 0,3–0,7 нм в зависимости от металла основы покрытия, а полная площадь поверхности образца практически не отличается от его проективной площади.

Ключевые слова: ионно-ассистируемое осаждение, кремний, титан, цирконий, молибден, водород, резерфордовское обратное рассеяние, метод резонансных ядерных реакций, нанотвердость.

Для цитирования: Тульев В. В. Изучение поверхности структур металл / кремний, полученных ионно-ассистируемым осаждением покрытий в вакууме // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 31–37.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-5.

V. V. Tul'ev

Belarusian State Technological University

**STUDYING THE SURFACE OF METAL / SILICON STRUCTURES, OBTAINED
BY ION-ASSISTED DEPOSITION METAL-CONTAINING COATINGS IN VACUUM**

The paper discusses experimental results on studying the distribution of elements in the near-surface layers of Me/Si structures (Me = Ti, Zr, Mo) formed by ion-assisted deposition in a vacuum. This method consists of depositing a coating onto a substrate, during which the surface of the structure being formed is irradiated with a beam of accelerated ions. The coating deposition time was (1–6) hours at an accelerating voltage $U = 5–10$ kV and an ion current density of $\sim 4–10$ μ A/cm². During the deposition of coatings, a vacuum was maintained in the working chamber at a pressure of $\sim 10^{-2}$ Pa. The average coating deposition speed was in the range of 0,2–0,4 nm/min. The ratio J_i/J_a of the flux density J_i of assisting ions to the flux density J_a of neutral atoms was 0,2–0,5, which corresponds to the condition for growth of the coating on the substrate.

The composition and depth distribution of elements in the formed coatings were studied using the Rutherford backscattering method of helium ions in combination with RUMP computer modeling and the method of resonance nuclear reactions. The mechanical properties of the surface of the formed structures were studied using nanoindentation, and the topography of the surface of the samples was studied using a scanning atomic force microscope.

Studies of Me/Si structures carried out using the Rutherford backscattering method and the method of resonant nuclear reactions showed that the formed structures contain atoms of the deposited metal (~5 at. %), silicon atoms from the substrate (10–15 at. %), atoms technological impurities of carbon (20–25 at.%), oxygen (10–15 at. %) and hydrogen (30–40 at. %). The source of process impurities is the volatile hydrocarbon fraction of the vacuum oil of a diffusion steam-oil pump.

It has been established that the nanohardness of the surface of Me/Si structures at a depth of ~50 nm exceeds the nanohardness of pure silicon by 5 times, and at a depth of ~100 nm by 3 times. An increase in the surface hardness of the resulting structures leads to a decrease in its Young's modulus by 5–10 times. With a further increase in the indentation depth, the hardness of the modified surface and Young's modulus approaches the characteristics of the surface of unmodified silicon. A study of the surface topography of the samples showed that the surface roughness of unmodified silicon is very insignificant and amounts to ~0,2 nm. The roughness of the formed Me/Si structures increases to 0,3–0,7 nm depending on the base metal of the coating, and the total surface area of the sample is practically no different from its projective area.

Keywords: ion-assisted deposition, silicon, titanium, zirconium, molybdenum, hydrogen, Rutherford backscattering, resonance nuclear reaction method, nanohardness.

For citation: Tul'ev V. V. Studying the surface of metal / silicon structures obtained by ion-assisted deposition metal-coating in vacuum. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 31–37 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-5.

Введение. Ионно-лучевое модифицирование применяют для изменения различных поверхностных свойств материалов и изделий [1–6]. Одним из таких методов является ионно-ассистируемое осаждение покрытия в вакууме. Метод заключается в нанесении покрытия на подложку при одновременном облучении поверхности формируемой структуры ускоренными ионами [2, 4–6]. Этот метод позволяет формировать поверхностные структуры с различными составом и свойствами [1–6].

В наших исследованиях для реализации этого метода использовался вакуумный электродуговой ионный источник, создающий плазму, в которой содержатся ионизированная и нейтральная фракции из материала электродов [4–6]. Нейтральная фракция испаряется во всех направлениях, и ее часть осаждается на подложку. Под действием электростатического поля, с разностью потенциалов U между подложкой и источником, ионы вытягиваются из разрядного промежутка, ускоряются и бомбардируют поверхность образца. При этом происходит процесс перемешивания атомов осаждаемого покрытия с атомами подложки, в результате чего формируется покрытие с высокой степенью адгезии к основе. В процессе такого осаждения в приповерхностных слоях образца происходят сложные физико-химические процессы, способные существенно изменить распределение элементов по глубине, а также структуру и свойства поверхности [1–6].

Целью данной работы является исследование распределения элементов по глубине в приповерхностных слоях кремния, а также механических свойств и морфологии поверхности после ионно-ассистируемого осаждения покрытий на основе Ti, Zr, Mo; установление закономерностей и особенностей процессов взаимопроникновения атомов покрытия и подложки и их влияния на свойства поверхности.

Основная часть. На пластины кремния наносились покрытия на основе металла (Ti, Zr, Mo) методом ионно-ассистируемого осаждения в вакууме. Осаждение металлосодержащих покрытий осуществлялось при ускоряющем напряжении 5–10 кВ и плотности ионного тока ~(4–5) мкА/см². Время осаждения покрытий t составляло 1–6 ч, средняя скорость нанесения покрытия находилась в пределах 0,5–2,0 нм/мин. Отношение плотности потока J_i ассистирующих ионов к плотности потока J_a нейтральных атомов составляло $J_i / J_a = 0,2–0,6$, что соответствует условию роста покрытия на подложке. В процессе осаждения покрытий в рабочей камере поддерживался вакуум при давлении $\sim 10^{-2}$ Па.

Послойный элементный анализ проводился методом резерфордовского обратного рассеяния: применялся метод резерфордовского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия с $E_0 = 1,4$ МэВ и углом рассеяния $\theta = 168^\circ$, углом влета $\theta_1 = 0^\circ$, углом вылета $\theta_2 = 12^\circ$. Энергетическое разрешение анализирующей системы составляло 15 кэВ.

Моделирование экспериментальных спектров РОР выполнялось с использованием программ RUMP [7].

Определение содержания водорода в полученных Me/Si-структурах было проведено с помощью метода резонансных ядерных реакций (ЯР). Для этого использовалась резонансная ядерная реакция при взаимодействии иона азота с атомом водорода ${}^1\text{H}({}^{15}\text{N}, \alpha\gamma){}^{12}\text{C}$. Распределение водорода по глубине было определено при сканировании поверхности образцов пучком ионов N^+ с энергией, изменяющейся в интервале 6380–7000 МэВ через 10 кэВ в зависимости от толщины анализируемого слоя.

Измерение нанотвердости и модуля Юнга в работе проводилось при помощи нанотвердомера «Fisher H100». В процессе измерений снимается кривая нагружения – разгрузка, которая в дальнейшем обрабатывается по методу Оливера – Фара [8]. В исследовании нагрузка на индентор изменялась в интервале от 0,4 до 20 мН. Глубина проникновения индентора составляла 50–300 нм. Температура при испытаниях на нанотвердость была равна $\sim 22\text{--}23^\circ\text{C}$. Общее время нагружения индентора составляло 14,5 с. Величина силы нагрузки и глубина проникновения индентора измерялись с интервалом 0,5 с. Для каждого образца было приведено 5 измерений в различных точках покрытия, после этого экспериментальные данные усреднялись.

Топография поверхности образцов изучалась на сканирующем атомно-силовом микроскопе NT 206 (АСМ).

С использованием метода РОР ионов гелия был проведен анализ элементного состава Ti/Si-, Zr/Si-, Mo/Si-структур. На рис. 1 представлены спектры РОР ионов гелия от кремниевого образца до и после осаждения покрытия на основе Zr. Анализ спектров РОР показал, что на поверхности кремния формируется покрытие (сигнал от атомов кремния сдвигается в область меньших каналов (рис. 1, кривые 1–3)). Согласно спектрам РОР, в состав покрытия входят помимо атомов осаждаемого металла (Zr), атомы технологических примесей углерода и кислорода. Об этом свидетельствуют соответствующие пики на спектрах (рис. 1). В спектрах РОР от исходного образца кремния (рис. 1, кривая 4) пики сигналов от атомов С и О не наблюдаются. Источником атомов кислорода и углерода является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного паромасляного насоса [4–6, 9]. Необходимо отметить, что в состав покрытия входят атомы кремния из подложки. Об этом свидетельствует «ступенька» от сигнала атомов кремния в области 220–235 каналов (рис. 1, кривые 1–3).

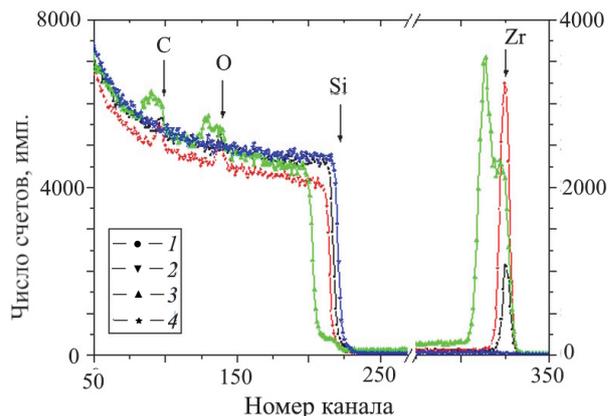


Рис. 1. Спектры РОР ионов гелия от образцов Si до и после ионно-ассистированного осаждения покрытия на основе Zr при различном времени осаждения: 1 – 1 ч; 2 – 3 ч; 3 – 6 ч; 4 – исходный образец Si

На основе данных РОР были рассчитаны слоевые концентрации компонентов в структурах Zr/Si. Данные расчетов приведены в табл. 1

Таблица 1

Слоевые концентрации компонентов в Zr/Si-структуре, рассчитанные по данным РОР

Образец	Время осаждения покрытия t , ч	Слоевая концентрация (Nt), 10^{16} атом/см 2		
		C	O	Zr
Zr/Si	1	10,0	3,7	0,5
	3	22,2	8,8	2,0
	6	76,5	41,0	6,5

Из экспериментальных данных РОР видно, что сформированные Zr/Si-структуры содержат $\sim(4\text{--}6)\%$ атомов циркония, $\sim(60\text{--}70)\%$ атомов углерода и $\sim(25\text{--}35)\%$ атомов кислорода.

На основе экспериментальных данных спектров РОР было проведено моделирование элементного состава приповерхностных слоев сформированных структур с помощью программы RUMP. На рис. 2 представлены профили распределения элементов по глубине в Mo/Si-структуре, полученной моделированием RUMP. Толщину покрытия и глубину проникновения компонентов в глубь кремния отсчитывают от положения исходной поверхности подложки, которое в структуре Me/Si установлено с использованием введенного в подложку Хе-маркера по методике, описанной в литературе [5].

Анализ результатов моделирования показывает, что в состав сформированной структуры входят: атомы осаждаемого металла (~ 5 ат. %), атомы кремния из подложки (10–15 ат. %), атомы углерода (20–25 ат. %), атомы кислорода (10–15 ат. %) и атомы водорода (30–40 ат. %).

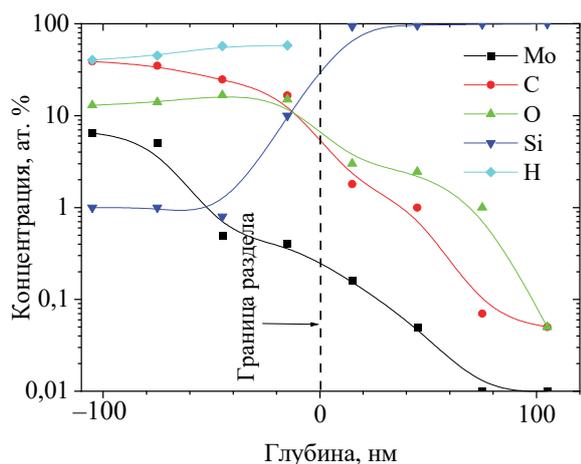


Рис. 2. Профили распределения элементов по глубине в Mo/Si-структуре

Анализ данных спектров POP и результатов моделирования RUMP Ti/Si-, Zr/Si-, Mo/Si-структур, показывает, что в состав сформированных покрытий входят атомы осажденного металла (~5–10 ат. %), атомы кремния из подложки (10–15 ат. %) и атомы технологических примесей: водорода (3–15 ат. %), углерода (20–25 ат. %) и кислорода (10–15 ат. %).

Так как метод POP ионов гелия не позволяет непосредственно определить наличие атомов водорода в образце, то содержание атомов водорода во всех сформированных Me/Si-структурах определялось методом резонансных ядерных реакций. Для этого использовалась резонансная ($\Gamma = 1,86$ кэВ) ядерная реакция при взаимодействии иона азота с атомом водорода. Для определения концентрации водорода в покрытии применялась калибровка системы [10]. Распределение водорода по глубине в приповерхностных слоях образцов было установлено с помощью сканирования поверхности образца пучком ионов N^+ с энергией, изменяющейся в интервале 6380–7000 МэВ. Для каждого образца проводилось не менее пяти последовательных сканирований поверхности.

На рис. 3 представлен профиль распределения атомов водорода по глубине в Zr/Si-структуре. Следует отметить, что толщина слоя, в котором обнаружены атомы водорода, соответствует толщине осажденного покрытия.

Результаты проведенного эксперимента с применением метода ЯР подтверждают результаты моделирования RUMP. Причем в приповерхностных слоях исходных подложек кремния атомы водорода не были обнаружены методом ЯР. Это указывает на тот факт, что атомы водорода появляются в покрытии в процессе его осаждения. Источником атомов водорода, как и атомов кислорода и углерода [4–6, 9], является летучая фракция углеводородов вакуумного масла диффузионного

паромасляного насоса. При последующих сканированиях поверхности анализирующим пучком ионов азота N^+ концентрация атомов водорода в приповерхностном слое уменьшается, а после 4-го или 5-го сканирования практически не изменяется и становится равной согласно данным эксперимента: для Ti/Si-структуры $\sim 1,4 \cdot 10^{17}$ ат/см², для Zr/Si-структуры $\sim 1,0 \cdot 10^{16}$ ат/см² и для Mo/Si-структуры $\sim 1,6 \cdot 10^{17}$ ат/см² (табл. 2).

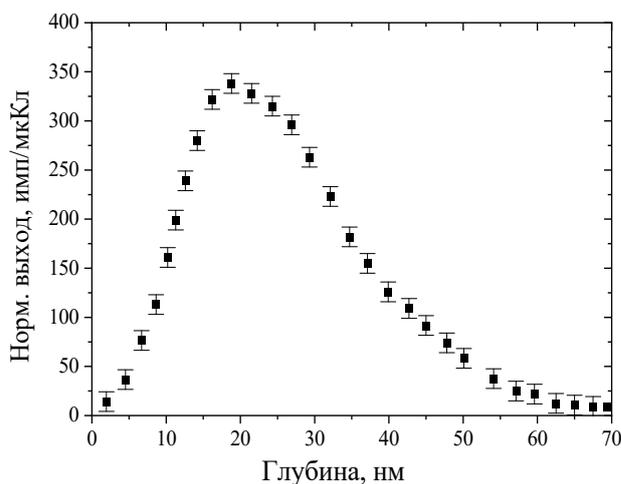


Рис. 3. Профиль распределения водорода по глубине в Zr/Si-структуре (время осаждения покрытия 1 ч)

Уменьшение концентрации атомов водорода в приповерхностных слоях сформированных структур под воздействием анализирующего пучка ионов азота N^+ можно объяснить дегазацией атомов водорода и его соединений, которые оказались химически слабо связаны с другими атомами покрытия.

Таблица 2

Содержание водорода в приповерхностных слоях Zr/Si-структуры

Число сканирований	Глубина слоя, нм	n , ат/см ³	Nt , см ⁻²	C, ат. %
Zr/Si ($t = 1$ ч)				
1	83,3	$2,10 \cdot 10^{21}$	$3,30 \cdot 10^{16}$	3,00
5		$5,73 \cdot 10^{20}$	$0,90 \cdot 10^{167}$	0,82
Zr/Si ($t = 3$ ч)				
1	143,9	$6,81 \cdot 10^{20}$	$2,00 \cdot 10^{16}$	0,97
5		$3,75 \cdot 10^{20}$	$1,10 \cdot 10^{16}$	0,54

С использованием метода наноиндентирования были определены нанотвердость и модуль Юнга приповерхностных слоев сформированных Me/Si-структур. На рис. 4 представлены графики зависимости нанотвердости (рис. 4, а) и модуля Юнга (рис. 4, б) поверхности исходного Si и структур Me/Si от глубины проникновения индентера.

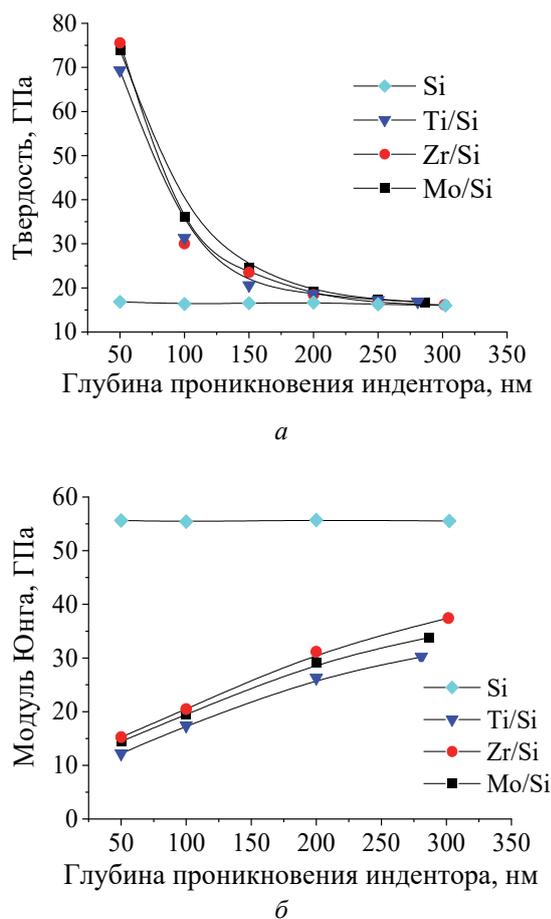


Рис. 4. Графики зависимости нанотвердости (а) и модуля Юнга (б) поверхности образцов от глубины проникновения индентора

Экспериментальные данные показывают (рис. 4, а), что при глубине ~ 50 нм нанотвердость поверхности Ti/Si-, Zr/Si- и Mo/Si-структур превышает нанотвердость исходного кремния в ~ 5 раз, а на глубине ~ 100 нм – в 3 раза. При дальнейшем увеличении глубины проникновения индентора твердость модифицированной поверхности приближается к твердости немодифицированного кремния. На рис. 4, б представлены графики зависимости модуля Юнга приповерхностных слоев сформированных Me/Si-структур от глубины индентирования. Анализ полученных данных показал, что модуль Юнга сформированных покрытий в 2,5–5 раз меньше, чем модуль Юнга немодифицированного кремния. При увеличении глубины проникновения индентора модуль Юнга покрытия приближается к значению модуля Юнга немодифицированного кремния. Уменьшение модуля Юнга свидетельствует об уменьшении упругости приповерхностных слоев образцов, что связано с увеличением твердости этих слоев.

Причинами увеличения твердости поверхности образцов является формирование в покрытиях

при ионно-ассистируемом осаждении преципитатов осаждаемых металлов, частиц оксидных и карбидных фаз, структурных радиационных дефектов [5, 11].

Топография поверхности исследуемых образцов изучалась на сканирующем атомно-силовом микроскопе (рис. 5).

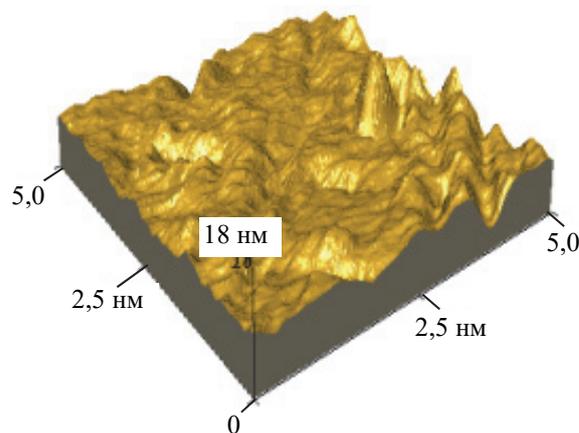


Рис. 5. 3-мерное изображение топографии поверхности Mo/Si-структуры

Результаты экспериментов показали, что средняя шероховатость исходного образца кремния очень незначительна и составляет $\sim 0,2$ нм, а полная площадь исследуемого фрагмента практически не отличается от проективной площади. Шероховатость сформированных Me/Si-структур увеличивается до 0,7–1,1 нм в зависимости от металла основы покрытия (рис. 5). Шероховатость образующихся структур Me/Si увеличивается до 0,3–0,7 нм в зависимости от металла основы покрытия, а общая площадь поверхности образца практически не отличается от его проективной площади.

Заключение. Методом ионно-ассистируемого осаждения металлосодержащих покрытий получены Ti/Si-, Zr/Si- и Mo/Si-структуры. Время осаждения покрытий составляло 1–6 ч при ускоряющем напряжении $U = 5–10$ кВ и плотности ионного тока $\sim 4–10$ мкА/см². В рабочей камере в процессе осаждения покрытий поддерживался вакуум при давлении $\sim 10^{-2}$ Па.

Исследования поверхности полученных Me/Si-структур, проведенные с применением метода резерфордского обратного рассеяния в сочетании с моделированием RUMP и метода резонансных ядерных реакций, показали, что сформированные структуры содержат атомы осаждаемого металла (~ 5 ат. %), атомы кремния из подложки (10–15 ат. %), атомы технологических примесей углерода (20–25 ат. %), кислорода (10–15 ат. %) и водорода (30–40 ат. %). Источником технологических примесей является летучая фракция углеводородов вакуумного

масла диффузионного паромасляного насоса.

Методом наноиндентирования установлено, что нанотвердость поверхности Ti/Si-, Zr/Si- и Mo/Si-структур на глубине ~50 нм превышает нанотвердость исходного кремния в ~5 раз, а на глубине ~100 нм – в 3 раза. Увеличение твердости поверхности полученных структур приводит к уменьшению ее модуля Юнга в 5–10 раз. При дальнейшем увеличении глубины индентирования твердость модифицированной поверхности и модуль Юнга приближается к характеристикам поверхности не модифицированного кремния.

Исследование топографии поверхности образцов при помощи атомно-силового микроскопа показало, что шероховатость поверхности немодифицированного кремния очень незначительна и составляет ~0,2 нм, а полная площадь фрагмента практически не отличается от его проективной площади. Шероховатость сформированных Me/Si-структур увеличивается до 0,3–0,7 нм в зависимости от металла основы покрытия, а общая площадь поверхности образца практически не отличается от его проективной площади.

Список литературы

1. Анализ механических характеристик поверхностных слоев никеля с напыленной пленкой алюминия после ионно-лучевого перемешивания / А. А. Шушков [и др.] // Химическая физика и мезоскопия. 2021. Т. 3, № 1. С. 46–57.
2. Ташлыкова-Бушкевич И. И., Столяр И. А. Нанорельеф поверхности тонких пленок сплавов Al–Mn и Al–Ni при ионно-ассистируемом осаждении на стекло // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2023. № 3. С. 23–39.
3. Влияние ионно-лучевой обработки на структуру и свойства пленок оксида титана / А. К. Габова [и др.] // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2022. № 5. С. 42–50.
4. Тульев В. В. Изучение поверхности структур металл – титан, полученных ионно-ассистируемым нанесением металлосодержащих покрытий // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2018. № 2 (212). С. 67–70.
5. Изучение металлосодержащих (Ti, Co) покрытий, осажденных на кремний при ионном ассистировании, ядерно-физическими методами / О. Г. Бобрович [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 2006. № 1. С. 54–58.
6. Тульев В. В. Влияние ионно-ассистируемого осаждения металлосодержащих покрытий на содержание водорода в Cr/Si-, Ti/Si- и Zr/Si-структурах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2020. № 2 (236). С. 85–88.
7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.
8. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments // Journal of Materials Research. 1992. Vol. 7, no. 6. P. 1564–1583.
9. Тульев В. В. Состав Ti/Si- и Co/Si-структур, сформированных ионно-ассистируемым осаждением // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2022. № 2 (260). С. 60–64.
10. ^{15}N Doppler spectroscopy of ^1H on diamond / S. Jan [et al.] // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1994. Vol. B85. P. 321–325.
11. Структурно-фазовые изменения в алюминии при последовательной имплантации ионов углерода и азота / В. В. Углов [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 2000. № 2. С. 12–16.

References

1. Shushkov A. A., Bykov P. V., Vorob'ev V. L., Vakhrushev A. V., Bayankin V. Ya. Analysis of mechanical characteristics of surface layers of nickel with a sputtered aluminum film after ion-beam mixing. *Himicheskaya fizika i mezoskopiya* [Chemical Physics and Mesoscopy], 2021, vol. 3, no. 1, pp. 46–57 (In Russian).
2. Tashlykova-Bushkevich I. I., Stoliar I. A. Nanorelief of the surface of thin films of Al–Mn and Al–Ni alloys upon ion-assisted deposition on glass. *Poverkhnost'. Rentgenovskiyе, sinkhrotronnyye i neytronnyye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2023, no. 3, pp. 23–39 (In Russian).
3. Gabova A. K., Krylov P. N., Zakirova R. M., Fedotova I. V. Influence of ion beam processing on the structure and properties of titanium oxide films. *Poverkhnost'. Rentgenovskiyе, sinkhrotronnyye i neytronnyye issledovaniya* [Journal of Surface Investigation: X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques], 2022, no. 5, pp. 42–50 (In Russian).
4. Tul'ev V. V. Study of the surface of metal – titanium structures obtained by the ion-beam assisted deposition of metal-containing coating. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2 (212), pp. 67–70 (In Russian).

5. Bobrovich O. G., Tul'ev V. V., Tashlykov I. S., Barayshuk C.M. The study of metal-containing (Ti, Co) coatings deposited on silicon with ion-assisted nuclear-physical methods. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

6. Tul'ev V. V. Effect of ion-assisted deposition of metal-containing coatings on the hydrogen content in Cr/Si-, Ti/Si- and Zr/Si-structures. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2020, no. 2 (236), pp. 85–88 (In Russian).

7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–234.

8. Oliver W. C., Pharr G. M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research*, 1992. vol. 7, no. 6, pp. 1564–1583.

9. Tul'ev V. V. Composition of Ti/Si and Co/Si structures formed by ion-assisted deposition. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2022, no. 2 (260), pp. 60–64 (In Russian).

10. Jan S., Kalbitzer S., Oberschachtsiek P., Sellschop J. P. F. ^{15}N Doppler spectroscopy of ^1H on diamond. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1994, vol. B85, pp. 321–325.

11. Uglov V. V., Cherenda N. N., Danilyuk A. L., Khodasevich V. V. Structural and phase changes in aluminum upon sequential implantation of carbon and nitrogen ions. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 2000, no. 2, pp. 12–16 (In Russian).

Информация об авторе

Тульев Валентин Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tvv69@mail.ru

Information about the author

Tul'ev Valentin Valentinovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tvv69@mail.ru

Поступила 18.04.2024

УДК 543.42+535.34

Л. Л. Гладков¹, Г. А. Гладкова²¹Белорусская государственная академия связи²Военная академия Республики Беларусь**ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ИК-СПЕКТРА ДИКАТИОНА ТЕТРАОКСОПОРФИРИНА**

Целью настоящей работы является анализ колебательных состояний дикатиона тетраоксопорфирина и интерпретация ИК-спектра на основе квантовомеханического расчета методом функционала плотности.

Методом функционала плотности выполнен расчет геометрической структуры, нормальных колебаний и интенсивностей в ИК-спектре дикатиона тетраоксопорфирина. Предложена интерпретация ИК-спектра этого соединения. Показано, что замещение пиррольных колец фурановыми приводит к существенным изменениям частот и формы ряда плоских валентных скелетных колебаний и выходов атомов водорода из плоскости макроцикла.

Связи C_aO значительно изменяются в колебаниях с вычисленными значениями частот 927, 963, 1230, 1304 и 1351 см⁻¹. Наибольшую амплитуду они имеют в нормальном колебании с частотой 1230 см⁻¹. Колебания выхода из плоскости макроцикла атомов водорода фурановых колец отнесены к ИК-полосе 819 см⁻¹, что более чем на 100 см⁻¹ выше, чем частота колебания аналогичной формы у порфина или его металлокомплексов.

Ключевые слова: дикатион тетраоксопорфирина, ИК-спектры, расчет нормальных колебаний, метод функционала плотности.

Для цитирования: Гладков Л. Л., Гладкова Г. А. Интерпретация ИК-спектра дикатиона тетраоксопорфирина // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 38–42.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-6.

L. L. Gladkov¹, G. A. Gladkova²¹Belarusian State Academy of Communications²Belarusian Military Academy**INTERPRETATION OF THE IR SPECTRUM OF TETRAOXOPORPHYRIN DICATION**

The aim of this work is to analyze the vibrational states of the tetraoxoporphyrin dication and an interpretation of the IR spectrum based on quantum mechanical calculation using the density functional method.

The geometric structure, normal vibrations and intensities in the IR spectrum of tetraoxoporphyrin dication were calculated using the density functional method. An interpretation of the IR spectrum of this compound is proposed. It has been shown that the replacement of pyrrole rings with furan ones leads to significant changes in the frequencies and modes of a number of in-plane stretching skeletal vibrations and the out-of-plane vibrations of hydrogen atoms. The C_aO bonds are significantly changed in vibrations with calculated frequency values of 927, 963, 1230, 1304, and 1351 cm⁻¹.

They have the greatest amplitude in the normal vibration with a frequency of 1230 cm⁻¹. Out-of-plane mode of the hydrogen atoms of furan rings are assigned to the IR band of 819 cm⁻¹, which is more than 100 cm⁻¹ higher than the frequency of a similar vibration of porphine or its metal complexes.

Keywords: tetraoxoporphyrin dication, IR spectra, normal coordinate calculations, DFT calculations.

For citation: Gladkov L. L., Gladkova G. A. Interpretation of the IR Spectrum of tetraoxoporphyrin dication. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 38–42 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-6.

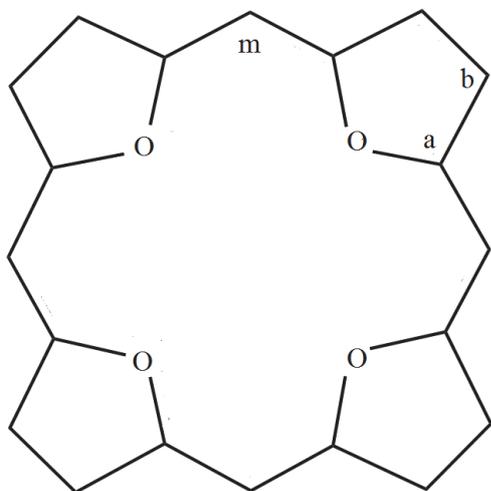
Введение. Среди большого числа биологически активных соединений особое место занимает класс молекул, содержащих тетрапиррольные хромофоры. Не случайно за этими соединениями закрепился термин «пигменты жизни». Например, молекулы хлорофилла и феофитина являются важнейшими компонентами хлоропластов, уникальных преобразователей световой энергии в химическую.

Другие молекулы этого класса, железопорфирины типа гема, являющиеся составной частью гемопротеинов, участвуют во многих

окислительно-восстановительных процессах, протекающих в живых организмах. Кроме того, порфирины находят новые применения в медицине при лечении онкологических и лучевых заболеваний, причем существенно, что их родство с биологическими пигментами обуславливает их нетоксичность. Существуют применения тетрапирролов в технике, и есть все основания полагать, что область этих применений будет расширяться. Так, молекулы этого класса соединений являются катализаторами для ряда химико-

технологических процессов и перспективными объектами для молекулярной электроники.

Все описанные функции указанных соединений несомненно связаны со строением их молекул, которое необходимо изучать методами экспериментальной и теоретической спектроскопии. В этих соединениях четыре пиррольных кольца объединены в макроцикл с разветвленной π -электронной системой. Представляет интерес исследовать спектральные изменения при замене пирролов пятичленными циклами с другими гетероатомами. К таким соединениям относятся тетраоксопорфирины (рисунок), у которых пиррольные кольца заменены фурановыми. Тем более, что по своему строению они являются промежуточным звеном между свободными основаниями порфиринов и их металлокомплексами.



Структурная формула дикатиона тетраоксопорфирина и обозначения атомов углерода

Ранее в работе [1] выполнены расчеты частот и интенсивностей линий резонансного КР (РКР) при возбуждении в В-полосу поглощения методом DFT/TDDFT. Согласно вычислениям, структура данного соединения плоская и принадлежит к точечной группе симметрии D_{4h} , как и металлопорфирины с расположением атома металла в плоскости макроцикла. Длина связей C_aO равна 1,357 Å, что заметно меньше рассчитанной длины связи C_aN Zn-порфирина и порфина (~1,370 Å [2]). Также короче и связи C_aC_b и C_aC_m (1,421 и 1,386 Å) по сравнению с 1,455 и 1,395 Å (соответственно [2]).

В работе [3] были зарегистрированы ИК-спектры в области 400–1600 cm^{-1} и спектры КР дикатиона тетраоксопорфирина при длине волны возбуждения 785 и 514 нм. Методом функционала плотности оптимизирована геометрическая структура этого соединения и некоторых изоэлектронных порфиринов. Вычисленные длины связей отличаются в сторону больших значений (1,366, 1,421, 1,391, 1,377 Å для

C_aO , C_aC_b , C_aC_m и C_bC_b связей соответственно). Результаты расчетов колебательных частот сравниваются с экспериментальными значениями. Однако форма колебаний не приводится. Кроме того, отнесение ряда линий РКР в работе [1] вызывает сомнения.

В настоящей работе представлен анализ колебательных состояний дикатиона тетраоксопорфирина и интерпретация ИК-спектра на основе квантовомеханического расчета методом функционала плотности.

Основная часть. Для расчета геометрии и колебательных состояний использовался обменно-корреляционный функционал BPE и трехэкспонентный базисный набор 3z по алгоритму, реализованному в квантово-химической программе [4]. Процесс оптимизации геометрии был остановлен, когда компоненты градиента энергии не превышали 10^{-6} . Затем были проведены расчеты нормальных колебаний и интенсивностей в ИК-спектрах. Отсутствие мнимых значений частот свидетельствует о достижении стационарной точки при оптимизации геометрии молекул. Масштабирование вычисленных частот не производилось.

Результаты наших расчетов длин связей и углов между связями согласуются с данными работы [3] (1,375, 1,420, 1,392, 1,377 Å для C_aO , C_aC_b , C_aC_m и C_bC_b связей соответственно). По сравнению с рассчитанными данными для Zn-порфина [2] отметим уменьшение связей C_aC_b (1,445 Å), C_aC_m (1,396 Å) и удлинение связей C_bC_b (1,363 Å).

Следует отметить, что у дикатиона тетраоксопорфирина вычисленное расстояние между противоположными атомами кислорода равно 4,138 Å, тогда как согласно нашим расчетам у свободного основания порфина расстояние между атомами азота пиррольных колец составляет 4,054 Å. Эта величина также больше, чем данные расчетов аналогичного расстояния для ряда металлокомплексов порфина [5]. Увеличение размеров центральной полости макроцикла мы связываем с большей электроотрицательностью атомов кислорода (3,44) по сравнению с атомами азота (3,04). Это приводит к увеличению углов между связями метиновых мостиков $C_aC_mC_a$ до 130° , тогда как вследствие жесткой структуры пиррольных колец и фурановых колец углы C_aOC_a , как и углы C_aNC_a Zn-порфина, имеют одинаковую величину (107°).

Перейдем к рассмотрению колебательных состояний. В ИК-спектрах могут проявляться только 17 плоских колебаний E_u типа симметрии и 5 неплоских A_{2u} колебаний. Сопоставление теоретических частот с экспериментальными из работы [3] для колебаний этих типов симметрии дано в таблице. Для описания формы плоских

колебаний приведены наибольшие изменения длин связей и углов в порядке их уменьшения. В таблицу не включены частоты валентных колебаний СН связей ввиду отсутствия экспериментальных данных.

Отнесение частот колебаний E_u - и A_{2u} -типов симметрии дикатиона тетраоксопорфирина, см^{-1} , активных в ИК-спектрах

$\nu_{\text{теор}}$	$\nu_{\text{эксп}}$	Отнесение
E_u -колебания		
1572	1569	$C_a C_m, \delta(C_m H)$
1493	1495	$C_b C_b, C_a C_m, C_a O C_a$
1442	1446	$C_b C_b, C_a C_b, \delta(C_b H)$
1351	–	$C_a O, C_b C_b, \delta(C_m H)$
1304	–	$C_a C_b, C_a C_m, C_a C_b C_b, \delta(C_b H)$
1230	1221	$C_a O, C_a C_m C_a, C_a O$
1135	1149	$C_a C_b, C_a O, \delta(C_b H), \delta(C_m H)$
1063	1049	$\delta(C_b H), C_b C_b$
963	972	$C_a O, C_a C_b$
927	936	$C_a C_b, C_a O$
788	798	$C_a C_b C_b, C_a O C_a$
729	739	$C_b C_a O, C_a O C_a$
354	–	$C_b C_a C_m, C_a C_b H$
285	–	$O C_a C_m, C_a C_m C_a$
A_{2u} -колебания		
864	900	$\rho(C_m H), \rho(C_m)$
778	819	$\rho(C_b H), \rho(C_m H)$
679	696	$\rho(C_a O)$
314	–	$\rho(C_m), \rho(H_m)$
98	–	$\rho(O), \rho(C_b)$

Примечание. Обозначение формы колебаний: δ – плоское деформационное колебание; ρ – выход атома или связи из плоскости макроцикла.

Обсуждение нормальных колебаний целесообразно проводить в сравнении с аналогичными колебаниями порфина и его металлокомплексов, информация о которых систематизирована и обобщена в работе [6].

Среди скелетных валентных колебаний наибольшие частоты имеют колебания связей $C_a C_m$. Его частота 1569 см^{-1} лишь слегка выше частоты аналогичного колебания Zn-порфина (1558 см^{-1}) [7]. Однако это не означает, что замена атомов кислорода на азоты не влияет на метиновые мостики. Частота четного колебания связей $C_a C_m$ типа симметрии B_{1g} 1653 см^{-1} [1] близка по значению соответствующей частоте Ni-порфина 1650 см^{-1} [8] и на 81 см^{-1} отличается от частоты E_u колебания. Это существенно больше разницы в соответствующих частотах металлокомплексов порфина, составляющей примерно 50 см^{-1} . Отсюда следует, что силовые постоянные метиновых мостиков изменяются у катиона тетраоксопорфирина.

Частота колебания с заметным участием связей $C_b C_b$ имеет слегка меньшее значение –

1495 см^{-1} по сравнению с частотой аналогичного колебания Zn-порфина – 1517 см^{-1} , что согласуется с таким же изменением мод четных типов симметрии. По-видимому, это обусловлено уменьшением силовых постоянных указанных связей вследствие их удлинения.

Связи $C_a O$ заметно участвуют в колебаниях с вычисленными значениями частот $927, 963, 1230, 1304$ и 1351 см^{-1} . Расчет показывает, что все они имеют низкую активность за исключением первого колебания, которое дает наиболее интенсивную ИК-полосу. В данной моде смещение атомов кислорода перпендикулярно связям $C_b C_b$ и вызывает существенное изменение углов $C_a O C_a$. Связи $C_a O$ имеют наибольшую амплитуду в колебании с частотой 1230 см^{-1} .

Можно предположить, что плоские деформационные колебания атомов водорода $\delta(CH)$ исследуемого дикатиона будут слабо изменяться по сравнению с металлокомплексами порфина. Действительно, $\delta(C_b H)$ сопоставлена с ИК-полосой 1049 см^{-1} , $\delta(C_m H)$ – с полосой 1149 см^{-1} . У Zn-порфина эти колебания имели частоты 1052 см^{-1} и 1151 см^{-1} [7]. Поэтому вызывает сомнение отнесение линии РКР 1124 см^{-1} к колебанию $\delta(C_b H)$ типа симметрии B_{1g} [1]. Возможно, линия 1051 см^{-1} , зарегистрированная при длине волны возбуждения 785 нм , относится к колебанию данного типа симметрии, а не к полностью симметричному, как предположено в источнике [1].

Для сравнения низкочастотных колебаний следует использовать данные для молекулы порфина, так как наличие металла в значительной степени формирует нормальные колебания в этой области спектра. Частоты плоских деформационных скелетных колебаний дикатиона тетраоксопорфирина с частотами до 850 см^{-1} слабо изменяются по сравнению с порфином. Так, частотам четных колебаний $104, 137, 304, 420, 725$ и 805 см^{-1} [1] (вычисленные значения) соответствуют колебания порфина сходной формы с частотами $98, 155, 305, 420, 721$ и 812 см^{-1} [9]. Это связано с тем, что небольшие изменения в силовых постоянных деформационных координат слабо сказываются на частотах колебаний, в которых группы атомов движутся в одном направлении.

Результаты расчета неплоских колебаний оказались в определенной степени неожиданными. Ранее колебание $\rho(C_b H)$ выхода из плоскости макроцикла атомов водорода на пиррольных кольцах было отнесено к ИК-полосе около 700 см^{-1} Cu-порфина, колебание $\rho(C_m H)$ – к полосе около 850 см^{-1} [10]. У дикатиона тетраоксопорфирина колебание с рассчитанной частотой 679 см^{-1} и сопоставленное с полосой 696 см^{-1} представляет собой симметричное складывание пиррольного кольца, в котором наибольшую амплитуду

имеют смещения атомов кислорода из плоскости макроцикла. А выходы из указанной плоскости водородов фурановых колец участвуют в колебании с частотой примерно на 100 см^{-1} больше. Частота колебания $\rho(\text{C}_m\text{H})$ также имеет более высокое значение и сопоставлена с полосой 900 см^{-1} [3].

Заключение. Методом функционала плотности оптимизирована геометрия дикациона

тетраоксопорфирина, рассчитаны частоты и форма их нормальных колебаний. Предложена интерпретация ИК-спектра этого соединения. Показано, что замещение пиррольных колец фурановыми приводит к существенным изменениям частот и формы ряда плоских валентных скелетных колебаний и выходов атомов водорода из плоскости макроцикла.

Список литературы

1. Theoretical study on the resonance Raman spectra of tetraoxaporphyrin dication by TDDFT calculation / G.-b. Wang [et al.] // *Chines J. Chem. Phys.* 2015. Vol. 28, no. 45. P. 563–571.
2. Verdal N., Kozlowski P. M., Hudson. Inelastic neutron scattering spectra of free base and zinc porphines: a comparison with DFT-based vibrational analysis // *J. Chem. Phys. A.* 2005. Vol. 109, no. 25. P. 5724–5733.
3. Structural and vibrational properties of tetraoxaporphyrin dication, the oxygen analogue of porphyrin, and of isoelectronic diprotonated porphyrin / I. Jelovica [et al.] // *J. Phys. Chem. Part A.* 2005. Vol. 109, no. 44. P. 9935–9944.
4. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets // *Chem. Phys. Lett.* 1997. Vol. 281, no. 1. P. 151–156.
5. Kozlowski P. M., Bingham J. R., Jarzecki A. A. Theoretical Analysis of Core Size Effect in Metalloporphyrins // *J. Phys. Chem. A.* 2008. Vol. 112, no. 50. P. 12781–12788.
6. Гладков Л. Л. Молекулярная структура и колебательная спектроскопия тетрапиррольных соединений. Минск: БГАС, 2023. 216 с.
7. Scaled quantum mechanical and experimental vibrational spectra of magnesium and zinc porphyrins / A. A. Jarzecki [et al.] // *Spectrochim. Acta.* 1997. Vol. 53A, no. 8. P. 1195–1209.
8. DFT-SQM force field for nickel porphine: intrinsic ruffling / P. M. Kozlowski [et al.] // *J. Phys. Chem. A.* 1999. Vol. 103, no. 10. P. 1357–1366.
9. Березин К. В., Нечаев В. В. Расчет частот плоских колебаний молекулы порфина // *Журн. прикл. спектр.* 2002. Т. 69, № 6. С. 699–703.
10. Experimental and theoretical investigation of infrared spectra of porphin, its deuterated derivatives and their metal complexes / L. L. Gladkov [et al.] // *J. Mol. Struct.* 1978. Vol. 47. P. 463–493.

References

1. Wang G.-b., Zhao H.-q., Wang W.-l., Chen D.-m. Theoretical study on the resonance Raman spectra of tetraoxaporphyrin dication by TDDFT calculation. *Chines J. Chem. Phys.* 2015, vol. 28, no. 45, pp. 563–571.
2. Verdal N., Kozlowski P. M., Hudson. Inelastic neutron scattering spectra of free base and zinc porphines: a comparison with DFT-based vibrational analysis. *J. Chem. Phys. A*, 2005, vol. 109, no. 25, pp. 5724–5733.
3. Jelovica I., Moroni L., Gellini C., Salvi P. R. Structural and vibrational properties of tetraoxaporphyrin dication, the oxygen analogue of porphyrin, and of isoelectronic diprotonated porphyrin. *J. Phys. Chem., part A*, 2005, vol. 109, no. 44, pp. 9935–9944.
4. Laikov D. N. Fast evaluation of density functional exchange-correlation terms using the expansion of the electron density in auxiliary basis sets. *Chem. Phys. Lett.*, 1997, vol. 281, no. 1, pp. 151–156.
5. Kozlowski P. M., Bingham J. R., Jarzecki A. A. Theoretical Analysis of Core Size Effect in Metalloporphyrins. *J. Phys. Chem. A*, 2008, vol. 112, no. 50, pp. 12781–12788.
6. Gladkov L. L. *Molekulyarnaya struktura i kolebatel'naya spektroskopiya tetrapirrol'nykh soyedineniy* [Molecular structure and vibrational spectroscopy of tetrapyrrole compounds]. Minsk, BSAC Publ., 2023. 216 p. (In Russian).
7. Jarzecki A. A., Kozlowski P. M., Pulay P., Ye B. H., Li X.Y. Scaled quantum mechanical and experimental vibrational spectra of magnesium and zinc porphyrins. *Spectrochim. Acta*, 1997, vol. 53A, no. 8, pp. 1195–1209.
8. Kozlowski P. M., Rush III T. S., Jarzecki A. A., Zgierski M., Chase B., Piffat C., Ye B. H., Li X.Y., Pulay P., Spiro T. G. DFT-SQM force field for nickel porphine: intrinsic ruffling. *J. Phys. Chem. A*, 1999, vol. 103, no. 10, pp. 1357–1366.
9. Berezin K. V., Nechaev V. V. Calculation of Plane Vibration Frequencies of the Porphin Molecule. *Zhurnal prikladnoy spektroskopii* [Journ. Appl. Spectr.], 2002, vol. 69, no. 6, pp. 699–803 (In Russian).

10. Gladkov L. L., Gradyshko A. T., Shulga A. M., Solovyov K. N., Starukhin A. S. Experimental and theoretical investigation of infrared spectra of porphin, its deuterated derivatives and their metal complexes. *J. Mol. Struct.*, 1978, vol. 47, pp. 463–493.

Информация об авторах

Гладков Лев Львович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры физических и математических основ информатики. Белорусская государственная академия связи (220114, г. Минск, ул. Франциска Скорины, 8/2, Республика Беларусь). E-mail: llglad@tut.by

Гладкова Галина Александровна – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Военная академия Республики Беларусь (220057, г. Минск, пр. Независимости, 220, Республика Беларусь). E-mail: llglad@tut.by

Information about the authors

Gladkov Lev L’vovich – DSc (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor, the Department of Physical and Mathematical Foundations of Informatics. Belarusian State Academy of Communications (8/2, Francysk Skaryna str., 220114, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: llglad@tut.by

Gladkova Galina Aleksandrovna – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian Military Academy (220, Nezavisimosti Ave, 220057, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: llglad@tut.by

Поступила 26.04.2024

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS

УДК 628.3:621.3

**И. В. Войтов, В. Н. Штепа, В. В. Смелов,
Д. С. Карпович**

Белорусский государственный технологический университет

ОЦЕНКА СТЕПЕНИ АВТОМАТИЗАЦИИ И ВНЕДРЕНИЯ ЦИФРОВЫХ ПЛАТФОРМ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ ВОДООТВЕДЕНИЯ

В статье обоснована актуальность использования цифровых решений при строительстве (модернизации, реконструкции) водопроводно-канализационных хозяйств Республики Беларусь на основе технологий интернета вещей, включающих виртуальное представление реальных объектов, аппаратно-программных моделирующих решений с использованием искусственного интеллекта, систем распределенной и удаленной передачи информации.

Функциональное моделирование с учетом многофакторности и нелинейности колебания параметров объектов управления продемонстрировало необходимость увеличения уровня автоматизации технологических процессов с целью координации действий различных установок и повышения их эффективности, особенно при рисках техногенных чрезвычайных ситуаций.

В результате расчета и анализа степени автоматизации водоотведения была обоснована актуальность создания цифровой платформы управления водоотведением, в котором объектом может выступать как вся система, так и отдельные элементы систем водоотведения.

Сформулированы планируемые результаты функционирования такой платформы, среди которых основными являются: соблюдение нормативов государственных социальных стандартов по обслуживанию населения в области ВКХ при обеспечении экологической безопасности функционирования систем водоотведения и систем очистки сточных вод, повышение экономичности их функционирования на различных этапах жизненных циклов и выполнение требований экологии.

Ключевые слова: водопроводно-канализационное хозяйство, водоотведение, автоматизация, цифровое моделирование.

Для цитирования: Войтов И. В., Штепа В. Н., Смелов В. В., Карпович Д. С. Оценка степени автоматизации и внедрения цифровых платформ управления системами водоотведения // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 43–52.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-7.

I. V. Voitau, V. N. Shtepa, V. V. Smelov,
D. S. Karpovich
Belarusian State Technological University

ASSESSMENT OF THE DEGREE OF AUTOMATION AND IMPLEMENTATION OF DIGITAL PLATFORMS FOR MANAGING WASTEWATER TRANSPORTATION SYSTEMS

The article substantiates the relevance using digital solutions in the construction (modernization, reconstruction) water supply and sewerage facilities of the Republic of Belarus based on Internet of Things technologies, including virtual representations real objects, hardware and software modeling solutions using artificial intelligence, distributed and remote information transmission systems.

Functional modeling taking into account the multifactorial and nonlinear nature parameter fluctuations demonstrated the need to increase the level of automation technological processes in order to coordinate the actions various installations and increase their efficiency, especially in case of risks man-made emergency situations.

Calculation and analysis of the degree automation wastewater disposal, existing and necessary, substantiated the relevance creating methodological and information and communication support for a digital platform for managing wastewater disposal.

The planned results of the functioning such platform are formulated, among which the main ones are: compliance with state social standards for serving the population in the field of water and wastewater services while ensuring the environmental safety of the functioning water disposal systems and wastewater treatment systems, increasing the efficiency their functioning at various stages life cycles and compliance with environmental safety requirements.

Keywords: water supply and sewerage, water disposal, automation, digital modeling.

For citation: Voitau I. V., Shtepa V. N., Smelov V. V., Karpovich D. S. Assessment of the degree of automation and implementation of digital platforms for managing wastewater transportation systems. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematic. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 43–52 (In Russian). DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-7.

Введение. Целью Государственной программы «Цифровое развитие Беларуси» на 2021–2025 гг. определено обеспечение внедрения информационно-коммуникационных и передовых производственных технологий в отрасли национальной экономики и сферы жизнедеятельности общества.

В ее рамках выполняются мероприятия по созданию (развитию) современной информационно-коммуникационной инфраструктуры, внедрению цифровых инноваций в отраслях экономики, в том числе технологий «умных городов». Важной технологической частью последней подпрограммы выступает использование программных продуктов для обеспечения комфортной и безопасной среды жителей населенных пунктов.

В Беларуси накоплен большой положительный опыт построения, реконструкции и эксплуатации систем водоснабжения и водоотведения [1, 2], позволяющий прояснить общие принципы устройства таких систем: унифицировать перечень применяемого технологического оборудования, определить параметры и методы мониторинга состояния систем и показателей их эффективности, сформулировать организационные структуры и методы управления системами. В современных условиях опыт может быть реализован в форме цифровой платформы – информационной системы, обеспечивающей поддержку деятельности систем водоснабжения и водоот-

ведения. На рис. 1 схематически представлена архитектура цифровой платформы водопроводно-канализационного хозяйства (ВКХ).

Структурно цифровая платформа представляет собой набор систем (на рис. 1 это S_1, S_2, S_3, S_4), взаимодействующих между собой через специализированную систему SYSTEM-BUS. Кроме того, внешние системы OTHER SYSTEMS взаимодействуют с системами платформы тоже с помощью SYSTEM-BUS. Каждая система состоит из одного или нескольких программных модулей (на рис. 1 это $M1.1, M1.2, \dots, M3.2$). Подключенное к платформе технологическое оборудование представлено в системе их цифровыми двойниками (A, B, C), к экземплярам которых может быть подсоединено реальное оборудование ($A1, A2, \dots, C1$). Взаимодействие систем платформы с цифровыми двойниками и внешними пользователями ($U1$) осуществляется через специализированную систему FRONT-BUS.

Функциональность систем платформы разбивается на три уровня (FRONT, MIDDLE, BACK).

Уровень FRONT предназначен для взаимодействия с внешними устройствами и пользователями. Уровень MIDDLE служит для поддержки функций управления, настройки, анализа, оценки рисков и безопасности. Уровень BACK представляет функции учета, сбора статистики, мониторинга состояния.

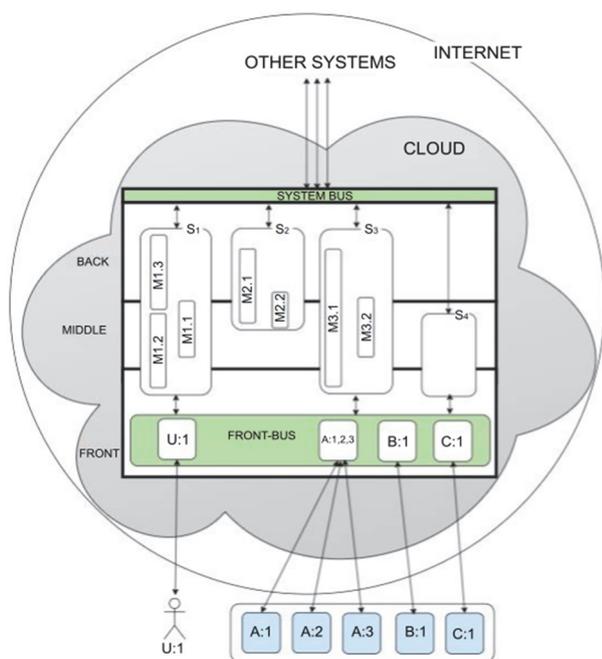


Рис. 1. Архитектура цифровой платформы ВКХ

Предполагается, что цифровая платформа развернута в облачной системе (CLOUD), а коммуникация с системами, модулями, цифровыми двойниками, пользователями и технологическим оборудованием осуществляется в рамках сети Интернет.

Перспективными направлениями в отечественном ВКХ являются технологии IoT (интернета вещей), а также системы виртуального представления реальных объектов, аппаратно-программных моделирующих решений на основе использования искусственного интеллекта, систем распределенной и удаленной передачи информации – фактически, разработки цифровых двойников (цифровых теней) [3–5] технологических узлов и процессов водоотведения коммунальных и промышленных объектов.

Основная часть. Целью исследований является обоснование технологической целесообразности создания и функциональных задач цифровой платформы управления водоотведением коммунально-промышленными объектами.

Обоснование методики исследований. Центральное место в цифровой платформе управления системам водоотведения занимает система контроля экологической безопасности коммунального водоотведения. На стадии создания концептуальной модели этой системы целесообразно применение методологии IDEF0 [6] – приемов функционального моделирования и графической нотации. IDEF0-модель системы выглядит как «черный ящик» со входами, выходами, управлением и механизмом, который постепенно уточняется до необходимого уровня детализации. Описание методологии IDEF0 содержится в рекомендациях Р 50.1.028–2001 «Информационные технологии поддержки жиз-

ненного цикла продукции. Методология функционального моделирования» [7]. Методология применяется при проектировании информационных систем и предназначена для графического описания структуры, функций и выполняющихся в рамках этих систем процессов.

Анализ применяемых в системах коммунального водоотведения технологий [8–10] позволил сформулировать следующие компоненты IDEF0-модели:

- *входящие факторы* (данные поступают от измерительных средств, лабораторного анализа и экспертов): качество сточных вод отдельных абонентов, качество сточных вод на входе в очистные сооружения, расход СВ, состояние оборудования;
- *управляющие факторы*: нормативные требования к абонентам и сбросу в природные водоемы, стоимость ресурсов, паспортные характеристики оборудования;
- *механизмы*: технологическое оборудование (например, насосы, задвижки, контроллеры, воздухоудовки);
- *результаты*: показатели экологической безопасности и ресурсозатратности системы.

Функциональное моделирование систем водоотведения. На рис. 2 приведена контекстная диаграмма системы контроля экологической безопасности водоотведения.

Проведя функциональную декомпозицию (разделение) первого уровня, раскрыв контекстную диаграмму (см. рис. 1), можно получить детализацию процесса экологического контроля системы водоотведения (рис. 2).

Полученные результаты (см. рис. 2 и 3) указывают на иерархичность и многофакторность системы водоотведения, что требует соответствующих подходов при ее управлении. Также с учетом нестационарности и нелинейности колебания параметров [11] можно рассматривать компьютерно-интегрированную систему как эффективное средство согласования работы различных технологических установок и повышение их эффективности, особенно при рисках чрезвычайных ситуаций [12].

Расчет уровня автоматизации водоотведения и анализ путей его повышения. Исходя из того что технологической основой цифровизации процессов является их автоматизация, для оценки фактического состояния внедрения соответствующих средств выполнили оценку уровня автоматизации, где такой показатель P определяется на основе декомпозиции всего действия по управлению на отдельные функции. Для каждой i -й функции задается коэффициент важности γ_i , который выявляет ее значимость в общем процессе, и оценивается степень автоматизации данной функции. Коэффициент γ_i и оценка оптимального значения степени автоматизации $\beta_{\text{юпт}}$ определяются с помощью экспертных оценок.



Рис. 2. Контекстная диаграмма системы контроля экологической безопасности водоотведения

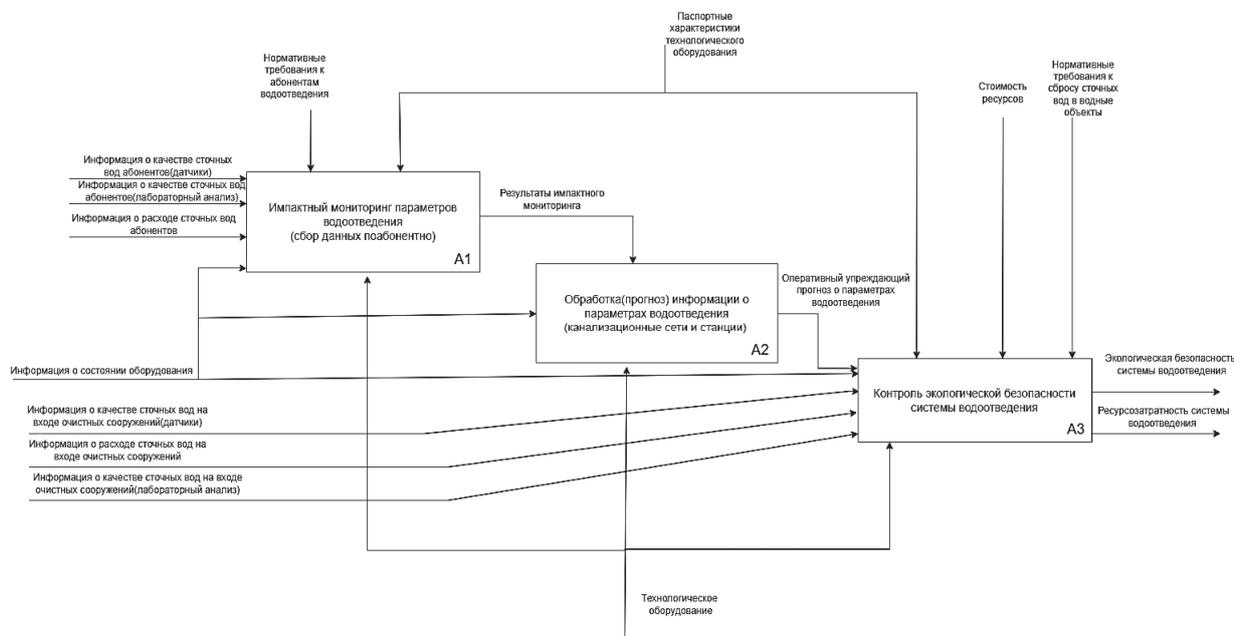


Рис. 3. Диаграмма декомпозиции контекстной диаграммы экологического контроля водоотведения

Параметр P получают на основе декомпозиции всего действия по управлению на отдельные функции и рассчитывают как среднее для всех подфункций, отнесенное к важности степени их автоматизации:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}, \quad (1)$$

где β_i – оценка степени автоматизации.

Показатель соответствия ρ_i степени автоматизации i -й функции определяется по формуле

$$\rho_i = \frac{\beta_i}{\beta_{i \text{ опт}}} \cdot 100\%. \quad (2)$$

Переход к общему показателю

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i}. \quad (3)$$

Таким образом, чтобы рассчитать значение показателя P , необходимо иметь следующие данные:

- список функций системы (с использованием методологии IDEF0);

– коэффициенты важности функций γ_i (экспертная оценка);

– оценку степени автоматизированности функций β_i и их оптимальные значения $\beta_{i\text{опт}}$ (согласно паспортным данным и экспертной оценке).

Описанные выше данные целесообразно представить в виде таблицы (табл. 1), в которой перечень функций составляется на базе описания действующей системы автоматизации водоотведения.

Оценим степень автоматизированности процессов-функций (см. рис. 2, табл. 1):

– «Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения»;

– «Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения»;

– «Контроль экологической безопасности системы водоотведения».

Ключевым ограничением автоматизации функции «Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения» является критическое отсутствие измерительных средств, способных работать в оперативном режиме (максимально приближенном к режиму реального времени) – не более 30% от технологических потребностей, при этом на основе исследований установлено, что степень наблюдаемости увеличивается путем косвенного анализа инструментально определяемых параметров с использованием подходов математического моделирования [13, 14].

Функция «Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения» на данный момент фактически не выполняется в автоматическом режиме – такую оценку могут давать только эксперты-технологи; подзадача предиктирования

не решается даже на концептуальном уровне. Процесс «Контроль экологической безопасности системы водоотведения» является наиболее управляемым в результате того, что он локализован на очистных сооружениях (подфункции: «Расчет управляющих воздействий», «Выполнение очистки сточных вод», «Корректировка управляющих воздействий») и его оптимизация выступает задачей специализированных систем управления, как правило, уровня SCADA-решений с дальнейшей передачей информации на автоматизированные системы более высокого уровня иерархии.

Например, для реализации наиболее автоматизированной функции «Контроль экологической безопасности системы водоотведения» значение β_3 определяется следующим образом:

$$\beta_3 = \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\beta_{3\gamma} n_{3\gamma}}{n_{33}} = 0,26. \quad (4)$$

Тогда согласно формуле (2)

$$\rho_3 = \frac{\beta_3}{\beta_{3\text{опт}}} \cdot 100\% = 43\%. \quad (5)$$

Аналогично рассчитываем для других функций действующей и планируемой цифровизированной систем водоотведения остальные параметры уровня автоматизации (табл. 2).

Расчет фактического уровня автоматизации:

$$P = \frac{\sum_{i=1}^3 \beta_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i} = \frac{1 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,43}{1 + 0,9 + 1} = 0,28. \quad (6)$$

Таблица 1

Исходные данные для расчета потребности автоматизации коммунального водоотведения

Функция	γ_i	Количество подфункций	Формула для расчета	$\beta_{i\text{опт}}$
Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения	1	1	$\beta_1 = \frac{n_{1\gamma}}{n_{13}},$ где $n_{13}, n_{1\gamma}$ – общее и автоматически измеряемое γ -м способом количество параметров	0,5
Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения	0,9	1	$\beta_2 = \sum_{\gamma=1}^2 \frac{\beta_{2\gamma} n_{2\gamma}}{n_{23}},$ где $n_{23}, n_{2\gamma}$ – общее и автоматически измеряемое γ -м способом количество параметров	0,8
Контроль экологической безопасности системы водоотведения	1	3	$\beta_3 = \sum_{\gamma=1}^3 \frac{\beta_{3\gamma} n_{3\gamma}}{n_{33}},$ где $n_{33}, n_{3\gamma}$ – общее и автоматически измеряемое γ -м способом количество параметров	0,6

Расчет планируемого уровня автоматизации:

$$P_{\text{пл}} = \frac{\sum_{i=1}^3 \beta_i \gamma_i}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i} = \frac{1 \cdot 0,5 + 0,9 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,6}{1 + 0,9 + 1} = 0,63. \quad (7)$$

Тогда в процентном выражении разница между расчетным планируемым (желаемым) уровнем автоматизации и расчетным фактическим составляет: $63 - 28 = 35\%$. Соответственно, необходимо как минимум в 2,25 раза улучшить данный интегральный показатель управляемости системы водоотведения.

Таблица 2

Уровни автоматизации действующей и цифровизируемой системы водоотведения

Реализация функций	Объем реализации функции, %	γ_i	β_i	$\beta_{i \text{ опт}}$	ρ_i
Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения: – общее количество измеряемых	100	1,0	0,3	0,5	30
– количество измеряемых вручную	70	1,0	0,3	0,5	30
После цифровизации	100	1	0,5	0,5	50
Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения	10	0,9	0,1	0,8	10
После цифровизации	80	0,9	0,8	0,8	80
Контроль экологической безопасности системы водоотведения: – приборы по месту	40	1	0,43	0,6	43
– централизованный контроль	30	1	0,43	0,6	43
– с сигнализацией отклонений	30	1	0,43	0,6	43
После цифровизации	100	1	0,6	0,6	60

Анализ табл. 1 и 2, функций (6) и (7) позволяет сделать вывод, что для повышения системного уровня автоматизации до планируемого наибольшее внимание действительно необходимо уделить этапу «Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения». Вторым по значимости увеличения значения фор-

мулы (6) до уровня (7) является «Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения»; на третьем месте стоит «Контроль экологической безопасности системы водоотведения».

В то же время «Импактный экологический мониторинг параметров водоотведения» требует разработки значительного количества абсолютно новых измерительных средств, способных работать энергонезависимо в режиме реального времени в агрессивных условиях, что выходит за рамки прикладных задач цифровизации водоотведения.

Следовательно, в настоящее время существует актуальная потребность в создании методического и информационно-коммуникационного обеспечения цифровой платформы управления водоотведением коммунальных и промышленных объектов (ЦПУВ КПО), которая бы реализовывала прежде всего функцию «Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения».

Обоснование задач цифровой платформы управления водоотведением. В рамках исследований термин «цифровая платформа» трактуется как адаптивная информационная система реального времени, включающая в себя помимо традиционных обеспечений (аппаратного, математического, системного, программного организационного и ряда других) специализированные компоненты и механизмы, предназначенные для постоянного эволюционного развития: включение новых объектов анализа и управления и постоянное расширение функциональности, интеграция с другими решениями и синтез новых подсистем, миграция на новые программно-аппаратные платформы.

Соответственно, цифровая платформа управления водоотведением коммунальных и промышленных объектов – механизм цифровой трансформации предприятий ВКХ, предусматривающий в перспективе замену объектов управления их цифровыми образами (цифровыми двойниками, цифровыми тенями) с превращением цифровой платформы в цифровую экосистему (информационную систему, представляющую собой комплекс взаимосвязанных сервисов (электронных услуг), покрывающих более 90% функций организаций водопроводно-канализационных хозяйств).

Целью функционирования ЦПУВ КПО будет повышение экономической эффективности и экологической безопасности функционирования систем водоотведения ВКХ на различных жизненных циклах путем использования современных информационно-коммуникационных технологий на основе IoT (интернета вещей), систем обработки и интеллектуального анализа данных, экспертных систем и систем поддержки принятия решений, систем виртуализации реальных объектов.

Планируемые результаты использования ЦПУВ КПО:

- соблюдение нормативов государственных социальных стандартов по обслуживанию населения в области ВКХ при обеспечении экологической безопасности функционирования систем водоотведения и систем очистки сточных вод;
- повышение экономической эффективности функционирования ВКХ на различных этапах жизненных циклов;
- уменьшение ресурсо- и энергозатрат;
- повышение оперативности принятия управленческих решений;
- повышение оперативности и распределенный контроль качества сточных вод в узлах систем водоотведения;
- снижение рисков чрезвычайных ситуаций антропогенного характера в водных объектах за счет прогнозирования и выявления мест их потенциального возникновения;
- масштабирование цифровых двойников (цифровых теней) базовых технологических узлов систем водоотведения на другие коммунальные и промышленные объекты.

Тогда в результате выполнения исследований предприятия ВКХ (в целом) получают (рис. 4):

- методический аппарат практического внедрения, использования и масштабирования ЦПУВ КПО;
- методику внедрения на предприятиях ВКХ цифровых двойников (цифровых теней) технологических узлов систем водоотведения согласно подходам «Цифровой водоканал»;
- программное обеспечение цифровых двойников (цифровых теней) технологических узлов систем водоотведения (в соответствии с ГОСТ Р 57700.37–2021 «Компьютерные модели и моделирование. Цифровые двойники изделий. Общие положения»);
- учебно-методическое обеспечение для повышения квалификации и переподготовки специалистов с использованием решений ЦПУВ КПО.

Такой теоретический базис позволит:

- создать эффективную систему управления объектами водоотведения, включая очистку сточных вод;
- повысить ресурсо- и энергоэффективность технологических процессов;
- обеспечить экологическую безопасность системы водоотведения, включая оптимизацию функционирования очистных сооружений;
- качественно планировать операции и выполнять работы по техническому обслуживанию и ремонту агрегатов, оборудования и других составляющих элементов систем водоотведения;
- обеспечить раннее реагирование на потенциальные чрезвычайные ситуации техногенного характера и недопущение их возникнове-

ния на объектах ВКХ, например в случаях попадания залповых концентраций загрязнителей на очистные сооружения;

- системно практико-ориентированно обучать персонал современным цифровым решениям.

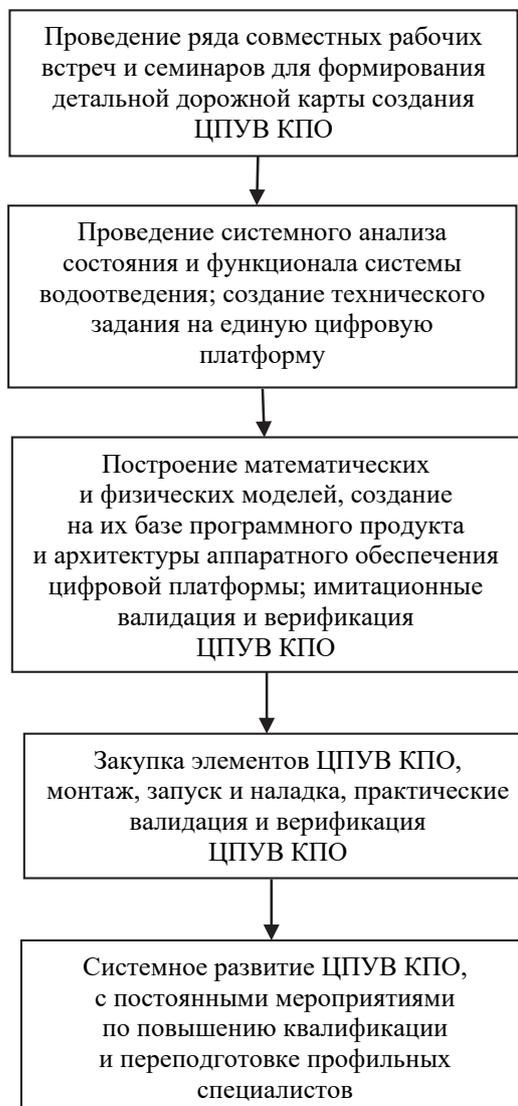


Рис. 4. Последовательность внедрения цифровой платформы управления водоотведением коммунально-промышленных объектов

Органы власти, проектные организации и структуры экспертизы получают:

- методический аппарат (рекомендации) для анализа обоснованности финансовых вложений в структуры предприятий ВКХ;
- методический аппарат (рекомендации) для усовершенствования нормативной базы проектирования, экспертизы и эксплуатации объектов ВКХ, в том числе с учетом требований цифровизации процессов в них;
- единую информационную систему для оперативного и удаленного контроля за состоянием качества сброса сточных вод в природные

водные объекты (при дальнейшем масштабировании результатов проекта в рамках государства);

– методический базис для выполнения региональных проектов «Умный город» (в разрезе создания цифровой экосреды водоотведения и экологической безопасности водных ресурсов) в рамках Государственной программы «Цифровое развитие Беларуси».

Заключение. Оценка Государственной программы «Цифровое развитие Беларуси» на 2021–2025 гг., в разрезе внедрения информационно-коммуникационных технологий в сферы жизнедеятельности общества позволяет сделать заключение о целесообразности создания ЦПУВ КПО и ее внедрения в подпрограмму «Умный город».

Использование методологии IDEF0 при функциональном моделировании процессов водоотведения продемонстрировало сложную иерархичность и многофакторность такого технологического комплекса, что обосновывает применение компьютерно-интегрированной системы как эффективного средства согласования работы различных установок и повышения их эффективности, особенно при рисках чрезвычайных ситуаций.

Анализ уровня автоматизации, т. е. в процентном выражении разницы между расчетным планируемым (желаемым) уровнем автоматизации и рас-

четным фактическим, составляет 35%, таким образом обосновывается актуальность создания методического и информационно-коммуникационного обеспечения цифровой платформы управления водоотведением коммунальных и промышленных объектов (ЦПУВ КПО), которая бы реализовывала прежде всего функцию «Обработка (прогноз) информации о параметрах водоотведения».

Соответственно, цифровая платформа управления водоотведением коммунальных и промышленных объектов выступит в роли эффективного механизма цифровой трансформации предприятий ВКХ, предусматривающего в перспективе замену объектов управления их цифровыми образами (цифровыми двойниками, цифровыми тенями), с превращением цифровой платформы в цифровую экосистему (информационную систему, представляющую собой комплекс взаимосвязанных сервисов (электронных услуг), покрывающих более 90% функций организаций водоводно-канализационных хозяйств).

Дальнейшие исследования перспективно нацелить на создание адекватных математических моделей элементов и многофакторных процессов систем водоотведения, которые выступят базисом для разработки соответствующего программного обеспечения.

Список литературы

1. Станкевич А. П. Водная стратегия Республики Беларусь на период до 2030 года // Водные ресурсы и климат: материалы V Междунар. водного форума, Минск, 5–6 окт. 2017 г.: в 2 ч. Минск, 2017. Ч. 1. С. 26–27.
2. Войтов И. В. Научные основы рационального управления и охраны водных ресурсов: монография. Минск: БГУ, 2000. 386 с.
3. Семячков К. А. Трансформация общественного сектора в условиях цифровой экономики // Журнал экономической теории. 2018. Т. 15, № 3. С. 545–548.
4. Gartner Identifies the Top 10 Strategic Technology Trends for 2019. URL: <https://www.gartner.com/en/newsroom/press-releases/2018-10-15-gartner-identifies-the-top-10-strategic-technology-trends-for-2019> (date of access: 17.01.2024).
5. Grieves M., Vickers J. Digital Twin: Mitigating Unpredictable, Undesirable Emergent Behavior in Complex System // Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems. Springer, 2017. P. 85–113.
6. Information Integration for Concurrent Engineering (IICE) Compendium Of Methods Report. URL: <https://www.cs.tcd.ie/Andrew.Butterfield/Teaching/CS4098/IDEF/IDEFcompendium.pdf> (date of access: 17.01.2024).
7. Информационные технологии поддержки жизненного цикла продукции. Терминологический словарь. Часть 1. Стадии жизненного цикла продукции: Р 50.1.031–2001. М.: Изд-во стандартов, 2001. 28 с.
8. Шаршунов В. А. Очистка сточных вод и утилизация их отходов: пособие. Минск: Мисанта, 2020. 642 с.
9. Грудяева Е. К., Душин С. Е., Кузьмин Н. Н. Динамические модели управляемых биохимических процессов очистки сточных вод // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 9. С. 732–737.
10. Алексеев Е. В., Викулина В. Б., Викулин П. Д. Основы моделирования систем водоснабжения и водоотведения: учеб. пособие. М.: Изд-во МИСИ – МГСУ, 2017. 126 с.
11. Ладанюк А. П., Плужников Л. Н., Трегуб В. Г. Проектирование, монтаж и эксплуатация систем автоматизации в пищевой промышленности. М.: Агропромиздат, 1991. 352 с.

12. Штепа В. Н., Шикунец А. Б. Инновационные технологии очистки многокомпонентных водных растворов с противодействием чрезвычайным ситуациям техногенного происхождения // *Природная асыроддзе Палесся і перспектывы развіцця: зб. навук. прац. Брэст, 2022. Вып. 14. С. 184–187.*

13. Штепа В. Н., Шикунец А. Б., Золотых Н. Ю. Управление эколого-энергетической эффективностью водопроводно-канализационных хозяйств // *Научно-технический прогресс в жилищно-коммунальном хозяйстве: сб. тр. Минск, 2022. С. 209–215.*

14. Weijers S. R. *Modelling, Identification and Control of Activated Sludge Plants for Nitrogen Removal.* Eindhoven: Techn. Univ., 2000. 235 p.

15. Штепа В. Н. Концептуальные основы энергоэффективной системы управления комбинированными системами водоочистки // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энергет. объединений СНГ.* 2016. № 5. С. 479–487.

References

1. Stankevich A. P. Water Strategy of the Republic of Belarus for the period up to 2030. *Vodnyye resursy i klimat: materialy V Mezhdunarodnogo vodnogo foruma* [Water resources and climate: materials at the International Water Forum]. Minsk, 2017, pp. 26–27 (In Russian).

2. Voitau I. V. *Nauchnyye osnovy ratsional'nogo upravleniya i okhrany vodnykh resursov* [Scientific foundations of rational management and protection of water resources]. Minsk, BSU Publ., 2000. 386 p. (In Russian).

3. Semyachkov K. A. Transformation of the public sector in the digital economy. *Zhurnal ekonomicheskoy teorii* [Journal of Economic Theory], 2018, vol. 15, no. 3, pp. 545–548 (In Russian).

4. Gartner Identifies the Top 10 Strategic Technology Trends for 2019. Available at: URL: <https://www.gartner.com/en/newsroom/press-releases/2018-10-15-gartner-identifies-the-top-10-strategic-technology-trends-for-2019> (accessed 17.01.2024).

5. Grieves M., Vickers J. Digital Twin: Mitigating Unpredictable, Undesirable Emergent Behavior in Complex System. *Transdisciplinary Perspectives on Complex Systems.* Springer, 2017, pp. 85–113.

6. Information Integration for Concurrent Engineering (IICE) Compendium of Methods Report. Available at: <https://www.cs.tcd.ie/Andrew.Butterfield/Teaching/CS4098/IDEF/IDEFcompendium.pdf> (accessed 17.01.2024).

7. R 50.1.031–2001. Continouos acquisition and life-cycle support. Glossary. Part 1. Product life-cycle stages. Moscow, Izdatel'stvo Standardov Publ., 2001. 28 p. (In Russian).

8. Sharshunov V. A. *Ochistka stochnykh vod i utilizatsiya ikh otkhodov* [Digitization of stock felts and the utility of their waste]. Minsk, Misanta Publ., 2020. 642 p. (In Russian).

9. Gruzdeva E. K., Dushin S. E., Kuzmin N. N. Dynamic models of controlled biochemical processes of wastewater treatment. *Izvestiya vyzov. Priborostroyeniye* [News of higher educational institutions. Instrumentation], 2015, vol. 58, no. 9, pp. 732–737 (In Russian).

10. Alekseev E. V., Vikulina V. B., Vikulin P. D. *Osnovy modelirovaniya system vodosnabzheniya i vodoootvedeniya* [Fundamentals of modeling water supply and sanitation systems]. Moscow, Izdatel'stvo MISI – MGSU Publ., 2017. 126 p. (In Russian).

11. Ladanjuk A. P., Pluzhnikov L. N., Tregub V. G. *Proyektirovaniye, montazh i ekspluatatsiya system avtomatizatsii v pishchevoy promyshlennosti* [Design, installation and operation of automation systems in the food industry]. Moscow, Agropromizdat Publ., 1991. 352 p. (In Russian).

12. Shtepa V. N., Shikunec A. B. Innovative technologies for purification of multicomponent aqueous solutions with counteraction to emergency situations of man-made origin. *Pryrodnaye asyrodдзе Palesyya i perspektyvy razvitsyya: zbornik navukovykh prats* [Natural environment of Polesie and development prospects: collection of scientific papers]. Brest, 2022, vol. 14, pp. 184–187 (In Russian).

13. Shtepa V. N., Shikunec A. B., Zolotyh N. Ju. Management of ecological and energy efficiency of water supply and sewerage facilities. *Nauchno-technicheskiy progress v zhilishchno-kommunal'nom khozyaystve: sbornik trudov* [Scientific and technical progress in housing and communal services: proceedings]. Minsk, 2022, pp. 209–215 (In Russian).

14. Weijers S. R. *Modelling, Identification and Control of Activated Sludge Plants for Nitrogen Removal.* Eindhoven, Techn. Univ., 2000. 235 p.

15. Shtepa V. N. Conceptual foundations of an energy-efficient control system for combined water treatment systems. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh ob'yedineniy SNG* [Energetics. News higher educational institutions and energy associations of the CIS], 2016, no. 5, pp. 479–487 (In Russian).

Информация об авторах

Войтов Игорь Витальевич – доктор технических наук, профессор, ректор. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: rector@belstu.by

Штепа Владимир Николаевич – доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tppoless@gmail.com

Смелов Владимир Владиславович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: smw@belstu.by

Карпович Дмитрий Семенович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Information about the authors

Voitau Igar Vital'yeovich – DSc (Engineering), Professor, Rector. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: rector@belstu.by

Shtepa Vladimir Nikolaevich – DSc (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Life Safety. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tppoless@gmail.com

Smelov Vladimir Vladislavovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: smw@belstu.by

Karpovich Dzmitry Semenovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Поступила 15.05.2024

УДК 681.51

Д. С. Карпович. Т. П. Фокин

Белорусский государственный технологический университет

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $(1 - W(p))$ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
ПРИ ПОМОЩИ РЕАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ЗВЕНА
И АПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗВЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В данной публикации рассмотрено представление функции $(1 - W(p))$ с запаздыванием в виде реального дифференцирующего звена и последовательного соединения со звеном второго порядка. В статье показано влияние изменения величины запаздывания и постоянной времени объекта на точность аппроксимации.

Особенностью реализации данного способа является большое запаздывание у функции $W(p)$, которое делает управление и предсказание поведения подобных функций сложной задачей. Произведен анализ целесообразности и достаточной точности данной аппроксимации. Представлены особенности реализации, требуемые для соответствия исходной и аппроксимируемой функций.

Созданы функции для анализа влияния на ошибку аппроксимации параметров передаточных функций. Также приведена модель, сравнивающая поведение функции $(1 - W(p))$ с ее представлением в виде реального дифференцирующего звена и звена второго порядка при различных параметрах изначальной функции, и зависимость ошибки аппроксимации от запаздывания и постоянной времени данной функции.

Определены оптимальные параметры исходной функции, при которых аппроксимация наиболее точно повторяет поведение оригинальной функции, в качестве уравнения зависимости между постоянной времени и запаздыванием функции. Построена плоскость распространения ошибки аппроксимации относительно параметров изначальной функции.

Ключевые слова: аппроксимация, передаточная функция, ошибка аппроксимации, звено второго порядка с запаздыванием.

Для цитирования: Карпович Д. С., Фокин Т. П. Аппроксимация функции $(1 - W(p))$ с запаздыванием при помощи реально дифференцирующего звена и апериодического звена второго порядка // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 53–57.
DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-8.

D. S. Karpovich. T. P. Fokin

Belarusian State Technological University

**APPROXIMATION OF THE $(1 - W(p))$ FUNCTION USING A REAL
DIFFERENTIATING TRANSFER FUNCTION AND A SECOND-ORDER
APERIODIC TRANSFER FUNCTION**

This paper considers the representation of the function $(1 - W(p))$ with delay in the form of a real differentiating link and serial connection with the second-order link. The article shows the influence of changing the value of the delay and time constant of the object on the accuracy of approximation.

The peculiarity of the implementation of this method is a large delay of the function $W(p)$, which makes the control and prediction of the behaviour of such functions a difficult task. The feasibility and sufficient accuracy of this approximation are analysed. The implementation features required to match the original and approximated functions are presented.

Functions are created to analyse the influence of transfer function parameters on the approximation error. A model comparing the behaviour of the function $(1 - W(p))$ with its representation in the form of a real differentiating transfer function and a second-order transfer function at different parameters of the original function and the dependence of the approximation error on the delay and time constant of this function is also given.

The optimal parameters of the original function, at which the approximation most accurately repeats the behaviour of the original function, are determined as the equation of dependence between the time constant and delay of the function. The plane of propagation of the approximation error with respect to the parameters of the original function is constructed.

Keywords: approximation, transfer function, approximation error, second-order delayed transfer function with delay.

For citation: Karpovich D. S., Fokin T. P. Approximation of the $(1 - W(p))$ function using a real differentiating transfer function and a second-order aperiodic transfer function. *Proceedings of BSTU, issue. 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 53–57 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-8.

Введение. При управлении сложными объектами с большими запаздываниями зачастую требуется выполнение функции $(1 - W(p))$ для синтеза предиктора или системы управления в целом. Данная функция имеет сложности при реализации, обусловленные в том числе и большим запаздыванием функции $W(p)$.

Основная часть. Разность $(1 - W(p))$ зачастую сложна в реализации обратной связи или проста в виде элемента синтезируемой системы управления, и по этой причине для реализации сложных схем вроде предикторов часто прибегают к ее представлению в ином виде. Рассмотрим вариант, в котором нам необходимо получить функцию $(1 - W(p))$ путем аппроксимации звена запаздывания реально-дифференцирующим элементом [1].

Для этого исходную передаточную функцию со звеном чистого запаздывания

$$W_{зд}(p) = \frac{1 \cdot e^{-\tau_{зд}p}}{T_{зд}^2 p^2 + 2T_{зд}\xi_{зд}p + 1},$$

где $\tau_{зд}$ – величина чистого запаздывания; $T_{зд}$ – постоянная времени исходной передаточной функции; $\xi_{зд}$ – коэффициент демпфирования, можно представить в виде последовательного соединения реального дифференцирующего звена и звена второго порядка вида:

$$1 - W_{зд}(p) \cong \frac{kp}{T_{д}p + 1} \cdot \frac{1}{T_{д}^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где коэффициенты аппроксимирующей функции связаны с параметрами исходной функции следующими зависимостями:

$$k = 2T_{зд}\xi_{зд} + \tau_{зд};$$

$$T_{д} = \frac{0,5\tau_{зд} - T_{зд}^2}{\frac{2T_{зд}\xi_{зд}}{\tau_{зд}} + 1};$$

$$T_2 = T_{зд}; \quad T_1 = 2T_{зд}\xi_{зд}.$$

При этом следует выделить важное условие для изначальной системы, которое должно выполняться для корректной аппроксимации запаздывания:

$$T_{зд}^2 < 0,5\tau_{зд}^2. \quad (1)$$

Исходная функция $(1 - W(p))$ имеет переходную характеристику следующего вида (рис. 1) [1].

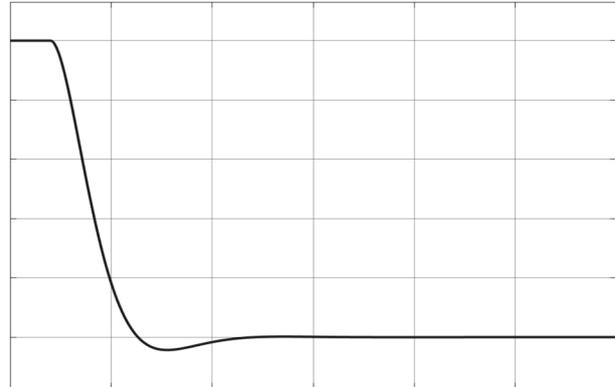


Рис. 1. График переходной характеристики исходной передаточной функции с запаздыванием

При этом аппроксимированная функция будет обладать переходной характеристикой вида, представленного на рис. 2.

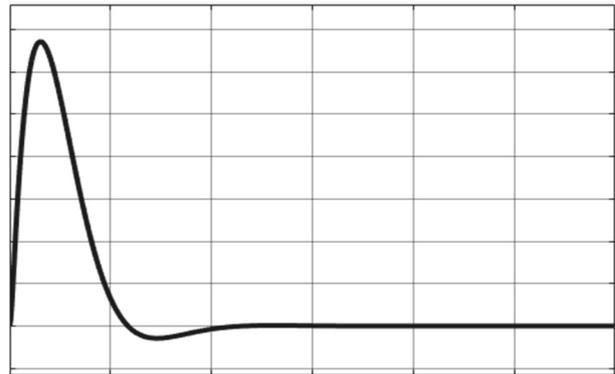


Рис. 2. График переходной характеристики аппроксимированной функции

Как можно заметить, у данных переходных характеристик есть отличия. Если сравнить площади под кривыми, представленными на рис. 1 и 2, можем получить следующие графики (рис. 3, 4) [2].

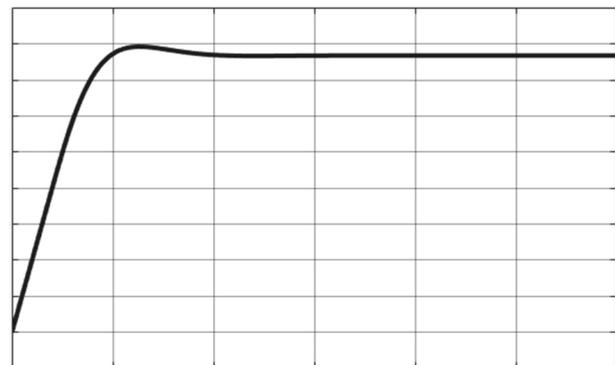


Рис. 3. График интеграла переходной характеристики исходной передаточной функции

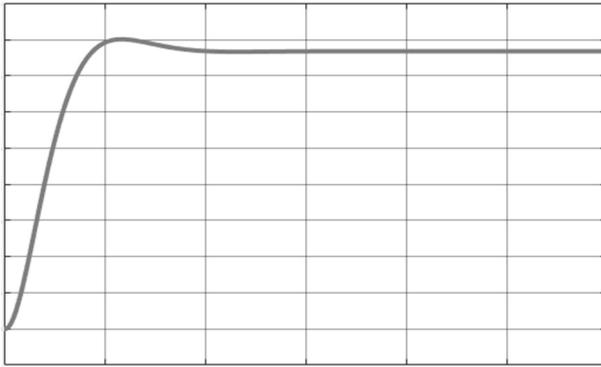


Рис. 4. График интеграла переходной характеристики аппроксимированной передаточной функции

Проанализировав рис. 3 и 4, можно сделать вывод, что площади подынтегральных кривых близки друг другу. Это подобие еще больше проявляется, если совместить эти графики на одной координатной плоскости, как показано на рис. 5.

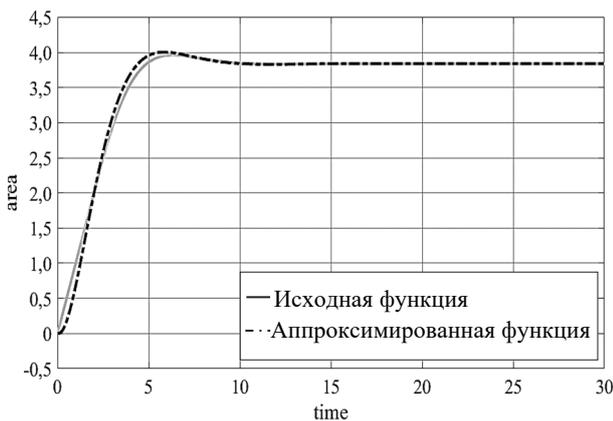


Рис. 5. Графики интегралов переходных характеристик исходной и аппроксимированной передаточных функций

Определим, какое влияние оказывают величины параметров исходного объекта на ошибку аппроксимации. Для этого произведем ряд симуляций с изменением одного параметра при неизменных иных параметрах и построим графики изменения модуля ошибки площади под кривой [3].

При изменении запаздывания график модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины чистого запаздывания $\tau_{зд}$ меняется в соответствии с видом, представленным на рис. 6.

Данные, приведенные на рис. 6, были получены для передаточной функции $W_{зд}(p)$ следующего вида:

$$W_{зд}(p) = \frac{1 \cdot e^{-\tau_{зд}p}}{1,99^2 p^2 + 2,828p + 1},$$

где $\tau_{зд}$ изменялось в диапазоне от 4 до 25 с.

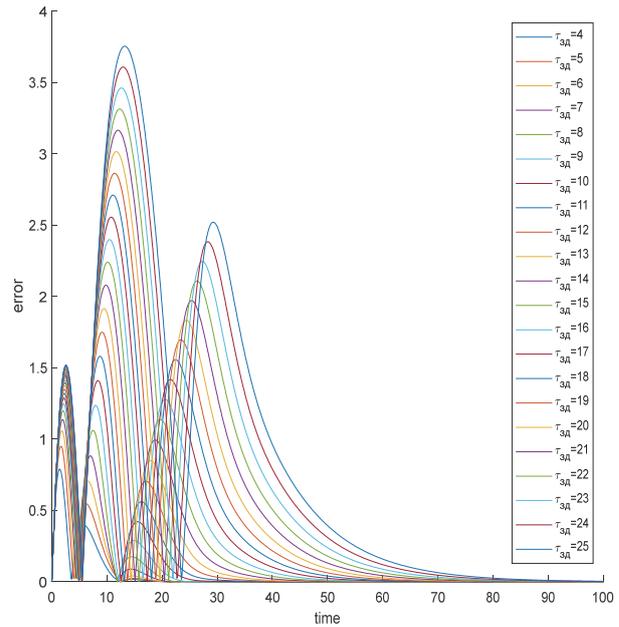


Рис. 6. График изменения модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины чистого запаздывания $\tau_{зд}$

Анализ рис. 6 позволяет сделать вывод, что увеличение запаздывания $\tau_{зд}$ влечет за собой рост ошибки на первом и втором пиках в примерно равных пропорциях, но при этом приводит лишь к небольшому смещению этих двух пиков в течение нескольких десятков секунд [4].

При изменении постоянной времени объекта $T_{зд}$ график модуля ошибки площадей под кривой меняется в соответствии с графиком, представленным на рис. 7.

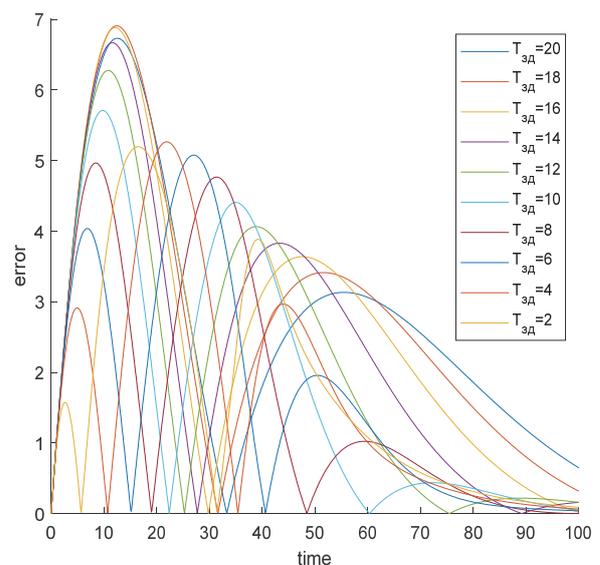


Рис. 7. График изменения модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины постоянной времени объекта

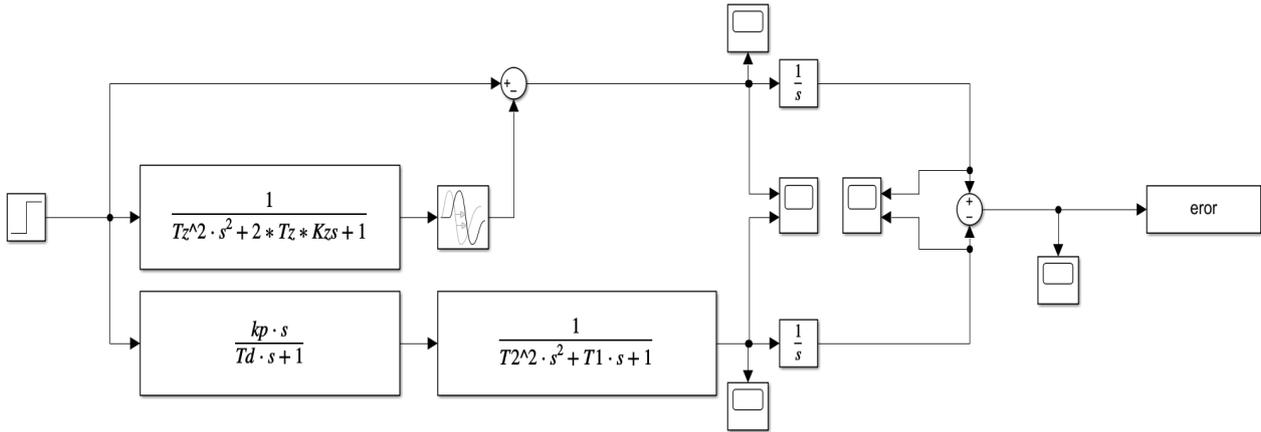


Рис. 8. Структура Simulink для определения ошибки аппроксимации

Данные, представленные на рис. 7, были получены для передаточной функции $W_{зд}(p)$ следующего вида:

$$W_{зд}(p) = \frac{1 \cdot e^{-35p}}{T_{зд}^2 p^2 + 1,414T_{зд}p + 1},$$

где $T_{зд}$ изменялось в диапазоне от 2 до 20 с.

Как можно заметить, увеличение постоянной времени $T_{зд}$ влечет за собой увеличение первого пика ошибки, при постепенном уменьшении второго и третьего пиков, но при этом приводит к существенному смещению этих двух пиков во времени, в отличие от изменений запаздывания.

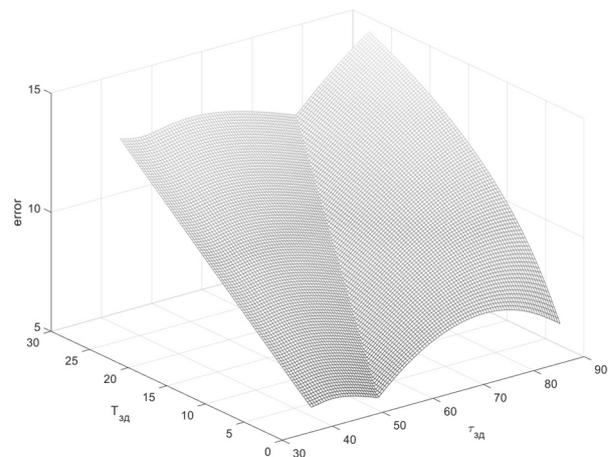
Для оценки влияния на графики обоих параметров построим плоскость распределения модуля разности площадей под кривыми для различных значений запаздывания и постоянных времени.

Для решения данной задачи необходимо построить в среде Simulink схему, представленную на рис. 8. В которой верхняя часть реализует исходную передаточную функцию $(1 - W(p))$ с запаздыванием, а нижняя часть – аппроксимирующую передаточную функцию с реально дифференцирующим звеном. Интеграторы $\frac{1}{s}$ вычисляют

площади под графиками переходных процессов, а модуль разностей этих площадей выводится для последующего анализа [5].

После чего, проведя ряд симуляций, мы получим следующую поверхность модуля ошибки аппроксимации (error) в зависимости от параметров объекта ($\tau_{зд}$ и $T_{зд}$) (рис. 9).

Анализ данных, представленных на рис. 9, позволяет сделать вывод о том, что модуль ошибки аппроксимации имеет тенденцию к снижению при уменьшении постоянной времени объекта $T_{зд}$ и запаздывания $\tau_{зд}$, однако при этом изменение является нелинейным и имеет ярко выраженный минимум, характер изменения которого является линейным.

Рис. 9. График изменения модуля ошибки площади под кривыми в зависимости от величины постоянной времени объекта $T_{зд}$ и запаздывания $\tau_{зд}$

При этом условие корректной аппроксимации (1) для минимизации ошибки может быть дополнено следующим условием:

$$T_{зд} = 1,5 + 1,125 \cdot (\tau_{зд} - 51). \quad (2)$$

Заключение. В данной работе проанализировано влияние на точность аппроксимации звена запаздывания для передаточной функции вида $(1 - W(p))$ с помощью реально дифференцирующего звена. Увеличение постоянной времени колебательного звена второго порядка повышает ошибку аппроксимации, как и увеличение значения чистого запаздывания. Однако влияние постоянной времени колебательного звена второго порядка на ошибку аппроксимации имеет скорее линейный характер, в отличие от запаздывания, которое влияет более сложным образом. Наличие явно выраженного локального минимума на поверхности, представленной на рис. 9, позволяет уточнить характер соотношений между $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ объекта для минимизации ошибки аппроксимации. Параметры $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ должны быть связаны линейной зависимостью для минимизации ошибки аппроксимации.

Проведенные исследования также показали, что характер влияния $\tau_{зд}$ на ошибку аппроксимации предположительно носит периодический характер, однако линии локальных минимумов будут проходить параллельно

друг другу, т. е. характер взаимосвязи между $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ имеет вид, соответствующий условию (2), но с другим свободным членом. Линейный коэффициент зависимости при этом будет сохраняться.

Список литературы

1. Кулаков Г. Т., Кулаков А. Т., Кравченко В. В. Теория автоматического управления. Минск: Высшая школа, 2022. 197 с.
2. Кузьмицкий, И. Ф., Кулаков, Г. Т. Теория автоматического управления: учебник. Минск: БГТУ, 2010. 572 с. (1 – $W(p)$)
3. Попов Е. П. Теория линейных систем и управления. М.: Наука, 1987. 341 с.
4. Теория автоматического управления: учебник / С. Е. Душин [и др]. М.: Высшая школа, 2005. 567 с.
5. Кузьміцкі І. Ф., Карповіч Д. С., Ліхавіцкі В. В. Тэорыя аўтаматычнага кіравання. Лабараторны практыкум. Мінск: БДТУ, 2007. 69 с.

References

1. Kulakov G. T., Kulakov A. T., Kravchenko V. V. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Minsk, Vysheyschaya shkola Publ., 2022. 197 p.
2. Kuzmitski I. F., Kulakov G. T. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Minsk, BGTU Publ., 2010. 572 p.
3. Popov E. P. *Teoriya lineynykh sistem i upravleniya* [Automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 341 p.
4. S. E. Dushin [et al.]. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005. 567 p.
5. Kuzmitski I. F., Karpovich D. S., Likhavitski V. V. *Teoriya avtomaticheskogo kirovannya. Laboratorny praktykum* [Automatic control theory. Laboratory practical work]. Minsk, BGTU Publ., 2007. 69 p.

Информация об авторах

Карпович Дмитрий Семенович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Фокин Тимофей Павлович – преподаватель-стажер кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: fokin@belstu.by

Information about the authors

Karpovich Dzmitry Semenovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Fokin Timophej Pavlovich – teacher trainee, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: fokin@belstu.by

Поступила 16.05.2024

УДК 621.3.011.712

Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. Г. Сухорукова
Белорусский государственный технологический университет

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИМЕНЕНИЯ ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРОЦЕССА СГЛАЖИВАНИЯ

В статье проведен анализ методов сглаживания измерительных трендов и выделены их сильные и слабые стороны. Сделан вывод, что метод локальной аппроксимации обладает рядом преимуществ. Для эффективного использования данного метода произведено имитационное моделирование работы выбранного фильтра для периодических сигналов с одной и несколькими гармониками, при постоянной величине времени выборки и различных частотах. Влияние локальной аппроксимации на измерительный сигнал оценивалось по изменению амплитуды, суммарному коэффициенту искажений гармоник и средней разности между исходным и сглаженным сигналами. При моделировании для локальной аппроксимации использовались полиномы первого, второго и третьего порядков. Для самого процесса сглаживания варьировались окно аппроксимации и оператор времени.

Моделирование показало, что нелинейные искажения фильтрации очень малы, если не выходить за полосу пропускания данного фильтра. Результаты работы фильтра для полинома первого и второго порядков имеют существенное отличие, тогда как для второго и третьего совпадают, если оператор времени равен половине времени ширины окна. При варьировании оператора времени от центра результаты сглаживания для полиномов второго и третьего порядков начинают сильно отличаться. Возможности варьирования оператора времени для полинома второго порядка с точки зрения искажения исходной информации шире, чем для третьего. На основании изменения амплитуды для гармонического сигнала и суммарного коэффициента искажений гармоник получены формулы для расчета ширины окна по частоте или скорости сигнала. Данные результаты предложено использовать для процесса адаптации.

Ключевые слова: фильтрация, сглаживание измерительных трендов, локальная аппроксимация.

Для цитирования: Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Оптимизация применения локальной аппроксимации для процесса сглаживания // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 58–69.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-9.

D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova
Belarusian State Technological University

OPTIMIZATION OF THE APPLICATION OF LOCAL APPROXIMATION FOR THE SMOOTHING PROCESS

The article analyzes methods for smoothing measurement trends and highlights their strengths and weaknesses. It is concluded that the local approximation method has a number of advantages. To effectively use this method, a simulation of the operation of the selected filter was carried out for periodic signals with one and several harmonics, at a constant sampling time and at different frequencies. The influence of local approximation on the measuring signal was assessed by the change in amplitude, total harmonic distortion factor and the average difference between the original and smoothed signal. When modeling, polynomials of the first, second and third orders were used for local approximation. For the smoothing process itself, the approximation window and time operator were varied.

Simulation has shown that nonlinear filtering distortions are very small if you don't go beyond the passband of this filter. The results of the filter for a first- and second-order polynomial have a significant difference, while for the second and third they coincide if the time operator is equal to half the time of the window width. When varying the time operator from the center, the smoothing results for second- and third-order polynomials seem to be very different. The possibilities of varying the time operator for a second-order polynomial, from the point of view of distortion of the original information, are wider than for the third. Based on the change in amplitude for a harmonic signal and the total harmonic distortion factor, formulas are obtained for calculating the window width by frequency or signal speed. These results are proposed to be used for the adaptation process.

Keywords: filtering, smoothing of measurement trends, local approximation.

For citation: Hryniuk D. A., Olinerovich N. M., Suhorukova I. G. Optimization of the application of local approximation for the smoothing process. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 58–69 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-9.

Введение. Измерительный сигнал от датчиков требует различных процедур для извлечения желаемой информации. Первичный полезный сигнал сенсоров всегда содержит высокий уровень шумов, которые могут иметь различную природу происхождения. По этой причине результаты работы сенсоров после преобразования в цифровой вид подвергаются обработке или непосредственно измерительной схемой преобразователя или последующими устройствами. Процедуры сглаживания измерительных трендов приводят к различным динамическим и статическим ошибкам и искажениям.

В целом алгоритмы снижения шума можно разделить на следующие группы в зависимости от выполняемой задачи:

- фильтрация для оценки значения в момент времени t_j с использованием данных x_j, x_{j-1}, \dots и x_{i+1}, x_{i+2} ;
- сглаживание для оценки значения в точке t_i на основании данных x_j, x_{j-1}, \dots и x_{j+1}, x_{j+2} ;
- прогнозирование выходного значения для времени t_i с использованием данных x_i, x_{i-1}, \dots и x_{i+1}, x_{i+2} .

Выбор одного из вышеперечисленных вариантов зависит от доступности данных и цели обработки. Для фильтрации шумов и сглаживания применяются различные подходы, при этом наиболее часто в книгах по обработке измерительной информации рекомендуются классические фильтры низкой частоты. Вторым по популярности являются фильтры бегущего среднего в различной интерпретации [1–3]. В работах по сглаживанию встречаются также медианные фильтры [4, 5, 6], Савицкого – Голея [7, 8], фильтр Калмана [9, 10] и фильтрация Гаусса [11, 12].

Фильтр низких частот (ФНЧ). В большинстве классических источников по фильтрации упоминают КИХ-фильтры (фильтр с конечной импульсной характеристикой, *final impulse response* (FIR)) и БИХ-фильтры (фильтр с бесконечной импульсной характеристикой, *infinite impulse response* (IIR)). КИХ-фильтры универсальны и имеют ряд преимуществ, таких как линейная фаза и устойчивость. Преимуществом БИХ-фильтров является простота реализации по сравнению с КИХ-фильтрами, а также синтез через аналоговые прототипы. Однако БИХ-фильтры могут быть неустойчивыми, не обладают линейной фазой и ограничены в выборе АЧХ (амплитудно-частотной характеристики) и ФЧХ (фазочастотной характеристики).

Фильтр бегущего среднего. Является одним из простейших методов сглаживания. Выходное значение рассчитывается путем вычисления среднего значения всех выборок из окна:

$$y_j = \frac{\sum_{i=-n}^n x_{j+i}}{2n+1}, \quad (1)$$

где x_j – входной сигнал в момент времени t_j ; $2n+1$ – длина окна; y_j – выходное значение.

Иногда при расчете выходного значения фильтра сложение входных значений происходит с использованием весовых коэффициентов k_{j+i} , при которых их сумма равна $2n+1$. Более «старые» значения, как правило, меньше единицы, а значения с другой стороны x_j больше 1:

$$y_j = \frac{\sum_{i=-n}^n k_{j+i} x_{j+i}}{2n+1}. \quad (2)$$

Медианная фильтрация, несмотря на свою нелинейность, широко используется в различных технических решениях, и в частности в программируемых логических контроллерах. Хорошо уменьшает влияние импульсных помех, которые характерны даже для многих АЦП. Традиционный медианный фильтр работает, выбирая в окне среднее значение, называемое медианой:

$$y_j = \text{median}(x_{j-n}, \dots, x_{j-2}, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+n}). \quad (3)$$

Алгоритм нахождения выходного параметра предполагает сортировку значений, а затем, в случае четности количества значений в окне, и вычисление выходного значения как среднего двух центральных. При нечетности выборки выходное значение соответствует центральному элементу отсортированных значений.

Фильтр Савицкого – Голея (СГ). Алгоритм СГ является фильтром нижних частот, но с хорошей фазовой характеристикой, которая мало искажает зашумленный сигнал. В основе фильтра лежит аппроксимация значений окна последних входных значений локальным полиномом с использованием метода наименьших квадратов. Выходное значение формируется на основании коэффициентов полученного полинома. На следующем такте происходит сдвиг: последнее значение отбрасывается, а на освободившееся место помещается следующее измеренное значение.

Дискретный фильтр Калмана. Алгоритм дискретного фильтра Калмана пытается оценить состояние x системы с дискретным временем. Его называют оптимальным линейным фильтром, поскольку он учитывает всю информацию о процессе и, следовательно, дает статистически минимальную ошибку. Алгоритм предполагает, что прогнозирование и измерение процесса выполняются с присутствием белого гауссовского шума, и это иногда приводит к неудовлетворительным результатам фильтра. При прохождении сигналов через цифровые преобразования может наблюдаться негауссовское распределение шума.

Фильтр производит двухэтапные вычисления: прогноз и коррекцию. На этапе прогнозирования оценка состояния рассчитывается по следующему уравнению:

$$\hat{y}_k' = Ax_{k-1} + Bu_{k-1}, \quad (4)$$

где \hat{y}_k' – наблюдаемое состояние на временном шаге k ; u_{k-1} – управляющий вход на временном шаге $k-1$; A – матрица размером $n \times n$ дает связь между состоянием на временном шаге $k-1$ и состоянием на временном шаге k ; B – матрица размером $1 \times n$ дает связь управляющего входа с состоянием x на временном шаге от $k-1$ до k .

Следующим этапом производится расчет проекции ковариации ошибки:

$$\bar{P}_k = AP_{k-1}A^T + Q, \quad (5)$$

где \bar{P}_k – ковариация ошибки, которая оценивается априорно; P_{k-1} – также представляет собой ковариацию ошибки, но оцененную апостериорно; Q – матрица $n \times n$, ошибка процесса (ковариация шума).

Далее производится вычисление коэффициента преобразования K :

$$K_k = \bar{P}_k H^T (H \bar{P}_k + R)^{-1}, \quad (6)$$

где H – матрица, которая связывает измерение с состоянием x ; R – матрица погрешностей измерения (ковариация шума).

Только после вышеуказанного ряда вычислений формируется результат фильтрации:

$$\hat{y}_k = \hat{y}_k' + K_k (x_k - H \hat{y}_k'), \quad (7)$$

где \hat{y}_k – апостериорная оценка состояния; \hat{y}_k' – наблюдаемое состояние на временном шаге k ; K_k – усиление, которое контролирует влияние измерения на \hat{y}_k ; x_k – измерение на временном шаге k ; H – матрица соотношения измеренных значений к состоянию.

В конце процедуры требуется обновление ковариации ошибки:

$$P_k = (I - K_k H) \bar{P}_k. \quad (8)$$

Представленный алгоритм дискретного фильтра Калмана должен быть реализован как

рекурсивная функция, но на практике для сокращения времени расчета он реализуется скорее в итерационной форме. Основным параметром, отвечающим за эффективность сглаживания, является ковариация шума процесса.

Если посмотреть на формулы (3)–(6), то несложно заметить, что из представленных фильтров это один из самых требовательных по объему вычислений процесс шумоподавления.

Фильтр Гаусса. Данный фильтр использует нормальное распределение, называемое распределением Гаусса.

Плотность вероятности распределения Гаусса описывает следующую формулу:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (9)$$

где σ – среднеквадратическое отклонение; σ^2 – дисперсия; μ – математическое ожидание.

При сглаживании с использованием фильтра Гаусса используется конкретная маска, которая строится на основе формулы (9), например, для пяти значений окна

$$G = [0,05; 0,24; 0,4; 0,24; 0,05]. \quad (10)$$

На каждом этапе выборки из окна свертываются с последовательностью, представляющей распределение Гаусса с маской G , затем окно перемещается на одну выборку вперед. Чтобы сохранить масштаб входных значений после свертки, вычисленное значение следует разделить на сумму элементов маски. Для (10) результат следует разделить на 0,98.

Ядерная оценка плотности (ЯОП, Kernel Density Estimation (KDE)). Это еще один алгоритм сглаживания, который активно развивается [13, 14]. Данный подход основан на непараметрическом способе оценки плотности случайной величины. ЯОП активно применяется для задач сглаживания данных. В некоторых областях, таких как обработка сигналов и математическая экономика, метод называется также методом окна Парзена – Розенблатта.

Для заданной выборки окна значений, извлеченных из некоторого распределения с неизвестной плотностью f , при оценке используют формулу

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{mh^n} \sum_{i=1}^m K\left(\frac{x-x_i}{h}\right), \quad (11)$$

где m – количество выборок; h – полоса пропускания, которая контролирует гладкость оценки; n – размеры вектора сигнала. Существуют различные формы ядер, и выбор наиболее подходящего из них обычно производится на основе расчета средней интегральной квадратичной ошибки.

В работе [15] проведена оценка требований к вычислительной мощности некоторых вышеуказанных алгоритмов. Метод бегущего среднего требует меньшую нагрузку на вычислительное устройство. Далее идет метод Гаусса, потом, практически с одинаковым результатом, методы Савицкого – Голея и Калмана. Для выполнения медианного сглаживания требуется еще больше ресурсов, особенно с увеличением окна. Значительно больше ресурсов требуют непараметрические методы шумоподавления.

В работах [16, 17] было показано, что очень эффективно производить процесс сглаживания, если ограничивать полином аппроксимации по методу СГ не выше второго порядка. Это значительно снижает потребность в вычислениях. Кроме этого, изменение оператора времени t_s может позволить регулировать динамические характеристики процесса сглаживания. Применение на практике показало эффективность данного подхода для обработки измерительных данных [18, 19].

Локальная аппроксимация (ЛА). В литературе можно найти разные варианты получения весовых функций для локальной аппроксимации [20]. Данный подход к сглаживанию занимает промежуточное положение между бегущим средним и методом Савицкого – Голея. Одним из самых простых решений по поиску весовых коэффициентов могут быть линейная и квадратичная аппроксимации:

$$y(t) = c_1 + c_2t; \tag{12}$$

$$y(t) = d_1 + d_2t + d_3t^2, \tag{13}$$

где

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2 & w_1 \\ w_3 & w_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \tag{14}$$

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3 & w_2 & w_1 \\ w_4 & w_3 & w_2 \\ w_5 & w_4 & w_3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \tag{15}$$

$$w_j = \sum_{k=1}^N (t_k)^{j-1}; \tag{16}$$

$$b_j = \sum_{k=1}^N x_{i-k+1} (t_k)^{j-1}; \tag{17}$$

$$t_k = (k - 1) \Delta t, \tag{18}$$

где $k = 1, 2, \dots, N$; N – окно аппроксимации; x_i – последнее измеренное значение; Δt – время квантования.

Уравнения (14) и (15) вытекают из метода наименьших квадратов и не требуют больших вычислений. Но могут быть использованы другие весовые функции [16].

Формально для расчета выходного значения y_i может быть использовано любое значение оператора времени в диапазоне от t_1 до t_N . При использовании значения $t_{N/2}$ [17] наблюдается минимальная дисперсия, однако динамическая ошибка в этом случае больше, чем для метода Савицкого – Голея и равна ошибке метода сглаживания бегущего среднего. Фактически результат будет соответствовать некоторому варианту использования фильтра бегущего среднего, только при использовании локальной аппроксимации весовые коэффициенты рассчитываются на каждом шаге.

При сдвиге значения для оператора времени в сторону t_1 можно уменьшить динамическую ошибку и даже прогнозировать значение выходной переменной. В этом случае вопросом является нахождение компромисса между динамической ошибкой и качеством сглаживания.

Коэффициенты уравнения (11) и (12) позволяют производить адаптацию метода под изменяющуюся динамику измерительного тренда. Фактически коэффициенты c_2 и d_2 являются значениями текущей скорости сигнала, а d_3 – текущего ускорения.

Математическое моделирование. Выбранный для сравнительной характеристики в работе [15] непрерывно изменяющийся сигнал с постоянным градиентом не является оптимальным, и полученные кривые зависимости эффективности алгоритмов сглаживания от ширины окна N не учитывают влияние динамики полезного сигнала. Но они показывают, что существует для всех методов какое-то оптимальное значение N , при котором дальнейшее увеличение не приводит к сколь существенному повышению качества сглаживания, однако требует проведения большего количества вычислений.

С целью определения связи между динамикой информационного сигнала и параметрами настройки метода локальной аппроксимации, таких как ширина окна N и оператор времени t_s , были проведены имитационное моделирование и анализ результатов для гармонического сигнала $x_1(t)$ и периодического сигнала с дополнительными гармониками. Второй сигнал создавался с помощью функции

$$x_2(t) = \sin(\omega t) (1 + 0,4 \sin(2\omega(t + 0,12))), \tag{19}$$

где ω – угловой частота, рад/с; f – частота, Гц.

Отличие в форме двух сигналов можно видеть на рис. 1.

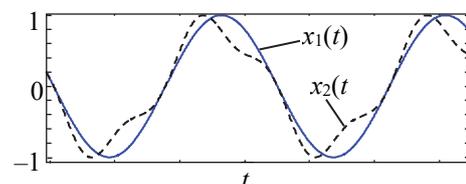


Рис. 1. Сигналы имитационного моделирования

Основной целью проведенных исследований является разработка адаптивного алгоритма для метода локальной аппроксимации. Для этого следует установить влияние параметров метода сглаживания на основные параметры измерительного сигнала.

Значение времени квантования (sample time) для всех экспериментов было фиксированным 0,01 с для того, чтобы можно было легко пересчитывать оптимальное значение N при изменении sample time с учетом актуального диапазона частот для моделирования от 0,1 до 5 Гц и значение N от 4 до 170.

Одним из основополагающих вопросов фильтрации является полоса пропускания. Для ее определения гармонический сигнал пропускался через алгоритм аппроксимации и производилось сравнение амплитуды входного и выходного значения.

Для оценки влияния N на полезный сигнал было проведено моделирование работы фильтра при отсутствии зашумления. После моделирования оценивались амплитуда выходного сигнала, амплитуда первой гармоники, суммарный коэффициент искажения гармоник (THD):

$$THD(\%) = 100 \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{\infty} c_n^2}}{c_1}, \quad (20)$$

где c_n – амплитуда n гармоники после разложения в ряд Фурье.

Для более точной оценки вышеуказанных показателей выходной сигнал аппроксимировался встроенной в Matlab сплайн функцией таким образом, чтобы на период сигнала приходилось 500 точек. Амплитуды гармоник получались путем интегрирования функцией trapz. При расчете THD учитывались 100 гармоник разложения. Исследования сглаживания проводились для оператора времени, равного $t_S = N / 2k_t$, где $k_t = [1; 0,9; 0,75; 0,5]$.

Для оценки влияния ЛА использовано среднее значение суммы квадратов ошибок отклонения исходной информации от обработанной ЛА за период D (СКОО).

Основные вычисления выполнены для аппроксимации по формуле (13), однако проведено сравнение с линейной аппроксимацией по (12) и при использовании полинома третьего порядка

$$y(t) = g_1 + g_2t + g_3t^2 + g_4t^3. \quad (21)$$

Следует отметить, что для выбранных сигналов повышение порядка полинома не приносило полезного эффекта. С учетом особенностей процесса вычисления в реальных микропроцессорных системах следует отметить, что вычисления высоких порядков в формате с плавающей точкой

могут вносить дополнительные погрешности от выполнения операций в микропроцессоре.

Результаты и обсуждение. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) фильтрации представлены на рис. 2–4. Для сравнения на этих графиках приведены АЧХ БИХ фильтра Баттерворта 3, 8 и 16-го порядков. Хотя данный фильтр обладает рядом недостатков по сравнению с фильтром Чебышева и Бесселя, однако для расчета его параметров требуется только определиться с порядком и полосой пропускания.

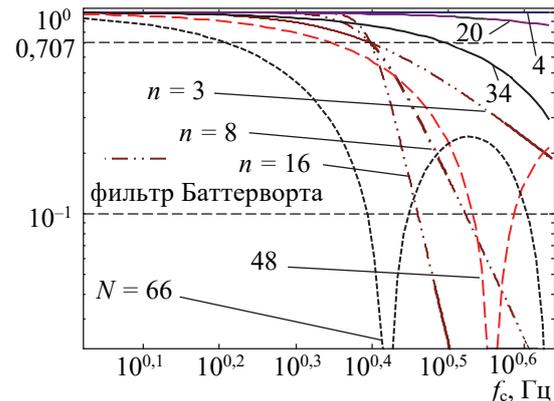


Рис. 2. Коэффициент передачи при аппроксимации по (13) при разных N

Как видно из графиков, до достижения ширины окна полупериода сигнала ЛА проявляет линейные свойства. По сравнению с фильтром Баттерворта он имеет более плавное изменение коэффициента передачи до коэффициента среза 0,1 крутизна характеристики становится больше, чем у БИХ фильтра. Как уже отмечалось, повышение порядка полинома аппроксимации с двух до трех не сказывается на частотных характеристиках, тогда как АЧХ для формулы (13) приводит к сдвигу характеристики в сторону низкой частоты (рис. 4).

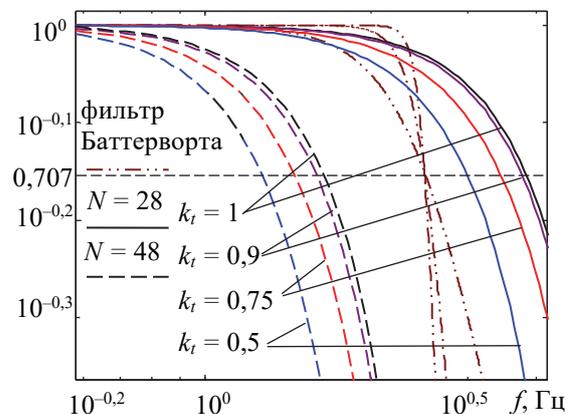


Рис. 3. Влияние оператора времени на коэффициент передачи для (13)

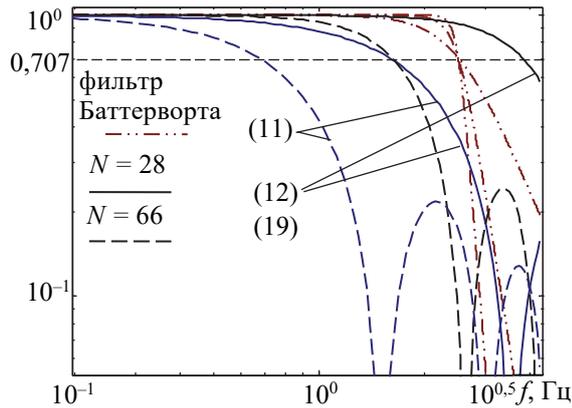


Рис. 4. Влияние формулы аппроксимации на коэффициент передачи

Оператор времени также влияет на полосу пропускания процесса фильтрации. Отклонение данного параметра от значения $N/2$ в ту или иную сторону приводит к смещению характеристики в сторону низкой частоты. На рис. 3 приведены характеристики в сторону начала отсчета выборки, но такая же картина наблюдаются, если брать коэффициенты k_t больше 1.

На основании анализа значений для АЧХ были получены зависимости ширины окна аппроксимации от частоты f_c для двух пороговых значений 0,95 и 0,707 (рис. 5, 6). Они имеют гиперболическую зависимость и хорошо аппроксимируются формулой вида

$$N = \exp(a - b \ln(f_c)) = \frac{\exp(a)}{f_c^b}. \quad (22)$$

Значения коэффициентов аппроксимации графиков, представленных на рис. 5, 6, приведены в табл. 1, 2. Для прикладных расчетов коэффициент можно принимать равным 1.

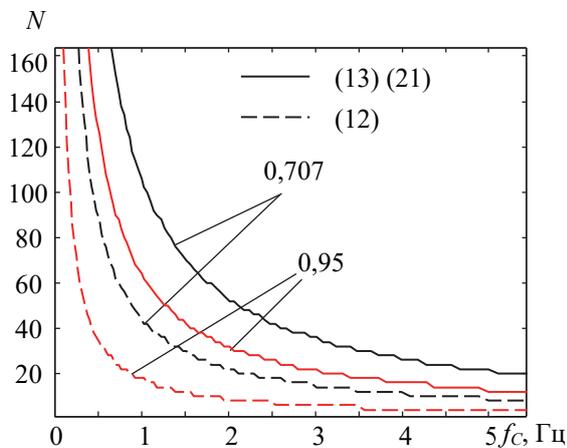


Рис. 5. Зависимость ширины окна аппроксимации от частоты f_c при разных формулах аппроксимации

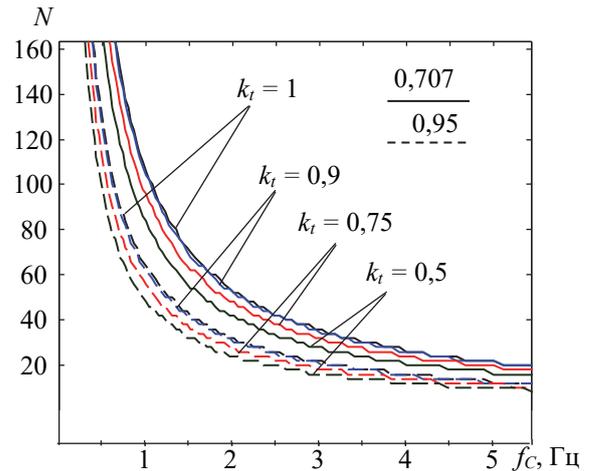


Рис. 6. Зависимость ширины окна аппроксимации от частоты f_c при вариации оператора времени

Таблица 1

Коэффициенты для формулы (22) при изменении оператора времени для $x_1(t)$

f_c	(20)	k_t			
		1	0,9	0,75	0,5
0,707	a	4,6655	4,6470	4,5556	4,4188
	b	0,9995	0,9947	0,9961	0,9956
0,95	a	4,1565	4,1260	4,0132	3,8802
	b	0,9972	0,9935	0,9915	0,9943

Таблица 2

Коэффициенты для формулы (22) при изменении формулы аппроксимации для $x_1(t)$

f_c	(22)	Формула аппроксимации		
		(21)	(13)	(12)
0,707	a	4,6655	4,6655	3,7935
	b	0,9995	0,9995	1,0020
0,95	a	4,1565	4,1565	2,8533
	b	0,9972	0,9972	0,9752

Оператор времени следует осторожно использовать для регулирования процесса сглаживания с помощью предложенной аппроксимации. После некоторого значения t_s полоса пропускания перестает сужаться и начинается процесс расширения (рис. 7, 8). Данный эффект является следствием того, что в точках максимума и минимума гармонической функции сигнала начинаются существенные деформации формы, что приводит к увеличению амплитуды сигнала. При этом результаты аппроксимации по (13) и (21) начинают отличаться (рис. 7). При аппроксимации по (21) увеличение амплитуды начинается после уменьшения k_t ниже значения $\approx 0,6$, для (13) – ниже $\approx 0,2$. На рис. 7 для $k_t = 1$ графики коэффициента передачи совпадают, но при $k_t = 0,85$ они уже находятся с разных сторон от кривой для $k_t = 1$. При дальнейшем уменьшении k_t различия увеличиваются.

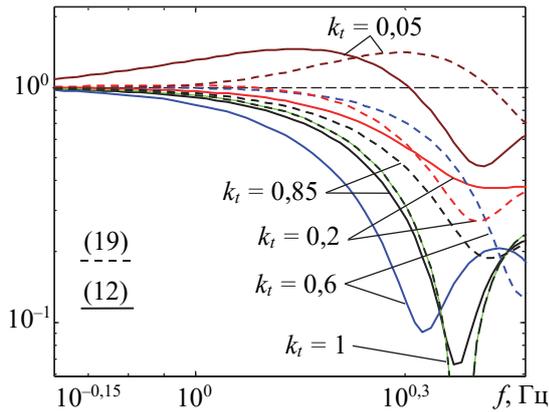


Рис. 7. Зависимость коэффициента передачи при изменении оператора времени для $N = 72$

Несмотря на все нюансы с нелинейной зависимостью частоты среза от оператора времени, зависимость окна аппроксимации имеет все тот же вид (рис. 8) и хорошо описывается формулой вида (22). Зависимость коэффициентов a и b этой формулы от оператора времени приведены на графиках (рис. 9, 10).

Предельные значения окна аппроксимации от граничной частоты f_B , при которой коэффициент передачи становится выше 1, имеет такой же характер (рис. 11) как кривые для $N(f_C)$, только коэффициенты a и b будут другие.

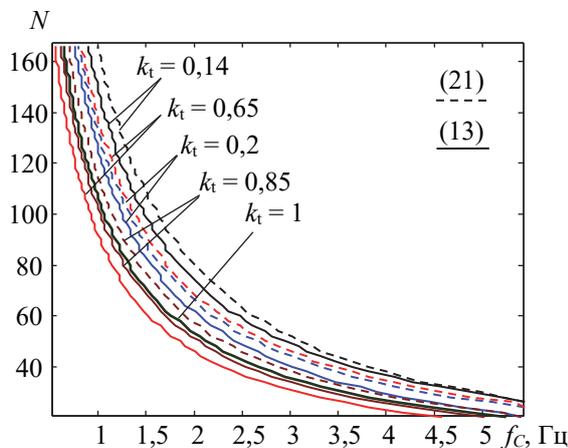


Рис. 8. Зависимость ширины окна аппроксимации от частоты f_C при вариации оператора времени

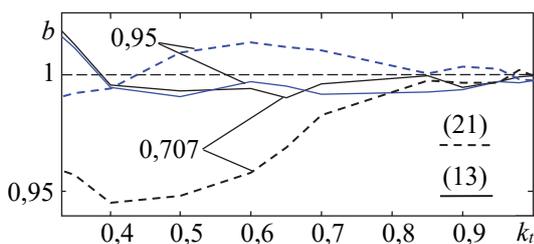


Рис. 9. Зависимость коэффициента b при изменении оператора времени для $x_1(t)$

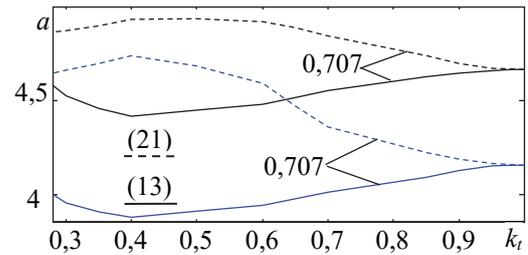


Рис. 10. Зависимость коэффициента a при изменении оператора времени для $x_1(t)$

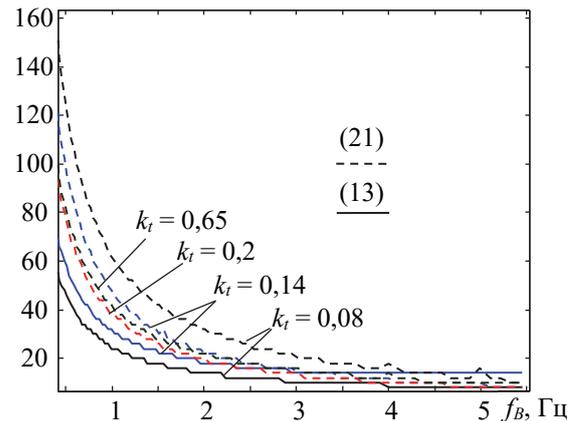


Рис. 11. Зависимость ширины окна аппроксимации от частоты f_B при вариации оператора времени

Оценка искажений сигнала в процессе ЛА с помощью коэффициента искажений THD для гармонического сигнала (рис. 12–14) показала малое влияние окна аппроксимации, формулы аппроксимации и оператора времени на данный показатель. Как и следовало ожидать, по мере увеличения частоты искажения нарастают фактически по экспоненте. При приближении к частоте среза начинает проявляться нелинейное влияние окна аппроксимации (рис. 12). Негативное влияние аппроксимации по формуле (12) начинает проявляться несколько раньше (рис. 13). Оператор времени оказывает некоторое влияние на данный показатель качества, при этом влияние N более существенно (рис. 13). На рассмотренном диапазоне частот для гармонического сигнала THD не превысил 1%. И, как следствие, настройка процесса сглаживания по амплитуде сигнала является более эффективной. Следует отметить, что на данный показатель в большей степени оказывает влияние особенность вычислительного процесса в Matlab. Следует производить оценку количества гармоник для расчета THD . После 150 гармоник можно заметить искажения характера зависимостей.

При использовании ЛА для негармонического сигнала могут наблюдаться различные нелинейные эффекты (рис. 15), особенно при широком значении окна аппроксимации или высокой частоте сигнала. Влияние частоты сигнала и окна

аппроксимации на результат ЛА сигнала $x_2(t)$ на среднеквадратическую разность между исходным сигналом и отфильтрованным можно проследить с помощью рис. 16, 17. Из них следует, что для внесения минимальных искажений в процесс сглаживания потребуется, если это возможно, повысить частоту выборки входных данных или аккуратно выбрать окно аппроксимации.

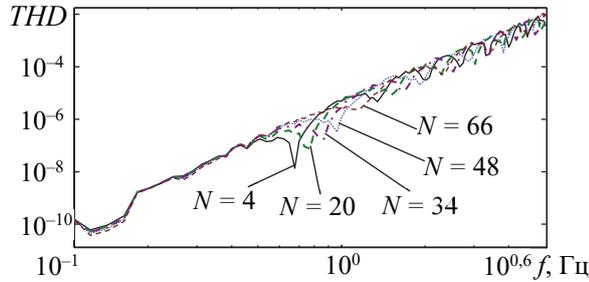


Рис. 12. Суммарный коэффициент искажения гармоник при разном окне аппроксимации N

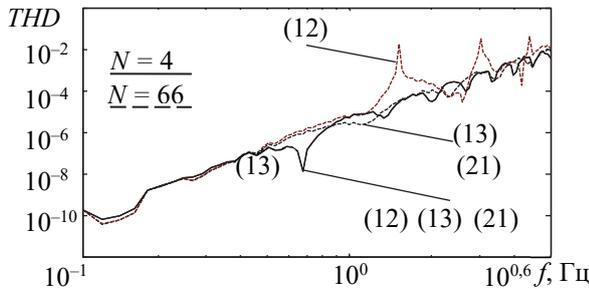


Рис. 13. Суммарный коэффициент искажения гармоник при разных формулах аппроксимации

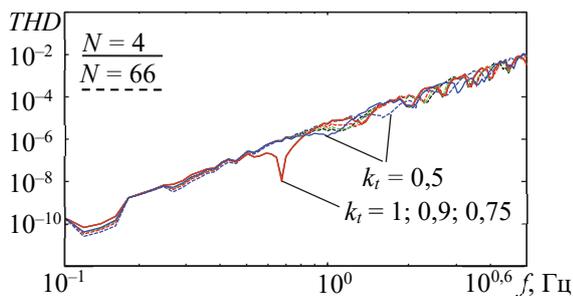


Рис. 14. Суммарный коэффициент искажения гармоник при разных значениях оператора времени

В отличие от условий гармонического сигнала $x_1(t)$, использовать зависимости амплитуды от ширины аппроксимации и частоты (рис. 15) затруднительно для определения оптимальных условий сглаживания. При разных соотношениях амплитуд гармоник в полезном сигнале данные зависимости могут приобретать различный характер.

Для целей выбора условий сглаживания или построения динамической адаптации лучше подойдет параметр THD . Его отклонение на выходе от значения на входе может служить хорошим индикатором для определения параметров настройки фильтрации.

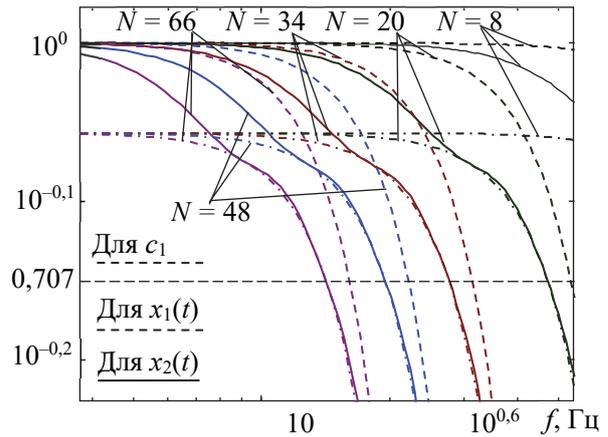


Рис. 15. Коэффициент передачи для входных сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$

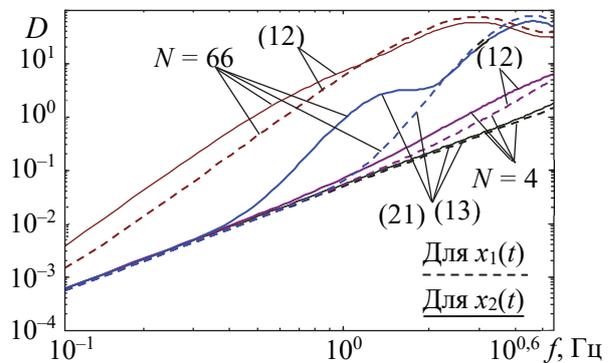


Рис. 16. СКОО при разных формулах аппроксимации

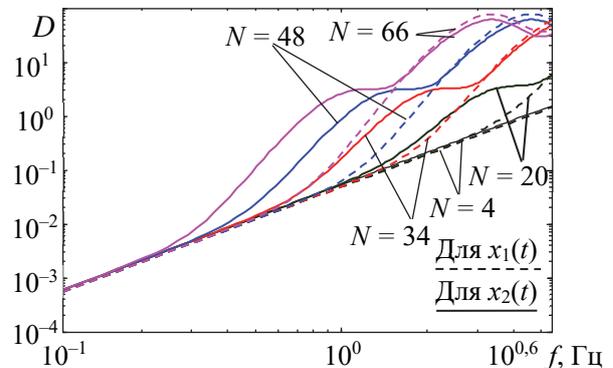


Рис. 17. СКОО при разной ширине окна

Результаты оценки влияния аппроксимации на суммарный коэффициент искажения представлены на рис. 18, 19. Вид зависимостей подобен АЧХ для $x_1(t)$. При формировании упреждения с помощью оператора времени происходит снижение полосы пропускания (если можно использовать такой термин в этом случае). Также не наблюдается отличий в результате применения полинома второго и третьего порядков (рис. 18). В случае, если $k_t = 1$ идентично, как было для АЧХ $x_1(t)$, наблюдаются отличия в результате при использовании полиномов второго и третьего порядков.

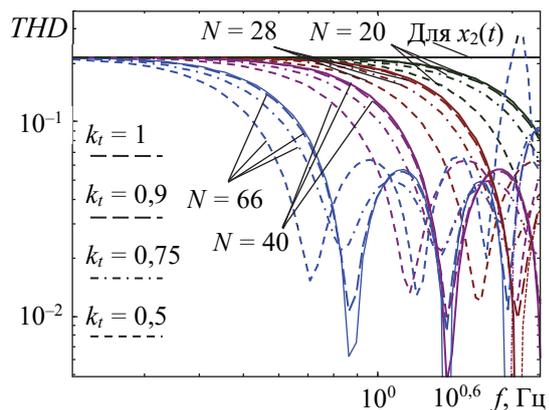


Рис. 18. Суммарный коэффициент искажения гармоник при разном окне аппроксимации и операторе времени для $x_2(t)$

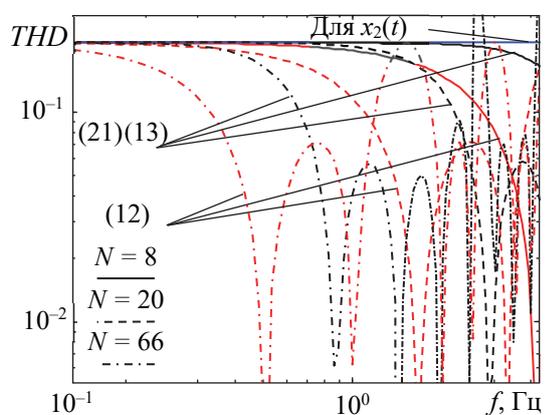


Рис. 19. Суммарный коэффициент искажения гармоник при разных формулах аппроксимации

В отличие от АЧХ $x_1(t)$, где граничные значения получались по уровню 0,95 и 0,707, для THD целесообразно для сохранения формы полезного сигнала уменьшить уровень отклонения показателя от исходного значения.

На рис. 20 приведены зависимости оптимальных значений для уровня снижения показателя THD от исходного на 5% и 1%. Данные зависимости также хорошо подчиняются формуле вида (22) как это было и для гармонического сигнала.

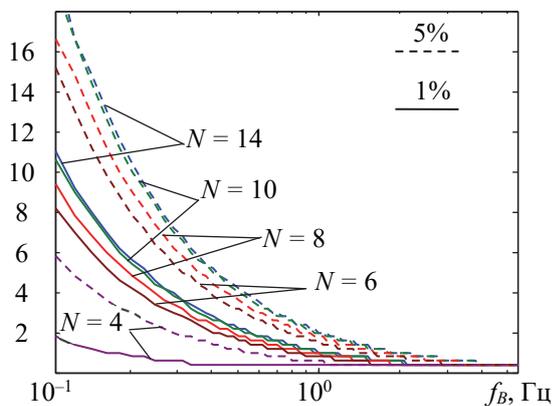


Рис. 20. Зависимость границы по 0,5 и 5%

Зависимость коэффициентов формулы (22) от оператора времени представлена на рис. 21, 22 при уровне отклонения THD от исходного на 5% и 1%. Они имеют схожий характер с зависимостями, которые были представлены выше, для гармонического полезного сигнала. Ломаный характер кривой для параметра во много обусловлен целочисленностью параметра N , ограничениями по значениям на границах.

Таблица 3

Коэффициенты для формулы (22) при изменении оператора времени для $x_2(t)$

Уровень, %	(22)	k_t			
		1	0,9	0,75	0,5
0,5	a	2,4001	2,3714	2,2706	2,1593
	b	1,0162	1,0071	0,9733	0,9364
5	a	3,0077	2,9800	2,8744	2,7386
	b	1,0299	1,0264	1,0136	0,9943

Таблица 4

Коэффициенты для формулы (22) при изменении формулы аппроксимации для $x_2(t)$

Уровень, %	(22)	Формула аппроксимации		
		(21)	(13)	(12)
0,5	a	2,4001	2,4001	1,4950
	b	1,0162	1,0162	0,2430
5	a	3,0077	3,0077	2,0060
	b	1,0299	1,0299	0,6302

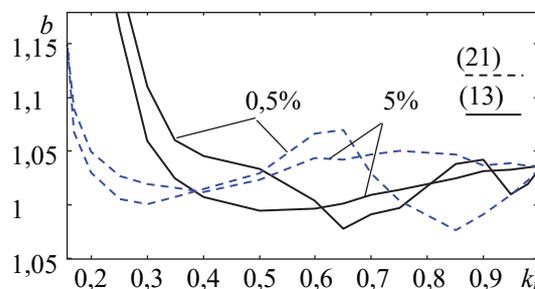


Рис. 21. Зависимость коэффициента b при изменении оператора времени для $x_2(t)$

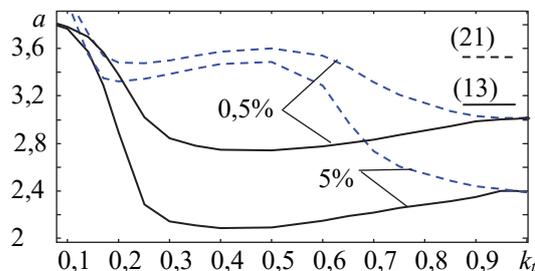


Рис. 22. Зависимость коэффициента a при изменении оператора времени для $x_2(t)$

Для полинома аппроксимации второго порядка коэффициент b в первом приближении

можно принимать равным 1, так как отклонения более чем на 5% наблюдаются за границами рациональной вариации параметра k_i .

Модуль средней скорости V для гармонического сигнала пропорционален частоте

$$V = 4f. \quad (23)$$

Исходя из этого можно заключить, что формула (22) может быть использована для построения адаптивного процесса сглаживания с помощью ЛА, поскольку для данного метода фильтрации происходит постоянное определение скорости (в (12) это c_2 ; в (13) – d_2 ; в (21) – g_2) на каждом такте. На основании данных параметров можно менять окно аппроксимации, а вместе с ним, по необходимости, и k_i .

Модуль среднего ускорения A , который также определяется в зависимостях (13) и (21) (d_3 и g_3 соответственно), пропорционален квадрату частоты

$$A = 8\pi f^2. \quad (24)$$

Исходя из этого, можно учитывать значения d_3 и g_3 для формирования окна аппроксимации на следующем такте.

Заключение. Проведенное моделирование локальной аппроксимации позволило выявить влияющие окна аппроксимации, оператора времени и порядка полинома на искажение полезного сигнала. В целом при правильном выборе параметров данный метод сглаживания характеризуется небольшими искажениями полезного сигнала. Повышение порядка аппроксимации выше полинома второго порядка эффективно, только если требуется уменьшить динамическую ошибку.

Для оптимизации процесса сглаживания амплитуда сигнала удобна только в случае гармонических сигналов. При наличии в информативном сигнале гармоник более высоких порядков удобным параметром для настройки процесса сглаживания является суммарный коэффициент искажения гармоник.

Полученный вид формул позволяет производить простой расчет оптимальных значений окна аппроксимации.

Установленная связь между граничной частотой, при которой начинают происходить изменения и искажения входных сигналов, позволяет построить процесс адаптивного сглаживания с помощью ЛА.

Список литературы

1. Shrivastava P., Singh U. P. Noise removal using first order neighborhood mean filter // Conference on IT in Business, Industry and Government (CSIBIG). Indore, India 2014. P. 1–6. DOI: 10.1109/CSIBIG.2014.7057004.
2. Fu B., Xiong X., Sun G. An efficient mean filter algorithm // The 2011 IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering. Harbin, China, 2011. P. 466–470. DOI: 10.1109/ICME.2011.5876785.
3. A multi-layer extreme learning machine refined by sparrow search algorithm and weighted mean filter for short-term multi-step wind speed forecasting / H. Zhang [et al.] // Sustain Energy Technol. 2022. Vol. 50, article 101698. DOI: 10.1016/j.seta.2021.101698.
4. Sinha P. K., Hong Q. H. An improved median filter // IEEE Transactions on Medical Imaging. 1990. Vol. 9, no. 3. P. 345–346. DOI: 10.1109/42.57773.
5. Gallagher N. C. Median filters: a tutorial // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Espoo, Finland, 1988. Vol. 2. P. 1737–1744. DOI: 10.1109/ISCAS.1988.15271.
6. Sun Y., Tan W., Chen T. A method to remove chattering alarms using median filters // ISA Transactions. 2018. Vol. 73. P. 201–207. DOI: 10.1016/j.isatra.2017.12.012.
7. Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // Analytical Chemistry. 1964. Vol. 36, no. 8. P. 1627–1639.
8. Magazine S. P., Schafer R. W. What is a savitzky-golay filter? // IEEE Signal processing magazine. IEEE, 2011. Vol. 28, issue 4. P. 111–117. DOI: 10.1109/MSP.2011.941097.
9. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems // Transactions of the ASME: Journal of Basic Engineering. 1960. Vol. 82, series D. P. 35–45.
10. Pham S. Dinh A. Using the Kalman algorithm to correct data errors of a 24-bit visible spectrometer // Sensors. 2017. Vol. 17, issue 12. P. 1–20. DOI: 10.3390/s17122939.
11. Deng G., Cahill L.W. An adaptive Gaussian filter for noise reduction and edge detection // IEEE Conference Record Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference. San Francisco, CA, USA, 1993. P. 1615–1619. DOI: 10.1109/NSSMIC.1993.373563.
12. Comparison of Gaussian, logarithmic transform and mixed Gaussian-log-normal distribution based 1DVAR microwave temperature-water-vapour mixing ratio retrievals / A. J. Kliever [et al.] // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 2015. Vol. 142 (694). P. 274–286. DOI: 10.1002/qj.2651.
13. Baszczynska A. One value of smoothing parameter vs interval of smoothing parameter values in kernel density estimation // Acta Universitatis Lodzianensis. Folia Oeconomica. Lodz University Press, 2017. Vol. 6, no. 332. P. 73–86. DOI: 10.18778/0208-6018.332.05.

14. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1956. Vol. 27, issue 3. P. 832–837. DOI: 10.1214/aoms/1177728190.
15. Kowalski P., Smyk R. Review and comparison of smoothing algorithms for one-dimensional data noise reduction // *International Interdisciplinary PhD Workshop (IIPHDW)*. Świnouście, Poland, 2018. P. 277–281. DOI: 10.1109/IIPHDW.2018.8388373.
16. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers // *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, Lithuania, 2016. P. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.
17. Гринюк Д. А., Олифинович Н. М., Сухорукова И. Г. Использование алгоритмов аппроксимации для сглаживания трендов измерительных преобразователей // *Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика*, 2017. № 2 (200). С. 82–87.
18. Hvozdzew M., Karpovich M. Dynamic signals filtration in high level noise condition // *Mokslas – Lietuvos Ateitis / Science – Future of Lithuania*. Vilnius, 2020. Vol. 12. P. 1–3. DOI: 10.3846/mla.2020.11487.
19. Исследование колебаний лыжи под действием пневмоцилиндра / Д. А. Гринюк [и др.] // *Химическая технология и техника: материалы 85-й науч.-техн. конф. проф.-препод. состава, науч. сотрудников и аспирантов (с международным участием)*, Минск, 1–13 февраля 2021 г. Минск: БГТУ, 2021. С. 228–230.
20. Катковник В. Я. Непараметрическая идентификация и сглаживание данных: метод локальной аппроксимации. М.: Наука, 1985. 336 с.

References

1. Shrivastava P., Singh U. P. Noise removal using first order neighborhood mean filter. *Conference on IT in Business, Industry and Government (CSIBIG)*. Indore, 2014, pp. 1–6. DOI: 10.1109/CSIBIG.2014.7057004.
2. Fu B., Xiong X., Sun G. An efficient mean filter algorithm. *The 2011 IEEE/ICME International Conference on Complex Medical Engineering*. Harbin, 2011, pp. 466–470. DOI: 10.1109/ICME.2011.5876785.
3. Zhang H., Peng Z., Tang J., Dong M., Wang K., Li W. A multi-layer extreme learning machine refined by sparrow search algorithm and weighted mean filter for short-term multi-step wind speed forecasting. *Sustain Energy Technol*, 2022, vol. 50, article 101698. DOI: 10.1016/j.seta.2021.101698.
4. Sinha P. K., Hong Q. H. An improved median filter. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1990, vol. 9, no. 3, pp. 345–346. DOI: 10.1109/42.57773.
5. Gallagher N. C. Median filters: a tutorial. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Espoo, 1988, vol. 2, pp. 1737–1744. DOI: 10.1109/ISCAS.1988.15271.
6. Sun Y., Tan W., Chen T. A method to remove chattering alarms using median filters. *ISA Transactions*, 2018, vol. 73, pp. 201–207. DOI: 10.1016/j.isatra.2017.12.012.
7. Savitzky A., Golay M. J. E. Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures. *Analytical Chemistry*, 1964, vol. 36, no. 8, pp. 1627–1639.
8. Magazine S. P., Schafer R. W. What is a savitzky-golay filter? *IEEE Signal processing magazine*. IEEE, 2011, vol. 28, issue 4, pp. 111–117. DOI: 10.1109/MSP.2011.941097.
9. Kalman R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME – Journal of Basic Engineering*, 1960, vol. 82, series D, pp. 35–45.
10. Pham S. Dinh A. Using the Kalman algorithm to correct data errors of a 24-bit visible spectrometer. *Sensors*, 2017, vol. 17, issue 12, pp. 1–20. DOI: 10.3390/s17122939.
11. Deng G., Cahill L.W. An adaptive Gaussian filter for noise reduction and edge detection. *IEEE Conference Record Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference*. San Francisco, CA, USA, 1993, pp. 1615–1619. DOI: 10.1109/NSSMIC.1993.373563.
12. Kliewer A. J., Fletcher S. J., Jones A. S., Forsythe J. M. Comparison of Gaussian, logarithmic transform and mixed Gaussian-log-normal distribution based 1DVAR microwave temperature-water-vapour mixing ratio retrievals. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 2015, vol. 142 (694), pp. 274–286. DOI: 10.1002/qj.2651.
13. Baszczynska A. One value of smoothing parameter vs interval of smoothing parameter values in kernel density estimation. *Acta Universitatis Lodzianensis. Folia Oeconomica*. Lodz University Press, 2017, vol. 6, no. 332, pp. 73–86. DOI: 10.18778/0208-6018.332.05.
14. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1956, vol. 27, issue 3, pp. 832–837. DOI: 10.1214/aoms/1177728190.
15. Kowalski P., Smyk R. Review and comparison of smoothing algorithms for one-dimensional data noise reduction. *International Interdisciplinary PhD Workshop (IIPHDW)*. Świnouście, 2018, pp. 277–281. DOI: 10.1109/IIPHDW.2018.8388373.

16. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliferovich N. Adaptive smoothing and filtering in transducers. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2016, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream39242.2016.7485917.

17. Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G. The use of algorithmic approaches for smoothing of measurement information. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 82–87 (In Russian).

18. Hvozdeu M., Karpovich M. Dynamic signals filtration in high level noise condition. *Mokslas – Lietuvos Ateitis / Science – Future of Lithuania*. Vilnius, 2020, vol. 12, pp. 1–3. DOI: 10.3846/mla.2020.11487.

19. Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Alekseev V. L., Shilin A. M. Study of ski vibrations under the action of a pneumatic cylinder. *Khimicheskaya tekhnologiya i tekhnika: materialy 85-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodovatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (s mezhdunarodnym uchastiyem)* [Chemical Technology and Engineering: Proceedings of the 85th Scientific and Technical Conference of Faculty, Researchers and Postgraduates (with International Participation)]. Minsk, 2021, pp. 228–230 (In Russian).

20. Katkovnik V. Ya. *Neparametricheskaya identifikatsiya i sglazhivaniye dannykh: metod lokal'noy aproksimatsii* [Nonparametric identification and smoothing of data: local approximation method]. Moscow, Science Publ., 1985, 336 p. (In Russian).

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniukda@gmail.com

Олиферович Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniukda@gmail.com

Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna – Senior Lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Поступила после доработки 25.04.2024

УДК 621.3.011.712

Н. М. Олиферович, Д. А. Гринюк, И. Г. Сухорукова, И. О. Оробей
Белорусский государственный технологический университет

ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ВОДОПОДГОТОВКИ

В статье проводится анализ современных информационных технологий в системах водоподготовки. Указываются особенности использования современных технологий обработки информации, которые широко применяются в данных процессах. Наибольшее внимание уделяется использованию систем искусственного интеллекта, особенно на базе нейронных систем. Применение данного подхода обусловлено не только отсутствием решения проблем водоподготовки, но и появлением новых: учет экономических задач при проектировании и работе, уменьшение выбросов в атмосферу и т. д.

Развитие технологий компьютерного моделирования позволило на новом уровне решать актуальные задачи проектирования, построения и эксплуатации. Данное направление в системах водоподготовки характеризуется использованием большого круга готовых программных продуктов. Технологии Building Information Model также находят широкое применение при проектировании и эксплуатации очистных сооружений. Они дают возможность обеспечивать качество, уменьшать влияние работы неквалифицированных кадров; экономить ресурсы; уменьшать время ввода в эксплуатацию; тестировать стрессовые ситуации; координировать работу служб.

Отдельное внимание уделено узкому направлению применения информационных технологий для получения моделей и построения систем управления оптимальной дозировки реагентов. Решение данной проблемы невозможно без информационного обеспечения систем управления. В системах оптимизации дозирования основное внимание акцентируется на использовании пробной коагуляции, времени фильтрации, времени капиллярного всасывания, контроле вязкости, электрокинетических свойств, проводимости. Рассматриваются структура управления по модели для системы дозирования, а также следящая система.

Ключевые слова: системы управления, водоподготовка, оптимальное дозирование.

Для цитирования: Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г., Оробей И. О. Повышение эффективности функционирования систем управления процессами водоподготовки // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 70–79.
DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-10.

N. M. Oliferovich, D. A. Hryniuk, I. G. Suhorukova, I. O. Orobei
Belarusian State Technological University

INCREASING THE EFFICIENCY OF WATER TREATMENT CONTROL SYSTEMS

The article analyzes modern information technologies in water treatment systems. The features of the use of modern information processing technologies, which are widely used in these processes, are indicated. The greatest attention is paid to the use of artificial intelligence systems, especially those based on neural systems. The use of this approach is due not only to the lack of solutions to water treatment problems, but also to the emergence of new problems: taking into account economic objectives in design and operation, reducing emissions into the atmosphere, etc.

The development of computer modeling technologies has made it possible to solve current problems of design, construction and operation at a new level. This direction in water treatment systems is characterized by the use of a wide range of ready-made software products. Building Information Model technologies are also widely used in the design and operation of wastewater treatment facilities. They make it possible to ensure quality and reduce the impact of the work of unqualified personnel; save resources; reduce commissioning time; test stressful situations; coordinate the work of services.

Special attention is paid to the narrow area of application of information technologies to obtain models and build control systems for the optimal dosage of reagents. Solving this problem is impossible without information support for control systems. Dosing optimization systems focus on the use of test coagulation, filtration time, capillary suction time, control of viscosity, electrokinetic properties, and conductivity. Model-based control structures for the dosing system, as well as a tracking system, are proposed.

Keywords: control systems, water treatment, optimal dosing.

For citation: Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Suhorukova I. G., Orobei I. O. Increasing the efficiency of water treatment control systems. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 70–79 (In Russian). DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-10.

Введение. Объекты автоматизации технологических процессов не являются универсальными с точки зрения применения последних достижений в развитии теории управления, технических средств, программирования. Хотя на всем пути использования систем регулирования шла постоянная работа в области типовых универсальных средств измерения, управляющих и исполняющих систем. Однако особенности функционирования некоторых отраслей и предприятий не позволяют решить этот вопрос окончательно. Так, традиционно химическая отрасль характеризуется высокими требованиями к надежности и взрывобезопасности, что зачастую предполагает применение особых управляющих систем, датчиков и систем для функционирования, систем противоаварийной защиты. Пищевая и фармацевтическая отрасли характеризуются особыми требованиями к гигиене, что влияет также на построение систем автоматизации.

Процессы водоподготовки имеют свои специфические особенности, которые сильно влияют на автоматизацию данных техпроцессов. В первую очередь следует отметить стохастические свойства обрабатываемых сред. При этом эти свойства могут изменяться в широком диапазоне, что приводит к тому, что часто меняется технология обработки.

Другим важным аспектом является применение нетипичных систем измерения состояния среды и технологических аппаратов. Данное направление характеризуется использованием измерительных приборов для параметров, которые применяются исключительно в процессах водоподготовки. Но самая достоверная информация по принятию решений для управления технологическими процессами и аппаратами часто исходит из ручного или полуавтоматического лабораторного анализа, периодичность которого очень низкая.

Вышеуказанные проблемы привели к тому, что аппараты и установки водоподготовки часто характеризуются большой инерционностью, что затрудняет эффективное применение автоматизации. То есть фактически автоматизация играет, в большей степени, вспомогательную роль. Консервативность подходов к процессам водоподготовки мешает применению тех решений по автоматизации, которые уже давно используются в других отраслях промышленности. Но применение современных технологий автоматизации может быть полезным для повышения эффективности функционирования многих процессов

водоподготовки. Рассмотрим основные направления внедрения автоматизации.

Использование искусственного интеллекта (ИИ). Технология искусственного интеллекта уже стала рабочим инструментом по поиску оптимальных решений для многих задач. Комплексный анализ измерительной информации в процессах водоподготовки начался давно, ввиду особенностей технологии. На передовых станциях водоочистки давно производится постоянный поиск связи качества очистки с текущими измерениями расхода, pH, редокс-потенциала, температуры, мутности, проводимости и т. д. Интеллектуальная оптимизация результатов измерений для очистных сооружений питьевой и сточной воды может позволить усовершенствовать работу операторов очистных сооружений при принятии решений в режиме реального времени, а, возможно, где-то и перевести в автоматический режим. Операторы могут получать данные, которые помогут им точно настроить работу станции для удовлетворения критериев качества воды с меньшими затратами. Внедрение технологий искусственного интеллекта, создание цифровых копий, решение которых принимали опытные операторы, может позволить сэкономить на процессах очистных сооружений и исключить ошибки. Возможности самообучающихся систем ИИ анализировать тенденции на основе истории трендов и давать эффективные прогнозы гораздо выше, чем у операторов. В целом технология искусственного интеллекта может улучшить стабильность качества воды и эффективность водоочистных сооружений, т. е. обеспечить соответствие стандартам качества воды в течение большей части срока службы. Это дает предприятиям водоснабжения возможность повысить уровень удовлетворенности потребителей, обеспечить необходимые экономические требования и уменьшить вероятность экологических сбоев.

Однако пока использование искусственного интеллекта в очистке воды все еще находится в зачаточном состоянии. Кроме консервативности самой отрасли, важной проблемой является получение модели, способной воспроизвести процессы, которые происходят в очистных сооружениях. Без решения этой проблемы, которая требует учета сведений из теории физико-химических процессов, прямое управление на основе статистики, которую обработал ИИ, может привести к проскокам, когда появляются входные данные, которые значительно отличаются от прошлых.

Одновременно актуальной проблемой является достаточное информативное обеспечение системы управления, а также достоверность этих данных. В целом системы очистки характеризуются большим набором данных, часто специфических. Некоторые методы ИИ [1, 2], искусственных нейронных сетей [3, 4], генетические алгоритмы могут позволить обнаружить зависимости, которые скрывались в больших объемах информации.

Важным аспектом является оптимизация водоочистных сооружений. Часто контроль доступного количества физических, химических и биологических параметров недостаточен для точного принятия решений [5]. Очень полезным может быть проектирование многостадийной обработки воды с целью получения промежуточных параметров для более точного последующего прогнозирования.

К очистным сооружениям в некоторых странах вводятся требования к энергоэффективности [6]. Математические модели в области очистки сточных вод, а также текущий анализ существующих систем, может существенно помочь инженерам в работе над оптимизацией очистных сооружений. Традиционная очистка сточных вод создает огромное количество первичного и вторичного осадков, которые вместе называются осадком сточных вод. Не вызывает сомнения, что состояние этих осадков, во многом, определяется обработкой на предыдущих стадиях. Системная интеграция процессов очистки и обработки осадков может существенно способствовать формированию более эффективной обработки [7]. Это имеет хорошую экономическую основу, так как затраты с осадками могут составлять до 60% от общих эксплуатационных затрат на очистные сооружения [8]. Существуют разработки эффективного взаимодействия экспериментальных данных и моделирования на реальных объектах [9].

Одно из направлений оптимизации работы систем управления – использование интегральных индексов, что является следствием сложных нелинейных свойств очистных сооружений как объектов управления [10]. В деле создания эффективных моделей сосредоточено много усилий [11, 12].

Еще один аспект, который пытаются учесть при управлении и проектировании очистных сооружений, – снижение выбросов парниковых газов [13, 14].

Одной из частных проблем при очистке сточных вод является оптимизация дозирования химических реагентов. Особенно это касается процесса коагуляции и флокуляции. Особенностью дозирования коагулянтов является то, что текущий недостаток коагулянта способствует

ухудшению протекания последующих стадий, таких как седиментация, фильтрация и т. д. При передозировании происходит перерасход химического реактива, а также сам коагулят может выступать в качестве загрязнения. Возможности использования нейронных сетей широко обсуждаются в публикациях [15–17].

ВІМ-технологии. Применение цифровых технологий при проектировании стало неотъемлемой стороной при проведении проектирования и сопровождения технологических процессов. Водоподготовка не является исключением. Использование Building Information Model (BIM) только на этапе проектирования не раскрывает весь потенциал преимуществ этой технологии. BIM показывает свой потенциал на этапе строительства, как в области раннего планирования строительно-монтажных работ, составления графика и увязки их с графиками поставок оборудования, так и в плане материально-технических ресурсов, необходимых для нормального, ритмичного строительного процесса. Цифровизация, связь с единой моделью здания или сооружения, контроль и мониторинг строительных процессов и расходов материально-технического обеспечения – важнейшая задача обеспечения быстрого, экономичного и малозатратного строительства любых объектов, в том числе объектов промышленного производства. BIM на текущем этапе развития уже используется на всех этапах существования зданий, предприятий, технологий. Когда-то имевшая место имитационная модель предприятия может быть использована не только для планирования и оптимизации, но и для решения дальнейших вопросов, касающихся жизненного цикла предприятия. Модель можно использовать, например, для планирования концепций расширения этапов, для виртуального ввода в эксплуатацию систем автоматизации, для непрерывной оптимизации производительности и затрат на уборку, в качестве обучающего моделирования или в качестве компонента системы управления на основе модели.

Комплексное планирование систем автоматизации в сочетании со спецификациями механического оборудования и технологическими процессами требует использования BIM систем [18]. Растущее использование инструментов моделирования является компонентом общего цифрового планирования предприятий. Цифровые документы планирования являются современными (чертежи, документы) и становятся все более комплексными. Разумным сценарием применения является виртуальный ввод в эксплуатацию технологии автоматизации [19–22]. Преимущества такого подхода весьма разнообразны:

– рациональное использование материальных ресурсов;

– сокращение сроков ввода в эксплуатацию и простоев производственных процессов.

Так же существенно повышает эффективность использование постоянного уточнения моделей на этапе активного строительства.

Применительно к очистным сооружениям можно выделить, например, следующие причины:

– обеспечение качества (комплексное тестирование), аспект нехватки квалифицированных рабочих;

– испытание в сокращенное время, при этом реальный процесс характеризуется большими постоянными времени;

– тестирование комплексной автоматизации;

– тестирование стрессовых ситуаций (например, высокая нагрузка в дождливую погоду)

– проверка уровня ущерба;

– систематизация концепции автоматизации между оператором, проектировщиком процессов и инженером по автоматизации.

Комплексная автоматизация биологических процессов. Несмотря на ограничения биологических процессов на очистных сооружениях, существует интересный потенциал для их улучшения с помощью современных систем управления. Этот потенциал может быть использован для улучшения качества очистки сточных вод и повышения энергоэффективности.

Однако оптимальное использование этого потенциала является сложной междисциплинарной инженерной задачей. Если проследить за судьбой химически окисляемых веществ (ХПК) на очистных сооружениях (ОСВ), то можно увидеть, что значительная их часть окисляется (кислородом или нитратами). Часть, окисляемая кислородом, обеспечивает основную потребность в энергии очистных сооружений. Напротив, та часть, которая в конечном итоге присутствует в виде биогаза, может использоваться в качестве источника энергии (тепловой и электрической). Таким образом, доступны следующие возможности как для оптимизации процесса, так и для планирования концепций автоматизации, направленных на минимизацию энергопотребления:

– минимизация потребности в энергии для обеспечения необходимого кислорода;

– максимизация эффективности производства сжатого воздуха;

– минимизация избытка кислорода.

Кроме того, следует увеличить количество ХПК, доступной в виде биогаза, и в то же время уменьшить количество, подлежащее окислению. Оптимальное использование предварительной обработки и контроль возраста осадка.

Кроме того, доля аэробно-окисленного ХПК должна быть уменьшена в пользу бескислородного ХПК, т. е. максимальная денитрификация.

Помимо энергии, необходимой для подачи кислорода, требуется энергия для транспортировки сточных вод и активного ила, а также для смешивания и предотвращения осаждения ила. При эксплуатации насосов следует уделять внимание конструкции насосной системы и режиму работы с оптимальным КПД в каждом конкретном случае.

Почти все эти меры могут поддерживаться во время работы с помощью соответствующих функций управления.

Автоматизация с использованием моделирования. Как отмечалось выше, для обеспечения эффективного управления требуется учесть динамические аспекты аппаратов водоподготовки. Мощным инструментом для решения таких задач является использование моделирования. Чтобы иметь возможность анализировать взаимодействие между процессами, оборудованием и автоматизацией, необходимо проводить моделирование, которое можно использовать для описания взаимодействия всех компонентов [20].

Динамика процессов водоподготовки очень специфична. Для адекватности требуется учитывать нелинейные свойства этих процессов. В данном направлении можно встретить ряд готовых моделей. Так, для описания процессов биологического разложения доступны надежные модели активного ила, проверенные в течение многих лет. Некоторые наиболее распространенные из них: BLOWIN [23], AQUASIM [24], GPS-X [25], SIMBA [26], SUMO [27], WEST [28] и др.

Традиционные подходы к моделированию продолжают использоваться для задач водоподготовки [29, 30]. Однако следует отметить, что поиск параметров моделей часто происходит с помощью нечетких множеств, нейронных сетей или генетических алгоритмов.

Измерительные системы. Развитие измерительных систем для автоматизации водоподготовки не столь стремительно, как это было в прошлом веке. Используются все те же измерительные приборы, которые призваны оптимизировать реагентную обработку. Развитие технологии приборостроения позволило получить более удобные интерфейсы работы с измерительными приборами. Так, для оптимальной обработки осадков рекомендуются анализировать время фильтрации (TTF) [31], удельное сопротивление фильтрации (SRF) [9, 32, 33], время капиллярного всасывания (CST) [34, 35], скорость сдвига и напряжение [36], вязкость [33, 37] и электрокинетические свойства [38–41]. Некоторые исследователи идут дальше и создают программные сенсоры для управления дозировкой [42].

Насыщенность физическими приборами контроля может быть различна. Следует добавить,

что существуют и другие решения, например использование проводимости или пробной коагуляции. Пробная коагуляция (Jar testing) является вариантом фактического моделирования, когда малые пробы текущей среды подвергаются обработке разными дозами реагентов и по результатам наблюдений принимаются решения о текущей дозе. Несмотря на то, что этот подход широко используется в системах водоочистки, он может давать хорошие результаты только при медленном изменении качества обрабатываемой воды. Кроме этого, существует проблема, что условия протекания процессов в пробирке могут несколько отличаться от физико-химических процессов в ОСВ.

При оптимизации непрерывного управления дозировки коагулянтов преобладают приборы, представленные в таблице [43].

Датчики непрерывного контроля процессов коагуляции и фильтрации

Тип датчика	Контроль на входе	Коагуляция	Освещение	Фильтрация
pH	1	1	2	2
Мутность	1	3	1	1
Счетчик частиц	2	3	2	1
Поглощение ультрафиолета	1	1	2	2
SCD	2	1	3	3
Перепад давления	–	–	3	1

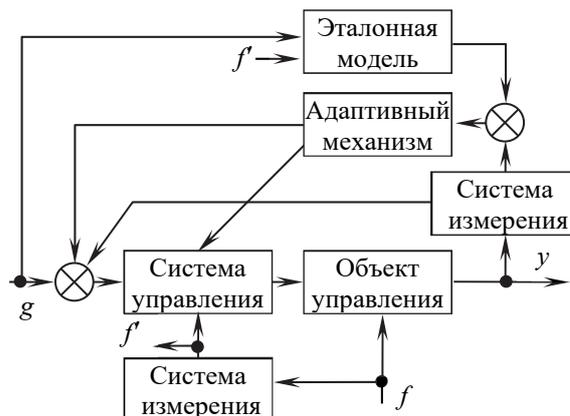
Следует добавить, что многие приборы контроля качества, которые применяются в системах управления, требуют качественного обслуживания для обеспечения достоверности получаемых измерений.

Оптимизация дозировки реагентов. При построении систем управления можно встретить два подхода [44]. С одной стороны, используется анализ физических принципов работы и выбор в качестве основы вышеупомянутых физических параметров CST, SCD, проводимость, размер частиц и т. д.

С другой стороны, можно встретить и системы по возмущению, что очень логично в условиях большой инерционности ОСВ. Иногда их дополняют системами с обратной связью, например по электрокинетическим характеристикам или проводимости. Существуют варианты по применению управления по эталонной модели. Структура адаптивного управления может иметь вид, приведенный на рисунке.

Однако следует отметить, что основной проблемой при построении систем управления является определение нужной дозировки реагентов. Поэтому структуру на рисунке следует дополнять элементами экстремального управления.

Но эффективность такого решения упирается в высокую инерционность процессов водоподготовки.



Система управления с эталонной моделью:
 g – вектор управления; y – вектор выходных параметров; f и f' – вектор возмущения и результат их измерения

Другим решением является использование статистики и различных подходов к анализу данных: модели искусственных нейронных сетей, анализ многомерной регрессии, модели нечеткой логики и поверхности отклика. Однако практическое применение модели упирается в обработку больших объемов данных, а также стохастический характер процессов водоподготовки, основанных на воде и факторах, связанных с технологическими процессами, для анализа данных.

Интересным решением может быть создание условий постоянного проведения «пробной» коагуляции (флокуляции). К примеру, устанавливаются параллельно три технологические цепочки обработки. Центральная цепочка может иметь максимальную производительность, а две крайние быть меньшего объема. Дозирование в крайние цепочки можно осуществлять меньше и больше в сравнении с центральной, но так, чтобы было достаточно для идентификации отличий между результатами обработки с помощью непрерывных систем измерения, например проводимости или мутности. Дозирование для обработки осадков можно осуществлять по тому же принципу, только для контроля можно использовать другие параметры: влажность осадка, CST или TTF.

Заключение. Анализ публикаций показывает, что существует большое количество решений подходов к применению информационных потоков и построению систем управления в процессах водоподготовки. В последнее время наибольшее внимание уделяется интеграции технологий нейронных сетей, нечетким множествам и гибридным алгоритмам. Их пытаются

применять во многих аспектах процессов водоподготовки. Но, как отмечают некоторые авторы, эти технологии могут помочь при быстрой оптимизации, обработке информации, но пока с их помощью нелегко учесть структурные и физические сложности процессов водоподготовки для успешного решения проблем. Возможно, нейронные сети могут оказаться полезными при анализе публикаций по этой теме, особенно

если будут иметь доступ к закрытым базам для дальнейшего поиска решений по оптимальному проектированию, технологическим аспектам, оптимизации дозировки и т. д. Видится хорошим решением для управления обработкой реагентами совместное проектирование технологий для достижения целей водоподготовки и эффективности использования возможностей теории управления.

Список литературы

1. Advances in Knowledge Discovery and Data Mining, American / U. M. Fayyad [et al.]. Cambridge, MA, USA: AAAI Press, 1996. 611 p.
2. Thuraisingham B. Data Mining: Technologies, Techniques, Tools, and Trends. Boca Raton, FL: CRC Press, 1998. 288 p.
3. Chau K.W. A review on integration of artificial intelligence into water quality modeling // Marine Pollution Bulletin. 2006. Vol. 52. P. 726–733.
4. Koroteev D., Tekic Z. Artificial intelligence in oil and gas upstream: Trends, challenges, and scenarios for the future // Energy AI, 2021. Vol. 3. P. 100041. DOI: 10.1016/j.egyai.2020.100041.
5. Lee D. S., Park J. M. Neural network modeling for on-line estimation of nutrient dynamics in a sequentially-operated batch reactor // Journal of Biotechnology. 1999. Vol. 75. P. 229–239.
6. Evaluation of the energy efficiency of a large wastewater treatment plant in Italy / D. Panepinto [et al.] // Applied Energy. 2016. Vol. 161. P. 404–411.
7. Energy feasibility study of sludge pretreatments. A review / R. Cano [et al.] // Applied Energy. 2015. Vol. 149. P. 176–185. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.03.132.
8. Minimization of sludge production by a side-stream reactor under anoxic conditions in a pilot plant / M. Coma [et al.] // Bioresource Technology. 2013. Vol. 129. P. 229–235.
9. Optimization of the wastewater treatment plant: From energy saving to environmental impact mitigation / S. Borzooei [et al.] // The Science of the Total Environment. 2019. Vol. 691. P. 1182–1189.
10. A performance indicators system for urban wastewater treatment plants / S. Quadros [et al.] // Water Science and Technology. 2010, Vol. 62. P. 2398–2407. DOI: 10.2166/wst.2010.526.
11. Fang F., Ni B. J., Yu H. Q. Estimating the kinetic parameters of activated sludge storage using weighted non-linear least-squares and accelerating genetic algorithm // Water Research. 2009. Vol. 43. P. 2595–2604. DOI: 10.1016/j.watres.2009.01.002.
12. Wu Y., Liu S. Automating calibration, sensitivity and uncertainty analysis of complex models using the R package Flexible Modeling Environment (FME): SWAT as an example // Environmental Modelling and Software. 2012. Vol. 31. P. 99–109. DOI: 10.1016/j.envsoft.2011.11.013.
13. Kim D., Bowen J. D., Ozelkan E. C. Optimization of wastewater treatment plant operation for greenhouse gas mitigation // Journal of Environmental Management. 2015. Vol. 163. P. 39–48.
14. Lal B., Nallakukkala S. Gas Hydrate in Water Treatment: Technological, Economic, and Industrial Aspects. NJ, USA, Hoboken: John Wiley & Sons; 2022. 325 p.
15. Optimal experimental design and artificial neural networks applied to the photochemically enhanced Fenton reaction / S. Göb [et al.] // Water Science and Technology. 2001. Vol. 44. P. 339–345.
16. Lek S., Guirese M., Giraudel J. L. Predicting stream nitrogen concentration from watershed features using neural networks // Water Research. 1999. Vol. 33. P. 3469–3478.
17. Maier H. R., Morgan N., Chow C. W. K. Use of artificial neural networks for predicting optimal alum doses and treated water quality parameters // Environmental Modelling and Software. 2004. Vol. 19. P. 485–494. DOI: 10.1016/S1364-8152(03)00163-4.
18. Alex J. Simulationsplattform zum integrierten Prozess- und Automatisierungsentwurf von Abwassersystemen // Automatisierungstechnik. 2015. Vol. 63 (7). P. 553–563.
19. Drath R., Weber P., Mauser N. An evolutionary approach for the industrial introduction of virtual commissioning // IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation, Hamburg, Germany, 2008. P. 5–8. DOI: 10.1109/ETFA.2008.4638359.
20. Virtual commissioning of manufacturing systems a review and new approaches for simplification / P. Hoffmann [et al.] // 24th European Conference on Modelling and Simulation, Kuala Lumpur, 2010. P. 175–181. DOI: 10.7148/2010-0175-0181.
21. The use of process simulation models in Virtual commissioning of process automation software in drinking water treatment plants / G. I. M. Worm [et al.] // Water Science & Technology: Water Supply. 2013. Vol. 13. P. 1331. DOI: 10.2166/ws.2013.131.

22. Wolf G., Pfeffer A. Integrierte virtuelle Inbetriebnahme // *Atp Magazin*. 2015. Vol. 57 (01-02). P. 68–79. DOI: 10.2166/ws.2013.131.
23. Kim M., Nakhla G., Keleman M. Modeling the impact of food wastes on wastewater treatment plants // *J. of Environmental Management*. 2019. Vol. 237. P. 344–358.
24. Comparison on biological nutrient removal and microbial community between full-scale an-aerobic/anoxic/aerobic process and its upgrading processes / K. Wang [et al.] // *Bioresource Technology*. 2023. Vol. 374. P. 128757. DOI: 10.1016/j.biortech.2023.128757.
25. How inoculation affects the development and the performances of microalgal-bacterial consortia treating real municipal wastewater / S. Petrini [et al.] // *J. of Environmental Management*. 2020. Vol. 263. P. 110427. DOI: 10.1016/j.jenvman.2020.110427.
26. Inoculum mixture optimization as strategy for to improve the anaerobic digestion of food waste for the methane production / B. Parra [et al.] // *J. of Environmental Chemical Engineering*. 2018. Vol. 6. P. 1529–1535. DOI: 10.1016/j.jece.2018.01.048.
27. Comprehensive evaluation of starter culture impact on the bioreactor performance and microbial kinetics / E. Demirkaya [et al.] // *Biochemical Engineering J.* 2021. Vol. 177. P. 108233.
28. An inoculum for the aerobic treatment of wastewaters with high concentrations of fats and oils / K. Tano-Debrah // *Bioresource Technology*. 1999. Vol. 69 (2). P. 133–139.
29. Magdi S. M. Coordinated Control of Waste Water Treatment Process // *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*. 2010. Vol. 90. P. 515–528. DOI: 10.1007/978-94-007-1192-1_41.
30. Ani V. A. Process Modelling and Simulation of a Simple Water Treatment Plant // *International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering*. 2016. Vol. 4 (4). P. 84–94.
31. Dentel S. K., Abu-Orf M. M., Walker C. A., Optimization of slurry flocculation and dewatering based on electrokinetic and rheological phenomena // *Chem. Eng. J.* 2000. Vol. 80. P. 65–72.
32. Zhao Y. Q. Correlation between floc physical properties and optimum polymer dosage in alum sludge conditioning and dewatering // *Chem. Eng. J.* 2003. Vol. 92. P. 227–235.
33. Zhao Y. Q., Papavasiliopoulos E. N., Bache D. H. Clogging of filter medium by excess polymer during alum sludge filtration // *Filtration & Separation*. 1998. Vol. 35 (10). P. 947–950.
34. Wu C. C., Huang C., Lee D. J. Effects of polymer dosage on alum sludge dewatering characteristics and physical properties // *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*. 1997. Vol. 122. P. 89–94. DOI: 10.1016/S0927-7757(97)00006-X.
35. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Measuring the speed of capillary soaking with adaptation regarding coordinates // *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, Lithuania, 2015. P. 1–4.
36. Bache D.H., Papavasiliopoulos E. N. On the role of aluminium hydroxide the conditioning of an alum sludge // *Water Sci. Technol.* 1998. Vol. 38 (2). P. 33–40.
37. Bache D. H., Papavasiliopoulos E. N. Viscous behavior of sludge centrate in response to polymer conditioning // *Water Res.* 2000. Vol. 34 (1). P. 354–358.
38. Automatic control of polymer dosage using streaming potential for waterworks sludge conditioning / S. Byun [et al.] // *Separation and Purification Technology*. 2007. Vol. 57 (2). P. 230–236.
39. Pyrite activated peroxymonosulfate combined with as a physical-chemical conditioner modified biochar to improve sludge dewaterability: analysis of sludge floc structure and de-watering mechanism / W. Gao // *Environmental Science and Pollution Research*. 2022. Vol. 29 (49). P. 74725–74741. DOI: 10.1007/s11356-022-21074-4.
40. Electrokinetic Converter using AN Unsteady Shift: A Quantitative Model / D. Hryniuk [et al.] // *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, Lithuania, 2019. P. 1–4.
41. Преобразователи электрокинетического потенциала гидродисперсных систем / Н. М. Богослав [и др.] // *Известия ТулГУ. Технические науки*. Вып. 3. Тула: Изд-во ТулГУ, 2011. С. 106–110.
42. Hernandez H. L., Lann M. V. Development of a neural sensor for on-line prediction of coagulant dosage in a potable water treatment plant in the way of its diagnosis // *In Advances in Artificial Intelligence-IBERAMIA-SBIA*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2006. P. 249–257.
43. Teefy S., Farmerie J., Pyles E. Jar test // *Operational Control of Coagulation and Filtration Processes*. Third ed. Denver, CO: American Water Works Association, 2011. P. 17–58.
44. Sheng D. P. W., Bilad M. R., Shamsuddin N. Assessment and optimization of coagulation process in water treatment plant: A Review // *ASEAN J. of Science and Engineering*. 2023. Vol. 3 (1). P. 81–100.

References

1. Fayyad U. M., Piatetsky-Shapiro G., Smyth P., Uthurusamy R. *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, American. Cambridge, MA, USA, AAAI Press Publ., 1996. 611 p.

2. Thuraisingham B. *Data Mining: Technologies, Techniques, Tools, and Trends*. Boca Raton, FL, CRC Press Publ., 1998. 288 p.
3. Chau K. W. A review on integration of artificial intelligence into water quality modeling. *Marine Pollution Bulletin*, 2006, vol. 52, pp. 726–733.
4. Koroteev D., Tekic Z. Artificial intelligence in oil and gas upstream: Trends, challenges, and scenarios for the future. *Energy AI*, 2021, vol. 3, pp. 100041. DOI: 10.1016/j.egyai.2020.100041.
5. Lee D. S., Park J. M. Neural network modeling for on-line estimation of nutrient dynamics in a sequentially-operated batch reactor. *Journal of Biotechnology*, 1999, vol. 75, pp. 229–239.
6. Panepinto D., Fiore S., Zappone M., Genon G., Meucci, L. Evaluation of the energy efficiency of a large wastewater treatment plant in Italy. *Applied Energy*, 2016, vol. 161, pp. 404–411.
7. Cano R., Pérez-Elvira S. I., Fdz-Polanco F. Energy feasibility study of sludge pretreatments. A review. *Applied Energy*, 2015, vol. 149, pp. 176–185. DOI: 10.1016/j.apenergy.2015.03.132.
8. Coma M., Rovira S., Canals J., Colprim, J. Minimization of sludge production by a side-stream reactor under anoxic conditions in a pilot plant. *Bioresource Technology*, 2013, vol. 129, pp. 229–235.
9. Borzooei S., Campo G., Cerutti A., Meucci L., Panepinto D., Ravina M., Riggio V., Ruffino B., Scibilia G., Zanetti M. Optimization of the wastewater treatment plant: From energy saving to environmental impact mitigation. *The Science of the Total Environment*, 2019, vol. 691, pp. 1182–1189.
10. Quadros S., Rosa M. J., Alegre H., Silva C. A performance indicators system for urban wastewater treatment plants. *Water Science and Technology*, 2010, vol. 62, pp. 2398–2407. DOI: 10.2166/wst.2010.526.
11. Fang F., Ni B. J., Yu H. Q. Estimating the kinetic parameters of activated sludge storage using weighted non-linear least-squares and accelerating genetic algorithm. *Water Research*, 2009, vol. 43, pp. 2595–2604. DOI: 10.1016/j.watres.2009.01.002.
12. Wu Y., Liu S. Automating calibration, sensitivity and uncertainty analysis of complex models using the R package Flexible Modeling Environment (FME): SWAT as an example. *Environmental Modelling and Software*, 2012, vol. 31, pp. 99–109. DOI: 10.1016/j.envsoft.2011.11.013.
13. Kim D., Bowen J. D., Ozelkan E. C. Optimization of wastewater treatment plant operation for greenhouse gas mitigation. *J. of Environmental Management*, 2015, vol. 163, pp. 39–48.
14. Lal B., Nallakukkala S. *Gas Hydrate in Water Treatment: Technological, Economic, and Industrial Aspects*. NJ, USA, Hoboken, John Wiley & Sons Publ., 2022. 325 p.
15. Göb S., Oliveros E., Bossmann S. H., Braun A. M., Nascimento C. A. O., Guardani R. Optimal experimental design and artificial neural networks applied to the photochemically enhanced Fenton reaction. *Water Science and Technology*, 2001, vol. 44, pp. 339–345.
16. Lek S., Guisresse M., Giraudel J. L. Predicting stream nitrogen concentration from watershed features using neural networks. *Water Research*, 1999, vol. 33, pp. 3469–3478.
17. Maier H. R., Morgan N., Chow C. W. K. Use of artificial neural networks for predicting optimal alum doses and treated water quality parameters. *Environmental Modelling and Software*, 2004, vol. 19, pp. 485–494. DOI: 10.1016/S1364-8152(03)00163-4.
18. Alex J. Simulationsplattform zum integrierten Prozess- und Automatisierungsentwurf von Abwassertechniken. *Automatisierungstechnik*, 2015, vol. 63 (7), pp. 553–563.
19. Drath R., Weber P., Mauser N. An evolutionary approach for the industrial introduction of virtual commissioning. *IEEE Symposium on Emerging Technologies and Factory Automation Publ.* Hamburg, Germany, 2008, pp. 5–8. DOI: 10.1109/ETFA.2008.4638359.
20. Hoffmann P., Schumann R., Maksoud T. M. A., Premier G. C. Virtual commissioning of manufacturing systems a review and new approaches for simplification. *24th European Conference on Modelling and Simulation*. Kuala Lumpur, 2010, pp. 175–181. DOI: 10.7148/2010-0175-0181.
21. Worm G. I. M., Kelderman J. P., Lapikas, T., van der Helm A. W. C., van Schagen K. M., Rietveld L. C. The use of process simulation models in Virtual commissioning of process automation software in drinking water treatment plants. *Water Science & Technology: Water Supply*, 2013, vol. 13, p. 1331. 10.2166/ws.2013.131.
22. Wolf G., Pfeffer, A. Integrierte virtuelle Inbetriebnahme. *Atp Magazin*, 2015, vol. 57 (01-02), pp. 68–79. DOI: 10.2166/ws.2013.131.
23. Kim M., Nakhla G., Keleman M. Modeling the impact of food wastes on wastewater treatment plants. *J. of Environmental Management*, 2019, vol. 237, pp. 344–358.
24. Wang K., Zhou C., Zhou H., Jiang M., Chen G., Wang C., Zhang Z., Zhao X., Jiang L.-M., Zhou Z. Comparison on biological nutrient removal and microbial community between full-scale an-aerobic/anoxic/aerobic process and its upgrading processes. *Bioresource Technology*, 2023, vol. 374, pp. 128757. DOI: 10.1016/j.biortech.2023.128757.
25. Petrini S., Foladori P., Beghini F., Armanini F., Segata N., Andreottola G. How inoculation affects the development and the performances of microalgal-bacterial consortia treating real municipal wastewater. *J. of Environmental Management*, 2020, vol. 263, pp. 110427. DOI: 10.1016/j.jenvman.2020.110427.

26. Parra-Orobio B. A., Angulo-Mosquera L. S., Loaiza-Gualtero J. S., Torres-López W., Torres-Lozada P. Inoculum mixture optimization as strategy for to improve the anaerobic digestion of food waste for the methane production. *J. of Environmental Chemical Engineering*, 2018, vol. 6, pp. 1529–1535. DOI: 10.1016/j.jece.2018.01.048.
27. Demirkaya E., Ciftcioglu B., Ozyildiz G., Zengin G. E., Pala-Ozkok I., Cokgor E., Tas D. O. Comprehensive evaluation of starter culture impact on the bioreactor performance and microbial kinetics. *Biochemical Engineering J.*, 2021, vol. 177, pp. 108233.
28. Tano-Debrah K., Fukuyama S., Otonari N., Taniguchi F., Ogura M. An inoculum for the aerobic treatment of wastewaters with high concentrations of fats and oils. *Bioresource Technology*, 1999, vol. 69 (2), pp. 133–139.
29. Magdi S. M. Coordinated Control of Waste Water Treatment Process. *Lecture Notes in Engineering and Computer Science*, 2010, vol. 90, pp. 515–528. DOI: 10.1007/978-94-007-1192-1_41.
30. Ani V. A. Process Modelling and Simulation of a Simple Water Treatment Plant. *International Journal of Intelligent Systems and Applications in Engineering*, 2016, vol. 4 (4), pp. 84–94.
31. Dentel S. K., Abu-Orf M. M., Walker C. A., Optimization of slurry flocculation and dewatering based on electrokinetic and rheological phenomena. *Chem. Eng. J.*, 2000, vol. 80, pp. 65–72.
32. Zhao Y. Q. Correlation between floc physical properties and optimum polymer dosage in alum sludge conditioning and dewatering. *Chem. Eng. J.*, 2003, vol. 92, pp. 227–235.
33. Zhao Y. Q., Papavasiliopoulos E. N., Bache D. H. Clogging of filter medium by excess polymer during alum sludge filtration. *Filtration & Separation*, 1998, vol. 35 (10), pp. 947–950.
34. Wu C.C., Huang C., Lee D.J. Effects of polymer dosage on alum sludge dewatering characteristics and physical properties. *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Aspects*, 1997, vol. 122, pp. 89–94. DOI: 10.1016/S0927-7757(97)00006-X.
35. Oliferovich N., Hryniuk D., Orobei I. Measuring the speed of capillary soaking with adaptation regarding coordinates. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, Lithuania, 2015, pp. 1–4.
36. Bache D. H., Papavasiliopoulos E. N. On the role of aluminium hydroxide the conditioning of an alum sludge. *Water Sci. Technol.*, 1998, vol. 38 (2), pp. 33–40.
37. Bache D. H., Papavasiliopoulos E. N. Viscous behavior of sludge centrate in response to polymer conditioning. *Water Res.*, 2000, vol. 34 (1), pp. 354–358.
38. Byun S., Kwon J.-H., Kim M.-h., Park K.-y., Lee S. Automatic control of polymer dosage using streaming potential for waterworks sludge conditioning. *Separation and Purification Technology*, 2007, vol. 57 (2), pp. 230–236.
39. Gao W., Song L., Wang Z., Xuan L. Pyrite activated peroxymonosulfate combined with as a physical-chemical conditioner modified biochar to improve sludge dewaterability: analysis of sludge floc structure and de-watering mechanism. *Environmental Science and Pollution Research*, 2022, vol. 29 (49), pp. 74725–74741. DOI: 10.1007/s11356-022-21074-4.
40. Hryniuk D., Orobei I., Oliferovich N., Suhorukova I. Electrokinetic Converter using AN Unsteady Shift: A Quantitative Model. *Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream): Open Conference*. Vilnius, 2019, pp. 1–4. DOI: 10.1109/eStream.2019.8732159.
41. Bogoslav N. M., Suhorukova I. G., Hryniuk D. A., Orobei I. O., Orobei O. I. Converters of the electrokinetic potential of hydrodispersed systems. *Izvestiya TulGU [Izvestiya TulGU]*, 2011, no. 3, pp. 106–110 (In Russian).
42. Hernandez H. L., Lann M. V. Development of a neural sensor for on-line prediction of coagulant dosage in a potable water treatment plant in the way of its diagnosis. *In Advances in Artificial Intelligence-IBERAMIA-SBIA 2006*. Berlin; Heidelberg, Springer Publ., 2006, pp. 249–257.
43. Teefy S., Farmerie J., Pyles E. Jar test. *Operational Control of Coagulation and Filtration Processes*, third ed. Denver, CO, American Water Works Association Publ., 2011, pp. 17–58.
44. Sheng D. P. W., Bilad M. R., Shamsuddin N. Assessment and optimization of coagulation process in water treatment plant: A Review. *ASEAN J. of Science and Engineering*, 2023, vol. 3 (1), pp. 81–100.

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniukda@gmail.com

Олиферович Надежда Михайловна – старший преподаватель кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Оробей Игорь Олегович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniukda@gmail.com

Oliferovich Nadezhda Mikhaylovna – Senior Lecturer, the Department of Automation Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Software Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Orobei Igor Olegovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

Поступила после доработки 25.04.2024

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ALGORITHMIC AND PROGRAMMING

УДК 004.738.5

Я. А. Игнаткова, Н. П. Шутько

Белорусский государственный технологический университет

АЛГОРИТМЫ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОМБИНИРОВАННОЙ ОЦЕНКИ ДОСТУПНОСТИ ВЕБ-КОНТЕНТА

В статье рассмотрен метод комбинированной оценки доступности веб-контента, базирующийся на совмещении логики автоматизированного и ручного тестирования веб-ресурсов. Данный метод позволяет существенно сократить время, необходимое для тестирования доступности ресурсов, а также минимизировать затраты на его проведение. Комбинированный подход обеспечивает более точную и подробную оценку, учитывающую различные аспекты доступности и удобства использования. Внедрение предложенного метода может повысить качество веб-контента, делая его более инклюзивным для пользователей с ограниченными возможностями.

В контексте метода определены группы критериев оценки доступности и их весовые коэффициенты. Представлена формула для расчета весовых коэффициентов, основанная на ранжировании групп по ряду выделенных параметров. Выведены формулы для расчета коэффициентов критериев, количества исключительных ситуаций, оценок по критерию и по группе. Логика представленного метода отражена в четырех алгоритмах его реализации. Основной алгоритм включает шесть этапов: получение файла или ссылки на ресурс, выбор групп проверки и пересчет их коэффициентов, определение вида проверки для каждой из групп, проведение тестирования выбранного вида, пересчет коэффициентов и вычисление итогового значения по группе, расчет итоговой оценки. Три дополнительных алгоритма описывают логику проведения видов проверки: ручной, автоматической и полуавтоматической. Алгоритм ручной проверки включает в себя этапы вывода вопросов для тестирования, обработки результатов, определения количества исключительных ситуаций и сохранения результатов. Алгоритм автоматической проверки подобен ручному, однако этапы вывода вопросов и обработки ответов заменяются на запрос и обработку данных с ресурса. Основная логика алгоритма полуавтоматической проверки заключается в автоматическом сборе данных о характеристиках веб-страницы, обработке их и передачи для проверки тестировщику.

Ключевые слова: доступность веб-контента, автоматизация тестирования, юзабилити, методы и алгоритмы.

Для цитирования: Игнаткова Я. А., Шутько Н. П. Алгоритмы реализации метода комбинированной оценки доступности веб-контента // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 80–88.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-11.

Ya. A. Ignatkova, N. P. Shut'ko

Belarusian State Technological University

ALGORITHMS FOR THE IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF COMBINED ASSESSMENT OF THE AVAILABILITY OF WEB CONTENT

The article discusses a method for combined assessment of web content accessibility based on combining the logic of automated and manual testing of web resources. This method can significantly reduce the time required to test resource accessibility, as well as minimize the costs of its implementation. The combined approach provides a more accurate and detailed assessment that takes into account various aspects of accessibility and usability. The implementation of the proposed method can improve the quality of web content, making it more inclusive for users with disabilities.

In the context of the method, groups of accessibility assessment criteria are identified and their weighting factors are determined. A formula for calculating the weighting factors is presented, based on ranking groups by a number of selected parameters. Formulas are derived for calculating the criterion coefficients, the number of exceptional situations, assessments by criterion and by group. The logic of the presented method is reflected in four algorithms for its implementation. The basic algorithm includes six stages: obtaining a

file or a link to a resource, selecting test groups and recalculating their coefficients, determining the type of test for each group, testing the selected type, recalculating the coefficients and calculating the final value for the group, calculating the final score. Three additional algorithms describe the logic of conducting the types of testing: manual, automatic and semi-automatic. The manual testing algorithm includes the stages of outputting questions for testing, processing the results, determining the number of exceptional situations and saving the results. The automatic testing algorithm is similar to the manual one, but the stages of outputting questions and processing answers are replaced by a request and processing of data from the resource. The basic logic of the semi-automatic testing algorithm is to automatically collect data on the characteristics of the web page, process them and transfer them to the tester for verification.

Keywords: accessibility of web content, automation of testing, usability, methods, and algorithms.

For citation: Ignatkova Ya. A., Shut'ko N. P. Algorithms for the implementation of the method of combined assessment of the availability of web content. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 80–88 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-11.

Введение. Развитие информационных технологий привело к тому, что выполнение большинства бытовых задач перенесено на веб-сайты, платформы и приложения. Совершить покупку, оплатить счета, узнать погоду, просмотреть новости и многое другое можно посредством сети Интернет. Повышается спрос на ресурсы, предоставляющие подобные возможности, из-за чего растет конкуренция среди них. Поэтому помимо улучшения и расширения функциональных возможностей веб-ресурсов, большое внимание уделяется проработке удобства их использования и доступности.

В первую очередь наличие доступных ресурсов для получения и обмена информацией необходимо в сферах здравоохранения, образования и государственного информирования. Большинство существующих подобных веб-сайтов частично или полностью не соответствуют требованиям доступности, что подчеркивает актуальность создания новых средств и инструментов для ее оценки.

Основная задача доступности заключается в проектировании и разработке веб-сайтов, онлайн-приложений и систем, позволяющих беспрепятственно искать и получать информацию, а также общаться посредством сети Интернет людям с ограниченными возможностями. При этом важно помнить, что в условиях ситуационных ограничений (нестандартный размер устройства, временные нарушения зрения и двигательной активности) может оказаться практически любой человек [1].

Требования доступности регламентируются рядом международных и государственных стандартов [2]. Для стран СНГ основным подобным стандартом является ГОСТ Р 52872–2019 [3], который, как и большинство других, базируется на WCAG – руководстве по обеспечению доступности веб-контента [4]. Оно имеет несколько версий и состоит из ряда уровней, которые позволяют поэтапно выделить наиболее важные характеристики веб-сайта и критерии его оценки [5]. Критерии, связанные со структурой, оформлением и версткой, частично совпадают с требованиями юзабилити. Поэтому их соблюдение

может существенно повысить не только удобство использования, но и доступность веб-ресурса [6].

На данный момент существует несколько методов оценки доступности веб-контента [7]. Метод экспертной, или эвристической, оценки требует привлечения специалистов, имеющих опыт в области доступности и знания о конкретных стандартах, таких как WCAG.

Другим методом является юзабилити-тестирование, при котором для определения уровня доступности интерфейса привлекаются реальные пользователи. По итогам выполнения ими специально подобранных задач, основанных на реальных сценариях использования, формируется вывод о степени доступности ресурса для представителей каждой из групп.

Самым неудобным и трудозатратным является метод самооценки веб-ресурса. Для него разработчику необходимо изучить стандарты доступности и при помощи чек-листов, представленных в руководстве WCAG, вручную провести проверку [8].

Данную задачу можно частично автоматизировать при помощи различных программ и онлайн-сервисов, которые позволяют определить соответствие ресурса требованиям WCAG [9]. Существуют также браузерные расширения, задействующие искусственный интеллект при анализе веб-страницы. Их основными преимуществами являются скорость и простота использования, но полученные данные часто малоинформативны и сложны в интерпретации [10].

Все перечисленные методы требуют значительных финансовых и временных затрат. Поскольку при создании веб-продукта необходимо протестировать его характеристики с наименьшими затратами, актуальной задачей является нахождение способа улучшения или оптимизации существующих методов оценки доступности. В процессе изучения ранее упомянутых методов было выявлено, что наиболее популярными и простыми в реализации считаются автоматизированное тестирование и самооценка ресурса. Однако каждый из них имеет существенные

недостатки. В первом случае – это сложность при оценке результатов и отсутствие гибкой настройки. Во втором – повышенная вероятность допустить ошибку и необходимость повторения однотипных проверок длительное время. Чтобы нивелировать недостатки и наиболее эффективно использовать преимущества этих методов, был разработан метод комбинированной оценки доступности веб-ресурсов.

Основная часть. Основными задачами комбинированного метода являются: автоматизация проведения однотипных проверок, повышение скорости ручного тестирования и создание логики гибкой настройки критериев проверки.

При анализе требований, предъявляемых к доступности веб-контента стандартом WCAG, были выделены закономерности, позволившие распределить их по пяти группам: навигация и управление, визуальная, аудиальная, физическая и когнитивная доступности. Однако значимость критериев групп для стандартного веб-ресурса не одинакова. Чтобы количественно отразить приоритетность группы, были введены весовые коэффициенты FS_i . Для их расчета выделены два типа требований: общие и по виду ограничений. Общие требования представляют собой ряд критериев, проверяющих удобство использования ресурса любыми пользователями, а не только с ограничениями. Для второго типа требований были определены отдельные виды ограничений и их весовые коэффициенты: по слуху (0,30), по зрению (0,25), по особенностям опорно-двигательного аппарата (0,35) и когнитивные (0,10). Коэффициенты для каждого вида ограничений определялись на основании статистических данных о посещении веб-ресурсов пользователями с ограниченными возможностями [11].

Группы критериев были проранжированы по каждому виду ограничений. Полученные значения умножались на выбранные весовые коэффициенты для нахождения итогового значения по каждой группе. Более подробно о результатах ранжирования критериев и расчете итоговых коэффициентов описано в публикации [12].

Полученные весовые коэффициенты представлены в табл. 1.

Таблица 1

Соотношение весовых коэффициентов и групп доступности

Группа доступности	Весовой коэффициент
Когнитивная	0,26
Визуальная	0,22
Навигация и управление	0,26
Физическая	0,16
Аудиальная	0,10

Поскольку тематика веб-ресурсов разнообразна, был введен механизм пересчета весовых коэффициентов, который позволяет исключить одну или несколько групп при проведении тестирования. Для этого сначала необходимо определить количество исключаемых групп (X), а после найти их сумму. Так как сумма весовых коэффициентов всех групп составляет единицу, для пересчета была выбрана формула

$$WIF_i' = \frac{WIF_i}{1 - \sum_{j=1}^X WIF_j}, \quad (1)$$

где WIF_i' – новое значение коэффициента; WIF_i – первоначальное значение коэффициента; WIF_j – значения исключенных коэффициентов.

Использование данной формулы позволяет увеличивать вес коэффициентов пропорционально их первоначальному значению. Например, если исключить проверку по критериям групп визуальной, когнитивной и физической доступностей, то для оставшихся групп получим значения:

$$WIF_1' = \frac{0,26}{1 - (0,22 + 0,26 + 0,16)} = 0,72;$$

$$WIF_2' = \frac{0,10}{1 - (0,22 + 0,26 + 0,16)} = 0,28.$$

При анализе критериев оценки по каждой из групп было установлено, что для проверки некоторых из них нужен тестировщик, для других возможна полная автоматизация, а для третьих необходимо комбинирование автоматического анализа данных с последующей ручной оценкой.

В табл. 2 представлено соотношение вида проверки к группе.

Таблица 2

Соотношение группы доступности к виду проверки

Группа доступности	Вид проверки		
	ручная	автоматическая	полуавтоматическая
Когнитивная	+	–	–
Визуальная	+	+	+
Навигация и управление	+	+	+
Физическая	–	+	+
Аудиальная	–	+	+

В каждой группе вне зависимости от вида проверки существует определенное количество критериев (N). Для каждого подобного критерия весовой коэффициент будет вычисляться по формуле

$$LWF_i = \frac{1}{N}, \quad (2)$$

где LWF_i – весовой коэффициент критерия; N – общее число критериев в группе.

Поскольку стандарт WCAG формулирует требования, соответствующие всем возможным характеристикам ресурса, может возникнуть ситуация, что для каких-либо ресурсов оценить корректность тех или иных критериев не представляется возможным. Это необходимо учитывать при расчете общей оценки по группе. Для определения количества подобных ситуаций (E) при ручных или автоматических проверках необходимо при оценке каждого критерия предполагать следующие возможные значения:

- положительный ответ – 1;
- неполный ответ – 0,5;
- отрицательный ответ – 0;
- данный критерий невозможно оценить на сайте – -1.

Неполным стоит считать ответ, когда некоторые критерии выполнены верно, а остальные – нет либо же когда элемент не полностью соответствует требованиям доступности. При получении значения -1 после анализа корректности критерия количество исключений (E) должно увеличиться.

Например, примем, что в группе «Навигация и управление» всего 15 критериев ($N = 15$). Изначально весовой коэффициент каждого из них рассчитывается по формуле (2):

$$LWF_i = \frac{1}{N} = \frac{1}{15} = 0,067.$$

Предположим, что три критерия невозможно оценить. Тогда новый весовой коэффициент будет определяться по формуле

$$LWF_i' = \frac{1}{N - E}, \quad (3)$$

где LWF_i' – новое значение коэффициента; E – количество исключений.

В данном примере он составит

$$LWF_i' = \frac{1}{15 - 3} = 0,083.$$

При этом, если три вышеупомянутых критерия оцениваются как отрицательные, то значения коэффициента не меняются. Подобный подход позволяет грамотно рассчитывать оценку и не терять баллы при наличии исключений.

В ситуации, когда критерий включает в себя проверку большого количества однотипных элементов, за итоговое значение берется число, вычисляемое по формуле

$$FV_i = \frac{CE_i}{TE_i}, \quad (4)$$

где CE_i – количество верно оформленных элементов; TE_i – общее число элементов.

Например, предположим, что в группе «Визуальная доступность» 25 критериев оценки (N). Допустим, что их все возможно оценить и пересчет коэффициентов не требуется. Тогда весовой коэффициент каждого критерия будет рассчитан по формуле (2):

$$LWF_i = \frac{1}{N} = \frac{1}{25} = 0,04.$$

Один из критериев данной группы – наличие связи тега <label> с тегом <input>. Предположим, что на тестируемом ресурсе 12 тегов <input> (TE), но только 9 (CE) из них связаны с тегом <label>. Тогда для расчета итогового значения по данному критерию будет использована формула (4) и получено значение:

$$FV_i = \frac{CE_i}{TE_i} = \frac{9}{12} = 0,75.$$

После проведения оценки критериев каждой из групп сумму их итоговых значений необходимо умножить на соответствующий весовой коэффициент (возможно пересчитанный), что отражено в формуле

$$FR_i' = \sum_{i=1}^N FV_i \cdot LWF_i, \quad (5)$$

где FR_i' – общая оценка группы.

Для нахождения итоговой оценки всего ресурса необходимо рассчитать сумму произведения коэффициента группы на полученное значение (FR_i) по формуле

$$FA = \sum_{i=1}^5 WF_i \cdot FR_i. \quad (6)$$

Поскольку весовые коэффициенты на каждом этапе расчетов в сумме дают единицу, то итоговая оценка ресурса (FA) будет принимать значение от 0 до 1.

Для определения логики реализации полученного метода был разработан алгоритм. Он состоит из шести этапов:

- получение файла или ссылки для анализа;
- определение количества групп и пересчет их коэффициентов при необходимости;
- определение вида проверки для каждой из групп;
- осуществление выбранного вида проверки по отдельным алгоритмам;
- пересчет весовых коэффициентов критериев и вычисление итогового значения по группе;
- расчет итоговой оценки.

На первом этапе необходимо получить доступ к анализируемому файлу с разметкой. Это может быть как физический HTML-файл, так и ссылка на веб-страницу.

На втором этапе происходит выбор группы критериев тестирования. Логика метода предполагает

выбор любого количества групп для получения более точного результата с учетом специфики ресурса. Обозначим их общее число как D . Если были выбраны все группы, то их весовые коэффициенты остаются неизменными и можно переходить к этапу анализа. Если же выбрано более одной, но менее D групп – необходимо произвести пересчет весовых коэффициентов по формуле (1).

Третий этап – выбор вида проверки. Поскольку при анализе параметров веб-страницы необходимо повторить однотипные виды проверки в каждой из групп, обозначим порядковый номер группы проверки как i . Как было отмечено ранее, в каждой группе существует три варианта типа проверки (M): ручная, автоматическая, полуавтоматическая. Для каждой из групп существуют различные комбинации типов проверки, соотношение которых ранее было представлено в табл. 2.

Обозначим j -й тип проверки i -й группы как A_{ij} . Если A_{ij} равно единице, то можно сказать, что для данной группы необходимо провести проверку выбранного типа.

На следующем этапе производится выбранная проверка по одному из алгоритмов.

Рассмотрим первый из них – ручной. Основной его задачей является вывод вопросов с вариантами ответа для заполнения тестирующим и последующей обработкой результатов. Обозначим общее число вопросов как C , а номер текущего вопроса как k . При проверке ответа на каждый вопрос (QW_k) требуется узнать, был ли данный вопрос отмечен тестирующим как невозможный для оценивания. Если это так, то счетчик исключений (E) требуется увеличить на один. После проверки всех вопросов нужно передать полученные ответы и количество исключений E на следующий этап. Блок-схема алгоритма представлена на рис. 1.

Второй вид проверки – автоматический. Алгоритм его проведения подобен рассмотренному выше. Только этапы вывода вопросов и обработки ответов заменяются на запрос данных с веб-страницы и их анализ соответственно.

Блок-схема алгоритма третьего вида проверки представлена на рис. 2. Логика данного вида проверки базируется на комбинации первых двух. Основная суть его заключается в автоматическом сборе данных о характеристиках веб-страницы, обработке их и передаче для проверки тестирующему. Это необходимо для проверки критериев, связанных с тематикой анализируемого сайта.

Например, одним из требований визуальной доступности является наличие корректного описания в атрибуте `alt` у тега ``. При проведении автоматической проверки можно убедиться лишь в наличии заполненного атрибута, но невозможно оценить, насколько описание в нем подходит к соответствующей картинке. Для этой задачи необходим человек, знающий тематику сайта.

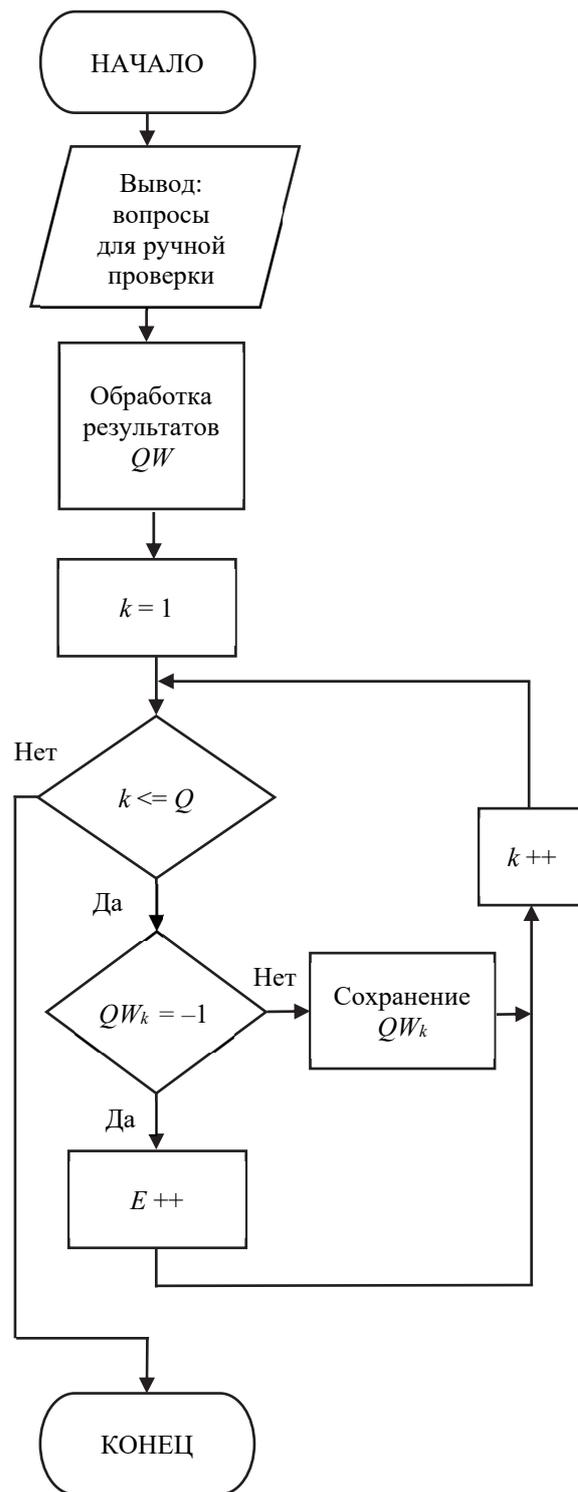


Рис. 1. Блок-схема алгоритма ручного вида проверки

Другим примером может служить еще одно требование визуальной доступности – выделение важных и тематических слов и словосочетаний тегами `` и ``. Наличие и содержимое этих тегов также можно считать автоматически, а проверку содержимого необходимо производить вручную.

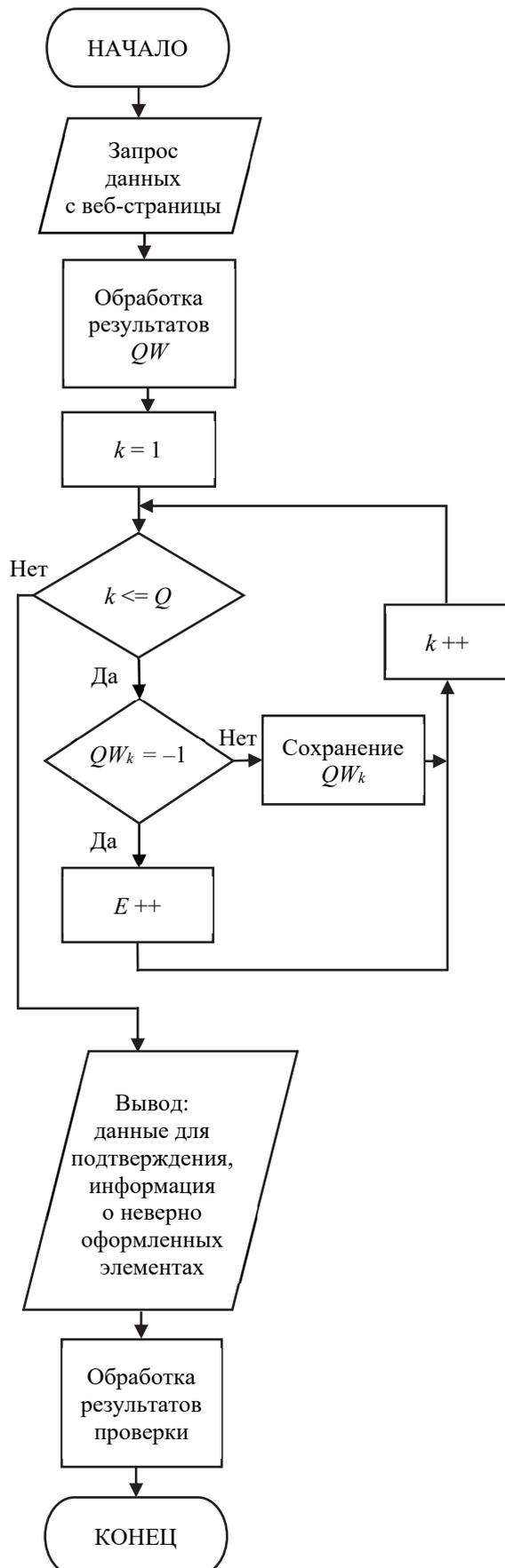


Рис. 2. Блок-схема алгоритма полуавтоматического вида проверки

После получения результатов тестирования следует проверить наличие исключений, как и в остальных видах проверок.

Первоначально происходит запрос данных об определенном ряде параметров, которые зависят от группы проверки. На этом же этапе необходимо проверить наличие исключений и увеличить их счетчик (E) в случае, когда они есть. Например, если тегов `` нет на веб-странице, то и проверять наличие у них атрибутов бессмысленно.

Полученные результаты необходимо вывести тестирующему для подтверждения правильности заполнения атрибутов и применения специфических тегов. После получения его ответов необходимо сохранить результат и перейти к следующему этапу основного алгоритма.

Если после проведения проверок нужного вида для каждой группы возникли исключения, то на пятом этапе работы основного алгоритма необходимо пересчитать весовой коэффициент критерия по формуле (3).

Далее следует рассчитать итоговое значение по группе, используя формулу (5).

На заключительном, шестом этапе, необходимо найти итоговую оценку доступности веб-контента анализируемого ресурса по формуле (6). Блок-схема всех этапов основного алгоритма представлена на рис. 3.

Полученная оценка позволит количественно отразить уровень доступности веб-контента, что в дальнейшем можно будет использовать при расчете общей оценки юзабилити ресурса.

Рассмотренные метод и алгоритмы позволяют существенно упростить процесс тестирования доступности веб-ресурсов. За счет комбинирования преимуществ двух распространенных методов тестирования получилось минимизировать их недостатки.

Представленный метод имеет следующие особенности, повышающие его эффективность:

- разбиение критериев доступности по группам, за счет чего проводимая проверка может быть узконаправленной и точечной;
- возможность комбинировать группы критериев оценки в зависимости от тематики сайта, т. е. общая оценка не будет понижаться из-за несоблюдения критериев, которые не характерны ресурсу;
- учет ситуаций, когда критерий невозможно оценить из-за его отсутствия;
- повышение скорости проверки однотипных элементов и их атрибутов;
- получение точного итогового значения, которое численно описывает уровень доступности контента на веб-ресурсе.

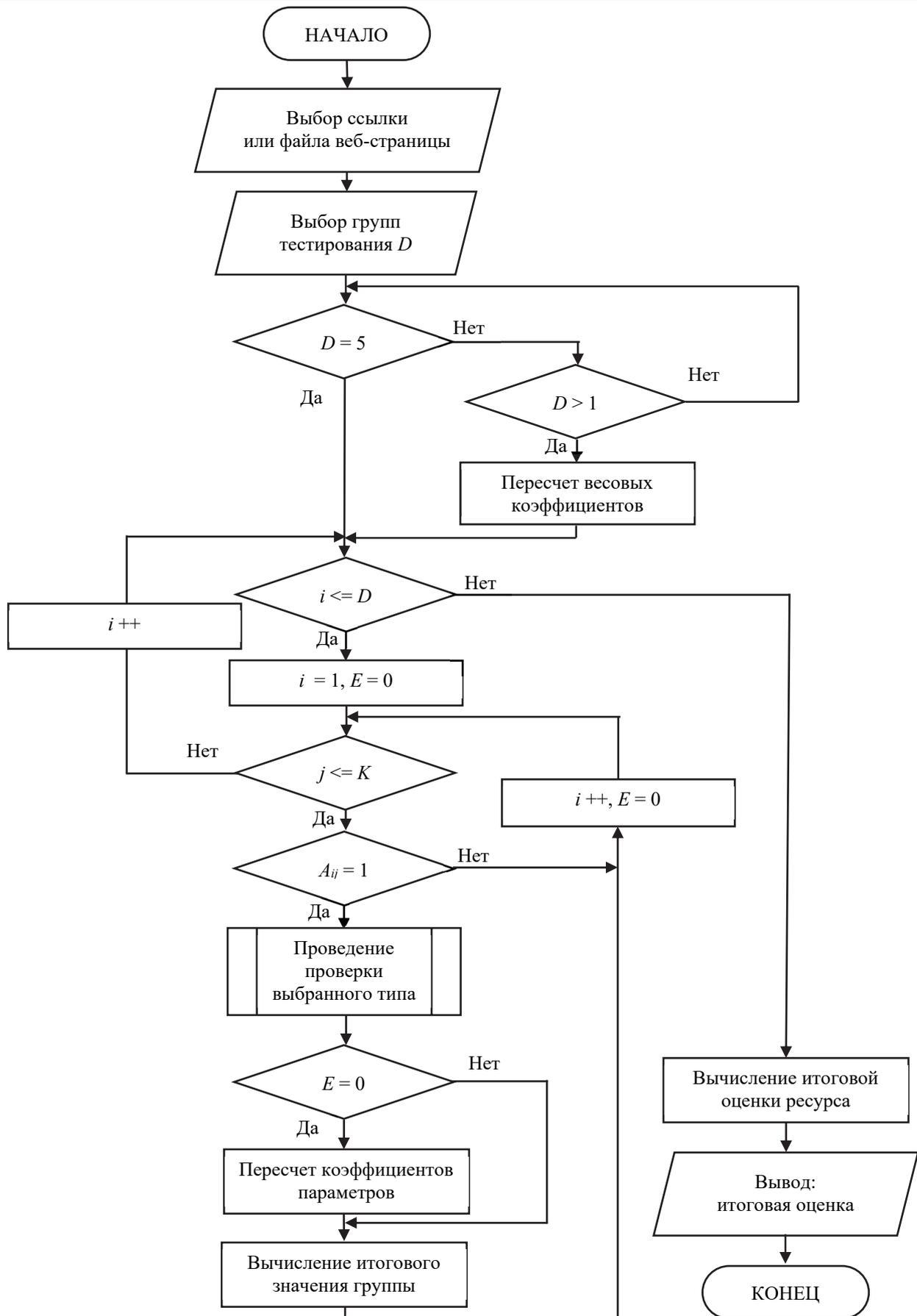


Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода комбинированной оценки доступности

Разработанные алгоритмы методов оценки доступности веб-контента позволяют структурировать логику их работы и определять порядок действий при тестировании.

Представленные алгоритмы видов проверок помогают понять, как выстраивать логику проведения ручного, автоматического или полуавтоматического тестирования.

Заключение. В статье рассмотрен метод комбинированной оценки доступности веб-контента, базирующийся на совмещении логики ручного и автоматического тестирования. Определены группы проверок, приведены значения их весовых коэффициентов и формулы для пересчета. Выделены виды

критериев оценивания групп и алгоритмы расчета их коэффициентов.

Кроме того, составлен и описан алгоритм реализации метода, который включает в себя шесть этапов: получение файла или ссылки на веб-страницу, выбор групп проверки и их весовых коэффициентов, определение вида проверки, осуществление тестирования, пересчет коэффициентов критериев и расчет общей оценки. Отдельно описаны алгоритмы для каждого вида проверки.

Разработанный метод и алгоритмы могут использоваться также при тестировании доступности и юзабилити веб-контента любых ресурсов: локально хранящихся на компьютере или размещенных в сети Интернет.

Список литературы

1. Манохина Т. В. Юзабилити интерфейсов информационных систем для людей с ограниченными возможностями здоровья // Проблемы управления качеством образования: сб. ст. XII Всерос. науч.-практ. конф., Пенза, 18–19 дек. 2019 г. Пенза, 2019. С. 120–124.
2. Косова Е. А. Стандартизация доступности веб-контента // Открытое образование. 2020. Т. 24, № 3. С. 12–23.
3. Интернет-ресурсы. Требования доступности для инвалидов по зрению: ГОСТ Р 52872–2012 // Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. URL: <http://docs.cntd.ru/document/> (дата обращения: 24.01.2024).
4. W3C Accessibility Guidelines (WCAG) 3.0 // W3C Working Draft. URL: <https://www.w3.org/TR/wcag-3.0/> (date of access: 10.02.2024).
5. Игнаткова Я. А., Шутько Н. П. Доступность веб-контента как неотъемлемый параметр качественного веб-сайта // Прикладные вопросы точных наук: материалы VI Междунар. науч.-практ. конф. студентов, аспирантов, преподавателей. Армавир, 28–29 дек. 2022 г. Армавир, 2022. С. 162–165.
6. Игнаткова Я. А. Повышение юзабилити веб-сайта за счет улучшения доступности веб-контента // Юзабилити в дизайне – дизайн для человека: сб. тез. междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 26 июня 2023 г. СПб., 2023. С. 22–24.
7. Назаров Д. М. Методы оценки юзабилити и доступности веб-сайтов электронной коммерции // Integral – Международный журнал прикладных наук и технологий. 2022. № 4. С. 1150–1159.
8. Heydon Pickering Inclusive Design Patterns: Coding Accessibility Into Web Design // Smashing Magazine. 2016. URL: <https://www.smashingmagazine.com/ebooks/inclusive-design-patterns-ebook/> (date of access: 22.02.2024).
9. Гаджиев М. Г., Журавлева Н. А., Шайдуллоев А. А. Инструменты для анализа доступности сайтов // Инновационные технологии современной научной деятельности: стратегия, задачи, внедрение: материалы междунар. науч.-практ. конф., Магнитогорск, 6 июня 2022 г. Магнитогорск, 2022. С. 27–31.
10. Игнаткова Я. А., Шутько Н. П. Возможности использования искусственного интеллекта для оценки и повышения доступности веб-ресурсов // Технологическая независимость и конкурентоспособность Союзного государства, стран СНГ, ЕАЭС и ШОС: сб. ст. VI Междунар. науч.-техн. конф., Минск, 6–8 дек. 2023 г.: в 2 т. Минск, 2023. Т. 1. С. 214–219.
11. Альтовский Е. В., Демидов А. А., Краснова Г. А. Доступность интернет-ресурсов инвалидам и лицам с ограниченными возможностями: информационно-аналитический обзор. М.: Изд. дом «Дело», 2021. 114 с.
12. Игнаткова Я. А., Шутько Н. П. Метод комбинированной оценки доступности веб-ресурсов // Информационные технологии. Физика и математика: материалы 88-й науч.-техн. конф. профес.-преподават. состава, науч. сотрудников и аспирантов, Минск, 29 янв. – 16 февр. 2024 г. Минск, 2024. С. 163–167.

References

1. Manokhina T. V. Usability of information system interfaces for people with disabilities. *Problemy upravleniya kachestvom obrazovaniya: sbornik statey XII Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Problems of education quality management: collection of articles of the XII All-Russian scientific and practical conference]. Penza, 2019, pp. 120–124 (In Russian).
2. Kosova E. A. Standardization of web content accessibility. *Otkrytoye obrazovaniye* [Open education], 2020, vol. 24, no. 3, pp. 12–23 (In Russian).

3. GOST R 52872–2012. Online resources. Accessibility requirements for the visually impaired. Available at: <http://docs.cntd.ru/document/> (accessed 24.01.2024) (In Russian).
4. W3C Accessibility Guidelines (WCAG) 3.0. Available at: <https://www.w3.org/TR/wcag-3.0> (accessed 10.02.2024).
5. Ignatkova Ya. A., Shut'ko N. P. Accessibility of web content as an integral parameter of a high-quality website. *Prikladnyye voprosy tochnykh nauk: materialy VI Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii studentov, aspirantov, prepodavateley* [Applied issues of exact sciences: proceedings of the VI International scientific and practical conference of students, postgraduates, and teachers]. Armavir, 2022, pp. 162–165 (In Russian).
6. Ignatkova Ya. A. Improving the usability of a website by improving the accessibility of web content. *Yuzabiliti v dizayne – dizayn dlya cheloveka: sbornik tezisov mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Usability in design – design for humans: collection of abstracts of International scientific and practical conference]. St. Petersburg, 2023, pp. 22–24 (In Russian).
7. Nazarov D. M. Methods of assessing the usability and accessibility of e-commerce websites. *Integral – Mezhdunarodnyy zhurnal prikladnykh nauk i tekhnologiy* [Integral – International Journal of Applied Sciences and Technologies], 2022, no. 4, pp. 1150–1159 (In Russian).
8. Heydon Pickering Inclusive Design Patterns: Coding Accessibility Into Web Design. *Smashing Magazine*. 2016. Available at: <https://www.smashingmagazine.com/ebooks/inclusive-design-patterns-ebook/> (accessed 22.02.2024).
9. Gadzhiev M. G., Zhuravleva N. A., Shaidulloev A. A. Tools for analyzing the accessibility of sites. *Innovatsionnyye tekhnologii sovremennoy nauchnoy deyatel'nosti: strategiya, zadachi, vnedreniye: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii* [Innovative technologies of modern scientific activity: strategy, tasks, implementation: materials of the international scientific and practical conference]. Magnitogorsk, 2022, pp. 27–31 (In Russian).
10. Ignatkova Ya. A., Shut'ko N. P. The possibilities of using artificial intelligence to assess and increase the availability of web resources. *Tekhnologicheskaya nezavisimost' i konkurentosposobnost' Soyuznogo gosudarstva, stran SNG, EAES i ShOS: sbornik statey VI Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii* [Technological independence and competitiveness of the Union State, CIS countries, EAEU and SCO: collection of articles of the VI International scientific and technical conference]. Minsk, 2023, vol. 1, pp. 214–219 (In Russian).
11. Altovsky E. V., Demidov A. A., Krasnova G. A. *Dostupnost' internet-resursov invalidam i litsam s ogranichennymi vozmozhnostyami: informatsionno-analiticheskiy obzor* [Accessibility of Internet resources to people with disabilities and persons with disabilities: an information and analytical review]. Moscow, Publishing House "Delo", 2021. 114 p. (In Russian).
12. Ignatkova Ya. A., Shut'ko N. P. Method of combined assessment of the availability of web resources. *Informatsionnyye tekhnologii. Fizika i matematika: materialy 88-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov* [Information technologies. Physics and Mathematics: materials of the 88th Scientific and Technical Conference of faculty, researchers and postgraduates]. Minsk, 2024, pp.163–167 (In Russian).

Информация об авторах

Игнаткова Янина Алексеевна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ignatkova.yanina@gmail.com

Шутько Надежда Павловна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: NPCh@belstu.by

Information about the authors

Ignatkova Yanina Alekseevna – master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatkova.yanina@gmail.com

Shut'ko Nadezhda Pavlovna – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Informatics and Web Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: NPCh@belstu.by

УДК 004.93

Д. М. Талапина, О. А. Новосельская

Белорусский государственный технологический университет

**МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ХАФА ДЛЯ РАСПОЗНАВАНИЯ
И КЛАССИФИКАЦИИ ШТРИХОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

В статье рассмотрен вопрос распознавания сложных для анализа неоднородных линий. Для выбора традиционного алгоритма с целью извлечения признаков проведен анализ существующих алгоритмов. Поскольку штриховое изображение будет состоять из геометрических фигур в виде неоднородных штрихов разной толщины, за основу взят алгоритм Хафа, являющийся традиционным алгоритмом компьютерного зрения. Известно, что алгоритм Хафа имеет ряд недостатков. В частности, существуют проблемы распознавания прерывистых линий, а также линий ограниченной длины. В статье показан процесс разработки алгоритма распознавания штриховых изображений, нацеленного на анализ, интерпретацию и классификацию штриховых изображений и графических примитивов, представленных в виде неоднородных линий. Рассмотрены особенности представления штриховых изображений, обобщены требования, предъявляемые к алгоритму распознавания. Разработанный алгоритм основывается на модифицированном алгоритме Хафа, адаптированном для распознавания штриховых, сплошных и штрихпунктирных линий. В статье описаны основные этапы алгоритма, включая предварительную обработку изображений, определение и классификацию графических примитивов, а также методы постобработки. Исходя из проведенного анализа в качестве алгоритмов предварительной обработки целесообразно использовать комбинацию фильтров со сверткой (фильтр Гаусса и фильтр Кани). Принято решение о необходимости использования морфологической операции дилатации для расширения светлых пространств на изображении. Показаны особенности модифицированного алгоритма, предложенного авторами. Осуществлен расчет параметров линий с использованием Евклидова расстояния. Проведена оценка эффективности разработанного алгоритма. Ключевой особенностью предложенного метода является возможность вывода параметров штриховых изображений в отдельный файл.

Ключевые слова: распознавание изображений; штриховое изображение; графические примитивы; алгоритм Хафа; предварительная обработка изображений; постобработка изображений, Евклидово расстояние.

Для цитирования: Талапина Д. М., Новосельская О. А. Модификация алгоритма Хафа для распознавания и классификации штриховых изображений // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 89–95.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-12.

D. M. Talapina, O. A. Novoselskaya

Belarusian State Technological University

**MODIFICATION OF THE HOUGH ALGORITHM FOR RECOGNITION
AND CLASSIFICATION OF LINE IMAGES**

The article considers the question of recognition the complex for analysis non-uniform lines. To select a traditional algorithm for feature extraction, an analysis of existing algorithms is performed. Since the line image will consist of geometric figures in the form of non-uniform strokes of different thickness, the Hough algorithm, which is a traditional algorithm of computer vision, is taken as a basis. It is known that the Hough algorithm has a number of disadvantages. In particular, there are problems of recognition of dashed lines, as well as lines of limited length. The article shows the process of developing an algorithm for recognition of line images aimed at analysis, interpretation and classification of line images and graphic primitives presented in the form of non-uniform lines. The features of representation of line images are considered, the requirements for the recognition algorithm are summarized. The developed algorithm is based on a modified Hough algorithm adapted for recognition of dashed, solid and dash-dotted lines. The article describes the main stages of the algorithm, including image preprocessing, definition and classification of graphic primitives, and postprocessing methods. Based on the analysis, it is advisable to use a combination of convolution filters (Gaussian filter and Canny filter) as preprocessing algorithms. It was decided to use a morphological dilation operation to expand light spaces in the image. The features of the modified algorithm proposed by the authors are shown. Calculation of line parameters using Euclidean distance is carried out. Effectiveness of the developed algorithm is assessed. The key feature of the proposed method is the ability to output the parameters of dashed images in a separate file.

Keywords: image recognition; line art; graphic primitives; Hough algorithm; image pre-processing; image post-processing, Euclidean distance.

For citation: Talapina D. M., Novoselskaya O. A. Modification of the Hough algorithm for recognition and classification of line images. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 89–95 (In Russian). DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-12.

Введение. Разработка алгоритма распознавания штрихового изображения ставит своей целью создание эффективного инструмента, способного анализировать, интерпретировать и классифицировать графические примитивы в штриховых изображениях.

На сегодняшний день существует множество методов распознавания штриховых изображений, но не все они применимы для задачи распознавания изображений на физических носителях. Это связано с тем, что изображения могут варьироваться по своим геометрическим и яркостным характеристикам, а также подвергаться нетривиальным деформациям носителя, что затрудняет их классификацию [1].

Целью данной работы является разработка алгоритма распознавания, позволяющего проводить анализ штриховых изображений, состоящих из графических примитивов. Проводимый анализ должен решать следующие задачи: нахождение и классификация графических примитивов на изображении, сбор информации о характеристиках графических примитивов (ширина, длина, тип линии и т. д.), а также запись полученных данных в файл.

Под графическим примитивом понимается простейший геометрический объект, отображаемый на экране дисплея. Описание графического примитива обычно содержит метрическую и атрибутивную части. Метрическая часть позволяет сопоставить те величины, в которых задан графический примитив для отображения его на дисплее, и те величины, которые характеризуют его физическое или логическое представление. Атрибутивная часть передает геометрические параметры, характеризующие форму и расположение графического примитива [2].

Точка – наиболее простой графический примитив нулевой размерности. Точка определяется своими координатами на плоскости. Линия – это совокупность точек, через которые проходит геометрический отрезок с заданными конечными точками; характеризуется начальной и конечной точками, или начальной точкой и приращением координат, либо длиной и углом наклона. В зависимости от стиля различают: сплошная линия – непрерывная линия, которая соединяет две точки без разрывов; штриховая линия – линия, состоящая из коротких отрезков или точек с промежутками между ними. В настоящей работе требуется разработать алгоритм распознавания как

сплошных, так и штриховых линий с определением их толщины.

Исходя из определения, толщина линии должна быть равна 1 пикселю, чтобы такой примитив считался непосредственно линией, в противном случае данный примитив относится к классу примитивов прямоугольник. Так как данное ограничение существенно снижает потенциал использования штриховых изображений в качестве элемента защиты данных, была поставлена задача распознавания, классификации и сбора информации о характеристиках линий толщиной более одного пикселя, т. е. распознавания прямоугольника с заливкой для сплошных линий толщиной более 1 пикселя, и распознавания совокупности прямоугольников с заливкой для штриховых линий толщиной более 1 пикселя.

Для решения задачи распознавания примитивов на изображении может быть применен алгоритм Хафа [3]. Алгоритм Хафа – это популярный метод обнаружения простых геометрических форм, таких как прямые, окружности, эллипсы и т. д., на изображениях [4]. Классический алгоритм Хафа не решает поставленные в данной работе задачи, поскольку имеет строгое ограничение толщины линии в 1 пиксель, не распознает штриховые линии как цельный объект, а также не определяет характеристики найденных примитивов (за исключением начальных и конечных координат), что затрудняет применение классического алгоритма для классификации графических примитивов.

В связи с этим различают достаточно большое количество вариаций алгоритма Хафа: для поиска окружностей [5–6], вероятностные, случайные, иерархические, рекуррентные преобразования [7–9] и др. В данной работе важно определить структуру штриховых объектов и его параметры, поэтому требуется корректировка известных подходов.

Основная часть. В распознавании штрихового изображения можно выделить два этапа: идентификация контуров (границ) распознаваемого изображения и распознавание элементов самого изображения, состоящего из примитивов, описанных ранее.

Контур в контексте обработки изображений представляет собой кривую линию, обозначающую границу между объектами или областями с различными яркостными характеристиками.

Контур отображает переходы интенсивности пикселей и позволяет выделить форму объектов. Контурные представлены ключевыми позициями, между которыми положение точек, принадлежащих контуру, вычисляются интерполированием.

Одним из основных подходов к обнаружению контуров является использование операторов градиентов, таких как оператор Собеля или оператор Превитта [10]. Они позволяют выделить разности яркостных характеристик на изображении и определить места наибольших изменений интенсивности. Такие изменения указывают на границы объектов. Для идентификации примитивов можно использовать метод, основанный на геометрических характеристиках объекта. Суть метода заключается в выделении набора ключевых точек (или областей) объекта с последующим выделением набора признаков. Каждый признак является либо расстоянием между ключевыми точками, либо отношением таких расстояний.

Для распознавания примитивов будет применен алгоритм Хафа, модифицированный для решения поставленных задач [11]. Основная идея алгоритма заключается в преобразовании из координатного пространства (декартового пространства) изображения в пространство параметров (пространство Хафа), в котором каждая геометрическая форма представляется точкой или кривой.

Для корректной работы алгоритма необходима предварительная обработка входного изображения.

Первым шагом предобработки является преобразование исходного изображения в градации серого. Данный шаг позволяет работать с яркостными характеристиками как цветных, так и черно-белых изображений.

Вторым шагом применяется пороговый фильтр для сглаживания изображения и уменьшения шума. На этом этапе могут использоваться различные варианты фильтрации: свертка с использованием оператора градиента, свертка с маской (фильтры Собеля, Превитта). Выбор фильтра зависит от качественных характеристик изображения, наличия шума и других параметров [12].

Следующим этапом алгоритма является инициализация пространства Хафа: для каждой точки границы на изображении рассматриваются все возможные прямые линии, проходящие через эту точку. В случае прямых линий используется параметрическое представление линии.

Для понимания перевода параметров из декартового пространства в пространство Хафа обратимся к известной формуле прямой линии с угловым коэффициентом.

$$y = kx + b \tag{1}$$

В декартовом пространстве координат переменная k используется для обозначения углового коэффициента, а переменная b есть показатель смещения данной линии по оси ординат от начала координат. Для любой прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) в пространстве изображений, выполняется условие

$$y - y_0 = k(x - x_0) + b \tag{2}$$

Через точку (x_0, y_0) в пространстве Хафа проходит прямая линия. Данная линия может быть представлена в следующем виде:

$$b = kx_0 + y_0 \tag{3}$$

Точку (k_0, b_0) из пространства Хафа используем для построения линии в декартовой системе координат:

$$b_0 = k_0x + y \tag{4}$$

Для описания связи между декартовым пространством и пространством Хафа используем следующее математическое выражение:

$$(x_0, y_0) \rightarrow (k_0, b_0) = \left(-\frac{x_0}{y_0}, \frac{y_0}{k_0} \right), \tag{5}$$

где (x_0, y_0) – точка в декартовом пространстве, а (k_0, b_0) – соответствующая точка в пространстве Хафа.

Обратное отображение из пространства Хафа в декартово пространство задается уравнением

$$(k_0, b_0) \rightarrow (x_0, y_0) = \left(-\frac{b_0}{k_0}, \frac{b_0}{k_0^2 + 1} \right). \tag{6}$$

Пространство Хафа обычно дискретизируется на сетку ячеек, каждая из которых представляет собой диапазон значений k и b . Для каждой линии в пространстве Хафа инкрементируется соответствующая [13]. Таким образом, выбираются ячейки с наибольшим количеством голосов (инкрементов) и соответствующие им параметры используются для построения линии на исходном изображении (в декартовом пространстве). В результате задача обнаружения заданной прямой линии на исходном изображении преобразуется в задачу о пике в пространстве параметров.

Так как угловой коэффициент k можно представить как тангенс угла наклона прямой к оси, то для любой точки изображения с координатами (x, y) в декартовом пространстве найдется точка (ρ, θ) в параметрическом пространстве, где $\theta \in [0, \pi]$:

$$\rho(\theta) = x \cos \theta + y \sin \theta. \tag{7}$$

Из этого следует, что если 3 точки (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) лежат на одной прямой, то при переводе их в параметрическое пространство их

три кривые пересекутся в одной точке (точке интереса), что можно наблюдать на рис. 1 [14].

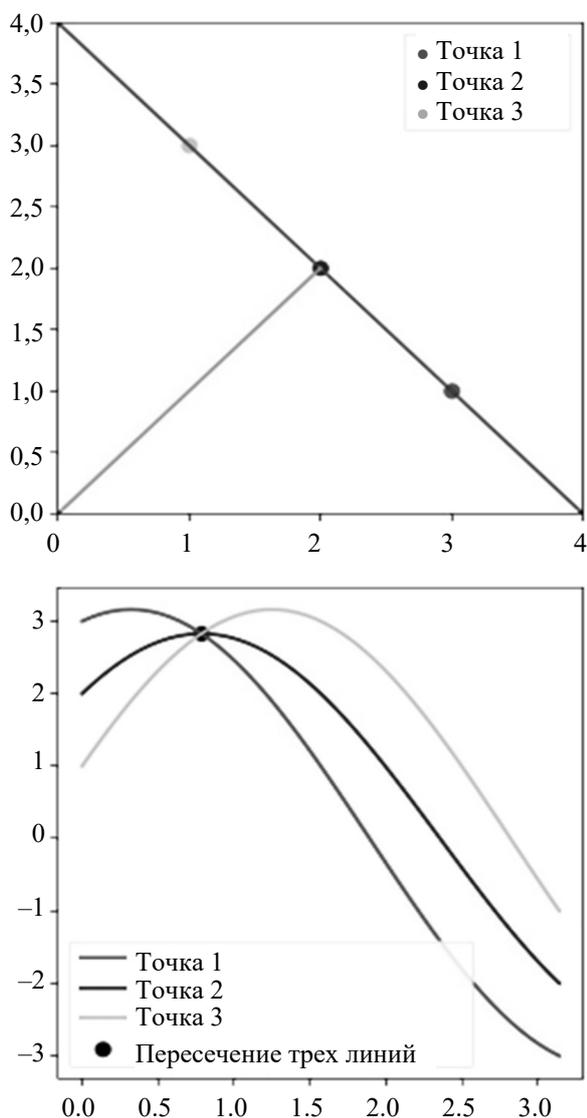


Рис. 1. Перевод точек из декартового пространства в пространство параметров

Классическое преобразование Хафа вычисляет все дискретные точки на изображении, поэтому точки за пределами прямой линии также вычисляются и сохраняются. Данная особенность может вызвать появление ложных пиков, соответственно, обнаруженная прямая линия будет ошибочной [15]. Также классический алгоритм Хафа не определяет штриховые линии как единый объект. Изменение алгоритма для решения поставленных задач может содержать следующие шаги и особенности адаптации базового алгоритма.

Особенность 1. Усиленный шаг предварительной обработки: перед применением алгоритма Хафа требуется более сложная предварительная обработка, чтобы выделить штриховые линии, особенно, если штрихи нерегулярны или имеют переменные интервалы.

Нами предложен подход итеративного применения фильтра Кернела совместно с использованием фильтра Гаусса и фильтра Канни. Многоступенчатое применение фильтров позволит убрать шум, избежать считывания зерна шума в качестве точки пика, яснее обозначить границы штриховых линий на границах сегментов.

Особенность 2. Модификация алгоритма для учета разрывов в штриховых линиях. Так как разрывы между сегментами приводят к тому, что голоса в пространстве Хафа распределяются менее плотно, алгоритм адаптируется для учета разрывов, например, путем ввода дополнительных параметров.

В качестве дополнительных параметров предложены значения минимальной длины линии (решает задачу определения штриха), а также значение максимального расстояния между линиями (решает задачу определения интервалов между штрихами).

Особенность 3. Важной задачей после определения примитивов является их классификация с последующим определением основных параметров (ширина, длина, тип линии и т. д.). Для этого рассмотрим следующие шаги постобработки. Необходимо внедрение шагов, которые идентифицируют и соединяют разрозненные сегменты линий воедино, рассчитывают длину штриха и интервала между ними.

Для определения длины штриха используем расчет Евклидова расстояния между контурами, образующими рамку вокруг каждого штриха. Для расчета длины интервала найдем расстояние между контурами соседних сегментов также с применением Евклидова расстояния.

Важно принять во внимание, что функция расчета значения длины интервала между штрихами, а также расчета длины штриха должна учитывать некоторые особенности штриховых линий. К такой особенности можно отнести окончание штриховой линии штрихом неполной длины. Данный факт может повлиять на расчет длины штриха, поэтому дополнительно необходимо реализовать функцию расчета медианной длины штриха и интервала между штрихами, что снизит вероятность расчетной погрешности.

Особенность 4. Для решения задачи определения линий толщиной более 1 пикселя необходимо ввести ограничение для исходного изображения. Так как сплошная линия толщиной более 1 пикселя не имеет перепадов яркости внутри линии, то она определяется значениями верхней границы и нижней границы линии (т. е. сторонами прямоугольника). Исходя из данной особенности для определения толщины сплошной линии можно прибегнуть к следующей последовательности шагов.

1. Сортируется массив всех линий по необходимой координате (выбор координаты для сортировки зависит от ориентации линий вертикально или горизонтально).

2. Рассчитываются расстояния между всеми соседствующими линиями. Здесь появляется необходимость ввода ограничения для алгоритма – расстояние между всеми соседствующими линиями должно быть больше толщины самой широкой линии на данном изображении. Без ввода данного ограничения не представляется возможным определить, является ли данная пара линий границами сплошной линии толщиной более 1 пикселя или же это две линии толщиной 1 пиксель, расположенные рядом.

3. Исходя из введенного ограничения определяется максимальное расстояние между линиями в массиве. Полученную величину используем для сравнения. Если расстояние между линиями по выбранной координате меньше эталона – линия сплошная, толщиной более одного пикселя. Если расстояние между линиями по выбранной координате больше эталона – две линии толщиной 1 пиксель.

В отличие от сплошной линии, в штриховых линиях присутствуют перепады яркости в местах разрыва. При работе алгоритма такие линии будут определяться как последовательность идентичных линий с шагом 1. Ось шага будет определяться в зависимости от ориентации линий.

Таким образом, толщина сплошной линии является разницей координат соседствующих линий, а толщина штриховой линии является суммой количества линий с шагом 1.

4. Для проверки определения корректности типа линий обратимся к рассчитанному в шаге 3 параметру длины штриха. Для сплошной линии длина штриха будет равна длине линии, для штриховой линии длина штриха будет меньше длины всей линии.

Заключение. Псевдокод для разработанного улучшенного алгоритма:

Algorithm 1: Line image detection and classification

1. Function calc_line_length(x_l, y_l, x_2, y_2)
2. Return $\text{sqrt}((x_2 - x_l)^2 + (y_2 - y_l)^2)$
3. $\text{img} \leftarrow$ read image in grayscale mode
4. Apply Gaussian blur with kernel
5. Detect edges using Canny algorithm
6. Detect lines using Hough transform
7. For each line in detected lines
8. Function calc_line_length (x_l, y_l, x_2, y_2)
9. Find contours in the segment mask
10. Calculate segment lengths
11. If no segments detected then

12. dominant_length \leftarrow line_length
13. Else
14. Calculate most common segment length
15. Sort line coordinates and find max gap between lines
16. Calculate line thickness based on max gap between lines
17. Classify if line is solid or dashed based on segment length
18. Write values in file for each found line (type, thickness, segment length)

Корректность и эффективность работы алгоритма рассмотрим на примере изображения, содержащего штриховые и сплошные линии. Исходное изображение для обработки представлено на рис. 2.

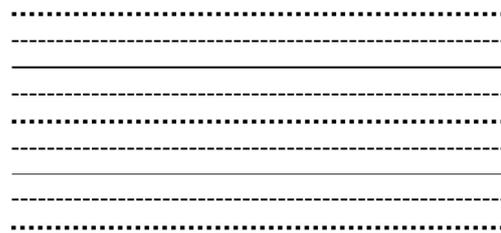


Рис. 2. Исходное изображение

Результат работы классического алгоритма Хафа представлен на рис. 3.

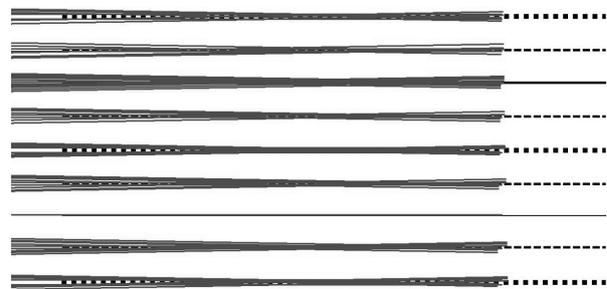


Рис. 3. Результат работы классического алгоритма Хафа

Количество линий, найденных классическим алгоритмом Хафа, на данном изображении – 38, фактическое количество 9. Как можно заметить, после обработки изображения классический алгоритм нашел линии, не относящиеся к представленным на исходном изображении. Также алгоритм не обработал линии до конца. Алгоритм не классифицирует линии, а только хранит каждую из найденных линий в виде совокупности их координат (x_1, y_1, x_2, y_2). Исходя из совокупности описанных выше факторов не представляется возможным использовать классический алгоритм, корректно рассчитать количество линий на изображении, а также длину штриха или же толщину

линии, поскольку присутствует чрезмерная избыточность данных.

Результат работы улучшенного алгоритма на примере того же исходного изображения представлен на рис. 4.

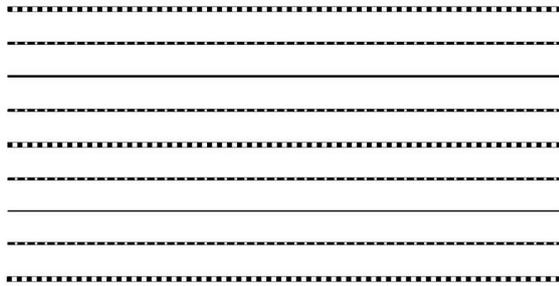


Рис. 4. Результат работы улучшенного алгоритма Хафа

Количество линий, найденных улучшенным алгоритмом на данном изображении (до

сортировки, расчета толщины линии), – 18, при фактическом количестве 9. После необходимых преобразований массива линий распознано 9 линий. Среди распознанных определено 2 сплошные и 7 штриховых линий с различной длиной сегмента (от 10 до 16 пикселей). Толщина линий определяется благодаря верно распознанным границам. Сплошная линия толщиной 1 пиксель распознана отдельным примитивом.

В данной работе исследованы и предложены шаги адаптации существующего классического алгоритма Хафа для эффективного обнаружения контура распознаваемого изображения и графических примитивов, составляющих изображение. Предложенный вариант алгоритма распознает не только сплошные, но и штриховые линии. Распознанные линии подвергаются последующей классификации с расчетом всех необходимых параметров и записью данных в файл.

Список литературы

1. Наздрюхин А. С., Храмцов И. Н., Тушев А. Н. Обработка изображений товарных чеков для выделения и распознавания текстовой информации // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2019. Т. 46. №. 4. С. 113–122.
2. Цепковская Т. А. Вопросы поиска и классификации графических примитивов внутри анализируемых изображений // Перспективное развитие науки, техники и технологий. 2020. С. 268–271.
3. Болгов А. Н., Фаворская М. Н. Применение преобразования Хафа и его модификаций для нахождения графических примитивов // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2011. Т. 1. №. 7. С. 352.
4. Фаворская М. Н. Преобразование Хафа для задач распознавания // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. Т. 6. №. 4. С. 826–830.
5. Кудрина М. А. Использование преобразования Хафа для обнаружения прямых линий и окружностей на изображении // Известия Самарского научного центра РАН. 2014. № 4–2. С. 476–478.
6. Овчинников А., Фан Чан Данг Хо. Обработка полусферических изображений: определение центра изображения и выделение вертикальных линий // Компоненты и технологии. 2011. № 12. С. 133–136.
7. Панфилова Е., Кунина И. Использование оконного преобразования Хафа для поиска протяженных границ на изображении // Сенсорные системы. 2020. № 34. С. 340–353. DOI: 10.31857/S0235009220030075.
8. Matas J., Galambos C., Kittler J. Progressive Probabilistic Hough Transform // proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 1999. Vol. 1.
9. Mammeri A., Bouckerche A., Lu G. Lane detection and tracking system based on the MSER algorithm, Hough transform and Kalman filter // Proceedings of the 17th ACM international conference on Modeling, analysis and simulation of wireless and mobile systems. 2014. P. 259–266.
10. Соловьев Ф. С., Тарасов И. Е., Петров А. Б. Распознавание образов и обнаружение контуров объекта на изображении // Инновации в науке. 2019. №. 4 (92). С. 4–9.
11. Астратов О. С., Филатов В. Н., Кузьмин С. А. Модифицированное преобразование Хафа в системе компьютерного зрения // Успехи современной радиоэлектроники. 2013. №. 2. С. 77–83.
12. Денисюк В. С. Применение и оптимизация преобразования Хафа для поиска объектов на изображении // Международный конгресс по информатике: Информационные системы и технологии: материалы Международ. науч. конгресса, Минск, 31 окт. – 3 нояб. 2011 г.: в 2 ч. Минск, 2011. Ч. 2. С. 162–165.
13. Doermann, D. Document Analysis Systems: Theory and Practice. New York: World Scientific Publishing Co. Inc., 2016. 400 p.
14. Doermann, D. Handbook of Document Image Processing and Recognition. New York: Springer, 2014. 666 p.
15. Sonka M., Hlavac V., & Boyle R. Image processing, analysis, and machine vision. New York: Cengage Learning, 2014. 520 p.

References

1. Nazdryukhin A. S., Khramtsov I. N., Tushev A. N. Processing images of sales receipts for highlighting and recognizing text information *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskkiye nauki* [Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical science], 2019, vol. 46, no. 4, pp. 113–122 (In Russian).
2. Tsepkovskaya T. A. Questions of search and classification of graphic primitives inside analyzed images. *Perspektivnoye razvitiye nauki, tekhniki i tekhnologiy* [Perspective development of science, technology and technology], 2020, pp. 268–271 (In Russian).
3. Bolgov A. N., Favorskaya M. N. Application of the Hough transform and its modifications for finding graphic primitives. *Aktual'nyye problemy aviatsii i kosmonavtiki* [Current problems of aviation and astronautics], 2011, vol. 1, no. 7, p. 352 (In Russian).
4. Favorskaya M. N. Hough transform for recognition problems. *DSPA: Voprosy primeneniya tsifrovoy obrabotki signalov* [DSP: Issues of application of digital signal processing], 2016, vol. 6, no. 4, pp. 826–830 (In Russian).
5. Kudrina M. A. Using the Hough transform to detect straight lines and circles in an image. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN* [News of the Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences], 2014, no. 4–2, pp. 476–478 (In Russian).
6. Ovchinnikov A., Fan Chan Dang Ho. Processing of hemispherical images: determining the center of the image and highlighting vertical lines. *Komponenty i tekhnologii* [Components and Technologies], 2011, no. 12, pp. 133–136 (In Russian).
7. Panfilova E., Kunina I. Using the windowed Hough transform to search for extended boundaries in an image. *Sensornyye sistemy* [Sensor systems], 2020, no. 34, pp. 340–353. DOI: 10.31857/S0235009220030075 (In Russian).
8. Matas J., Galambos C., Kittler J. Progressive Probabilistic Hough Transform. *Proc. IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 1999, vol. 1.
9. Mammeri A., Bouckerche A., Lu G. Lane detection and tracking system based on the MSER algorithm, Hough transform and Kalman filter. *Proceedings of the 17th ACM international conference on Modeling, analysis and simulation of wireless and mobile systems*. 2014, pp. 259–266.
10. Solov'yov F. S., Tarasov I. E., Petrov A. B. Pattern recognition and detection of object contours in an image. *Innovatsii v nauke* [Innovations in science], 2019, no. 4 (92), pp. 4–9 (In Russian).
11. Astratov O. S., Filatov V. N., Kuzmin S. A. Modified Hough transform in a computer vision system. *Uspekhi sovremennoy radioelektroniki* [Advances in modern radio electronics], 2013, no. 2, pp. 77–83 (In Russian).
12. Denisyuk V. S. Application and optimization of the Hough transform for searching for objects in an image. *Informatsionnyye sistemy i tekhnologii: Mezhdunarodnyy kongress po informatike* [Information Systems and Technologies: Proc. International Congress on Informatics]. Minsk, 2011, part 2, pp. 162–165 (In Russian).
13. Doermann D. Document Analysis Systems: Theory and Practice. New York, World Scientific Publishing Co. Inc. Publ., 2016, 400 p.
14. Doermann D. Handbook of Document Image Processing and Recognition. New York, Springer Publ., 2014, 666 p.
15. Sonka M., Hlavac V., & Boyle R. Image processing, analysis, and machine vision. New York, Cengage Learning Publ., 2014, 520 p.

Информация об авторах

Талапина Дарья Михайловна – магистрант кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: taladarmi@mail.ru

Новосельская Ольга Александровна – кандидат технических наук, доцент кафедры информатики и веб-дизайна. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: nochka@tut.by

Information about the authors

Talapina Darya Mikhailovna – Master's degree student, the Department of Informatics and Web-design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: taladarmi@mail.ru

Novoselskaya Olga Aleksandrovna – PhD (engineering), Assistant Professor, the Department of Informatics and Web Design. Belarusian State Technological University (220006, Minsk, Sverdlova str., 13a, Republic of Belarus). E-mail: nochka@tut.by

Поступила после доработки 24.05.2024

УДК 004.4–004.9

A. A. Prihozhy¹, O. N. Karasik²
¹Belarus National Technical University
²ISsoft Solutions (part of Coherent Solutions)

FAST SEARCH FOR SHORTEST PATHS IN LARGE SPARSE GRAPHS DIVIDED INTO CONNECTED DENSE CLUSTERS

The aim of the paper is to solve the problem of finding shortest paths between all pairs of vertices in simple directed weighted large sparse graphs. It is assumed that the graphs with positive and negative real weights of edges are decomposed into unequally sized weakly connected clusters. Since the problem has numerous practical applications in various domains, and the graphs may be too large, our goal is to speed up the problem solving on modern heterogeneous multiprocessor systems and multi-core processors. The paper extends the capabilities of existing blocked algorithms by utilizing blocks of unequal sizes. The extension supports natural graph modeling of real-world networks and allows the use of large sparse graphs divided into dense weakly connected clusters in the shortest path problems. Our approach is to compute shortest paths for all-pairs of cluster vertices represented by the cost adjacency matrix in advance, and afterward compute the shortest paths between vertices of different clusters through interconnect (bridge) edges in real time on demand. The approach is based on developing a new fast operation that accurately computes the shortest paths between vertices of one cluster that pass through the vertices of another neighboring cluster and through the edges connecting the clusters. Applying this operation to pairs of clusters allowed us to develop an approximate parallelizable algorithm, efficient regarding the CPU time and memory space consumed, that computes the shortest paths between the vertices within clusters and then between clusters. The algorithm can introduce inaccuracies in shortest paths when the weights of edges connecting clusters are small. It finds accurate solutions when the weights of these edges are larger than the weights of edges within clusters, e. g., in the case of road networks.

Keywords: sparse graph, cluster, shortest paths problem, blocked algorithm, unequally sized blocks, space and time efficiency.

For citation: Prihozhy A. A., Karasik O. N. Fast search for shortest paths in large sparse graphs divided into connected dense clusters. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 96–103.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-13.

А. А. Прихожий¹, О. Н. Карасик²

¹Белорусский национальный технический университет

²Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз»

БЫСТРЫЙ ПОИСК КРАТЧАЙШИХ ПУТЕЙ В БОЛЬШИХ РАЗРЕЖЕННЫХ ГРАФАХ, РАЗДЕЛЕННЫХ НА СВЯЗНЫЕ ПЛОТНЫЕ КЛАСТЕРЫ

Целью статьи является решение задачи поиска кратчайших путей между всеми парами вершин в простых ориентированных взвешенных больших разреженных графах. Предполагается, что графы с положительными и отрицательными действительными весами ребер декомпозированы на слабосвязанные кластеры разного размера. Поскольку задача имеет множество практических приложений в различных областях, а графы могут быть слишком большими, наша цель – ускорить решение задачи на современных гетерогенных многопроцессорных системах и многоядерных процессорах. В статье расширяются возможности существующих блочных алгоритмов за счет использования блоков неравных размеров. Расширение поддерживает естественное и адекватное графовое моделирование реальных сетей и позволяет использовать большие разреженные графы, разделенные на плотные слабосвязанные кластеры, при решении задач о кратчайших путях. Наш подход заключается в том, чтобы заранее вычислять кратчайшие пути для всех пар вершин кластеров, представленных матрицей стоимости-смежности, а затем по запросу определять кратчайшие пути между вершинами разных кластеров в реальном времени. Подход основан на разработке новой быстрой операции, которая точно вычисляет кратчайшие пути между вершинами одного кластера, проходящие через вершины другого соседнего кластера и через ребра, соединяющие кластеры. Применение этой операции к парам кластеров позволило нам разработать приближенный распараллеливаемый алгоритм, эффективный по потребляемому процессорному

времени и объему памяти, вычисляющий кратчайшие пути внутри кластеров, а затем между кластерами. Алгоритм может вносить неточности в кратчайшие пути, когда веса ребер, соединяющих кластеры, малы. Он находит точные решения, когда веса этих ребер больше, чем веса ребер внутри кластеров, например, в случае дорожных сетей.

Ключевые слова: разреженный граф, кластер, задача о кратчайших путях, блочный алгоритм, блоки неравных размеров, пространственная и временная эффективность.

Для цитирования: Прихожий А. А., Карасик О. Н. Быстрый поиск кратчайших путей в больших разреженных графах, разделенных на связные плотные кластеры // Труды БГТУ. Сер. 3. Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 96–103 (На англ.).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-13.

Introduction. In this paper we consider the problem of finding shortest paths between all pairs of vertices in simple directed weighted large sparse graphs whose edges have positive and negative real weights, and which are decomposed into unequally sized clusters. Since the problem has numerous practical applications in various domains, our goal is to speed up the solution of the problem on the available resources of modern heterogeneous multi-processor systems and symmetric multicore processors.

Two main families of algorithms for solving the all-pairs shortest paths problem (*APSP*) are known: 1) those based on the Dijkstra-type *SSSP*-algorithm with a single-source (-sink) [1]; 2) those based on the Floyd-Warshall *APSP* algorithm [2]. Any algorithm from the first family must be applied to each source (sink) vertex. Each algorithm of the second family returns a complete solution to the problem.

The first family includes Dijkstra's algorithm assuming that the weights of the edges are positive, the Bellman-Ford and Johnson's algorithms assuming that the weights are positive and negative, and others [1, 3, 4]. The second family includes the Floyd-Warshall (*FW*) algorithm [2], the blocked Floyd-Warshall (*BFW*) algorithm proposed by Venkataraman, Park, Katz et al. [5–7], the graph extension-based algorithm *GEA* and the heterogeneous blocked *APSP* algorithm *HBAPSP* proposed by Prihozhy and Karasik in [8–11]. It is shown in [10–18] that blocked algorithms provide the following advantages: 1) suitability for parallelization; 2) locality of data references and efficient handling of CPU caches; 3) solving the graph scaling problem; 4) reduced power consumption; 5) use of GPUs; 6) use of dataflow networks of actors; 7) ability to handle unequally-sized blocks.

The blocked algorithms of the Floyd-Warshall family have computational complexity of $O(N^3)$ and space complexity of $O(N^2)$, where N is the number of vertices in graph. As N increases, the algorithms begin to consume huge amounts of CPU time and memory space. For example, if $N = 31,623$, then $N^3 = 31,623,446,801,367$ and $N^2 = 1,000,014,129$. A 4 GHz processor or core requires about $k1 \cdot 7906 \text{ sec} = k1 \cdot 2.196 \text{ hours}$ of CPU time and about $k2 \cdot 1 \text{ GB}$ of RAM where $k1$ and $k2$ are

factors. In many application domains the size of real graphs is much larger.

To solve the graph scaling problem, we develop an approach that decomposes a large sparse graph into dense parts (clusters) and sparse parts (interconnections of clusters). The former can be processed in the style of Floyd-Warshall family algorithms, and the latter can be processed in the style of Dijkstra family algorithms. When the size of the clusters is approximately the same, the spatial complexity of the dense parts can be reduced by the number, M of clusters. Thus, the algorithms we developed in this paper have a spatial complexity of $\langle \text{clusters_size} \rangle + \langle \text{interconnections_size} \rangle$ that is $\langle \text{all_graph_size} \rangle / M + \langle \text{interconnections_size} \rangle$ in the case where the clusters are of equal size. For sparse graphs, the $\langle \text{interconnections_size} \rangle$ is not large because it is only associated with bridge edges. Moreover, the CPU-time needed to execute *FW* on all clusters is M^2 times less than the CPU-time to execute *FW* on entire graph.

The main contribution of the paper is the development of a fast heterogeneous blocked approximate *APSP* algorithm for finding shortest paths in unequally sized clusters of large sparse directed graphs, as well as for finding shortest paths between vertices of different clusters in real time. The algorithm extends the heterogeneity of previously developed blocked algorithms with respect to both computation and allocation in memory of various types of blocks. It can give accurate solutions in such domains as road and other real-world networks.

Main part. The paper has the following structure: 1) introduction of all-pairs shortest paths algorithm on built unequal-size block matrices; 2) formulation of requirements for solving the shortest path problem on large sparse graphs partitioned into clusters; 3) development of an operation and algorithm for computing shortest paths between vertices of one cluster passing through vertices of other cluster and edges connecting the clusters; 4) development of fast algorithm calculating all-pairs shortest paths between vertices within clusters; 5) development of a fast algorithm computing shortest paths between vertices of different clusters in real time.

Blocked APSP algorithm working with blocks of unequal sizes. Let $G = (V, E)$ be a simple directed graph with real edge-weights consisting of a set V of vertices numbered from 1 to N and a set E of edges. Let W be a cost adjacency matrix for G . Let d_{ij} be a length of shortest path from vertex i to vertex j , and let D be a matrix of path distances for all pairs of vertices. The task of the APSP algorithm is to compute matrix D through matrix W .

In our recent work [11], we proposed to decompose a graph G into subgraphs (clusters) and to decompose the adjacency matrix into a matrix B of blocks of sizes defined by vector $S = (S_1 \dots S_M)$. All diagonal blocks $B_{ii}[S_i \times S_i]$, $i = 1 \dots M$ are square, and all non-diagonal blocks $B_{ij}[S_i \times S_j]$ are rectangular. We extended *BFW* to the all-pairs shortest path algorithm *APSPUS* (Algorithm 1) to handle unequally sized blocks. Its time complexity is N^3 (M^3 in terms of the number of blocks) and its spatial complexity is N^2 (M^2) because each block has the layout of the shortest path distance matrix (*DiM*).

Algorithm 1: Extension of *BFW* to account for the use of unequally sized blocks (*APSPUS*)

Input: A number N of graph vertices
Input: A cost adjacency matrix $W[N \times N]$
Input: A number M of blocks
Input: A vector $S = (S_1 \dots S_M)$ of sizes of vertex subsets
Output: A blocked matrix $B[M \times M]$ of path distances

```

 $B[M \times M] \leftarrow W[N \times N]$ 
for  $m \leftarrow 1$  to  $M$  do
   $BCUS(S, B, m, m)$  // D0
  for  $v \leftarrow 1$  to  $M$  do
    if  $v \neq m$  then
       $BCUS(S, B, v, m, m)$  // C1
       $BCUS(S, B, m, v, m)$  // C2
  for  $v \leftarrow 1$  to  $M$  do
    if  $v \neq m$  then
      for  $u \leftarrow 1$  to  $M$  do
        if  $u \neq m$  then
           $BCUS(S, B, v, m, u)$  // P3
return  $B$ 

```

Algorithm 2: Calculation of unequally sized blocks (*BCUS*)

Input: A vector S of sizes of graph vertex subsets
Input: A blocked matrix $B[M \times M]$ of path distances
Input: Indices v, m, u of vertex subsets
Output: Recalculated block $B_{v,u}$ of matrix B

```

for  $k \leftarrow 1$  to  $S_m$  do
  for  $i \leftarrow 1$  to  $S_v$  do
    for  $j \leftarrow 1$  to  $S_u$  do
       $sum \leftarrow B_{v,m}(i, k) + B_{m,u}(k, j)$ 
      if  $B_{v,u}(i, j) > sum$  then
         $B_{v,u}(i, j) \leftarrow sum$ 
return  $B$ 

```

Algorithm 2 (*BCUS*) computes all blocks in Algorithm 1. *APSPUS* can be efficiently parallelized because all blocks of types C1 and C2 (and all blocks of type P3) can be executed in parallel.

Computation of shortest paths between vertices of one cluster through shortest paths of another cluster. In the case of matrix $B[2 \times 2]$, *APSPUS* computes two diagonal and two non-diagonal blocks (Fig. 1) in the following way (\otimes is the MIN-PLUS matrix multiplication operation):

$$B_{11}[S_1 \times S_1] \leftarrow B_{11}[S_1 \times S_1] \otimes B_{11}[S_1 \times S_1]; \quad (1)$$

$$B_{21}[S_2 \times S_1] \leftarrow B_{21}[S_2 \times S_1] \otimes B_{11}[S_1 \times S_1]; \quad (2)$$

$$B_{12}[S_1 \times S_2] \leftarrow B_{11}[S_1 \times S_1] \otimes B_{12}[S_1 \times S_2]; \quad (3)$$

$$B_{22}[S_2 \times S_2] \leftarrow B_{21}[S_2 \times S_1] \otimes B_{12}[S_1 \times S_2]; \quad (4)$$

$$B_{22}[S_2 \times S_2] \leftarrow B_{22}[S_2 \times S_2] \otimes B_{22}[S_2 \times S_2]; \quad (5)$$

$$B_{12}[S_1 \times S_2] \leftarrow B_{12}[S_1 \times S_2] \otimes B_{22}[S_2 \times S_2]; \quad (6)$$

$$B_{21}[S_2 \times S_1] \leftarrow B_{22}[S_2 \times S_2] \otimes B_{21}[S_2 \times S_1]; \quad (7)$$

$$B_{11}[S_1 \times S_1] \leftarrow B_{12}[S_1 \times S_2] \otimes B_{21}[S_2 \times S_1]. \quad (8)$$

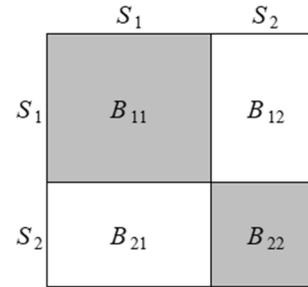


Fig. 1. Matrix $B[2 \times 2]$ in algorithm *APSPUS*

Equation (1) computes diagonal block B_{11} through itself. Equations (2)–(5) compute block B_{22} through block B_{11} and through itself. Equations (6)–(8) compute block B_{11} through block B_{22} and through itself. Each of the two intermediate blocks B_{21} and B_{12} is computed twice. For large sparse graphs, *APSPUS* requires huge memory space and processor time.

We propose a new exact method of computing B_{22} through B_{11} and computing B_{11} through B_{22} . Unlike *APSPUS*, the method allows to consider the features of sparse graphs with clustered vertices. It reduces the memory footprint and reduces the number of MIN-PLUS operations performed on blocks.

Let two clusters C_1 and C_2 partition the vertex set V of graph G into two subsets V_1 and V_2 of unequal sizes S_1 and S_2 , respectively (Fig. 2). The clusters are represented by blocks B_{11} and B_{22} which first describe the weighted edges within the clusters, and then describe the lengths of shortest paths between vertices from set V_1 (block B_{11}) and between vertices from set V_2 (block B_{22}).

The sparse blocks W_{12} and W_{21} describe weighted bridge edges connecting vertices from V_1 to vertices from V_2 and vice versa, respectively. Blocks B_{11} and

B_{22} are placed in memory as distance matrices (*DiM*) using row-major memory layout, and blocks W_{12} and W_{21} are placed in memory as adjacent lists (*AjL*).

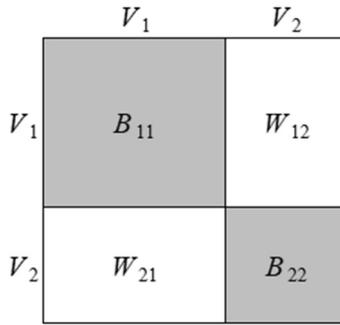


Fig. 2. Matrix $B[2 \times 2]$ in the new algorithm for calculating shortest paths in clusters represented by diagonal blocks

Our method of computing block B_{22} through block B_{11} and computing block B_{11} through block B_{22} is to perform the following five operations:

$$\begin{aligned} B_{11} &\leftarrow \text{Diagonal}(B_{11}); \\ B_{22} &\leftarrow \text{BlockTBlock}(B_{22}, W_{21}, B_{11}, W_{12}); \\ B_{22} &\leftarrow \text{Diagonal}(B_{22}); \\ B_{11} &\leftarrow \text{BlockTBlock}(B_{11}, W_{12}, B_{22}, W_{21}); \\ B_{11} &\leftarrow \text{Diagonal}(B_{11}). \end{aligned}$$

The $\text{Diagonal}(B_{ii})$ operation computes the shortest paths between all pairs of vertices of the set V_i corresponding to the block B_{ii} . The shortest paths can pass through both edges inside B_{ii} and edges outside B_{ii} . The operation can be implemented using *BCUS* or preferably using the faster *GEA* algorithm proposed in [8, 10].

The new operation $\text{BlockTBlock}(B_{jj}, W_{ji}, B_{ii}, W_{ij})$ computes the shortest paths between the vertices of block B_{jj} passing through the edges of block W_{ji} , then through the vertices and edges of block B_{ii} and finally through the edges of block W_{ij} . Since the edges of blocks W_{ji} and W_{ij} are not numerous in sparse graphs, the BlockTBlock operation is fast. If W_{ji} or W_{ij} are empty, the BlockTBlock operation is not performed at all. Moreover, the shortest paths of these blocks do not need to be stored in memory, only the edge descriptions need to be stored. This is a great advantage of our method, which is exact and gives accurate solutions.

Expanding the three operations \otimes from (2)–(4) and using Algorithm 2, we derive Equation (9) which evaluates for each pair (i, j) of vertices of B_{22} the length of shortest path that passes through B_{11} . If the length is less than $B_{22}(i, j)$, the value of $B_{22}(i, j)$ is updated. Algorithm 3 is developed using (9). It is the first version of the *BCUS* compliant implementation of the BlockTBlock operation.

$$\begin{aligned} B_{22}(i, j) &= \\ &= \min(B_{22}(i, j), \\ &\quad \min_{k \in V_1} (\min(B_{21}(i, k), \\ &\quad \quad \min_{k_1 \in V_1} (B_{21}(i, k_1) + B_{11}(k_1, k))) + \\ &\quad + \min(B_{12}(k, j), \\ &\quad \quad \min_{k_2 \in V_1} (B_{11}(k, k_2) + B_{12}(k_2, j))))). \end{aligned} \quad (9)$$

If the graph is sparse and the set of vertices is partitioned into clusters, Algorithm 3 executes redundant operations since it uses all vertices of sets V_1 and V_2 (although only bridge vertices can be used) and utilizes all elements of blocks W_{12} and W_{21} (although only bridge edges with non-infinite weights can be used). Moreover, the loop along k can also be considered redundant in the algorithm since the shortest paths in block B_{11} can be found by the *Diagonal* (B_{11}) function.

Algorithm 3: Calculation of diagonal block B_{22} through dense block B_{11} and sparse blocks W_{12}, W_{21} (*BlockTBlock, version 1*)

Input: Subsets V_1 and V_2 of vertex set V

Input: Blocks B_{11}, B_{22} and W_{12}, W_{21}

Output: Recalculated block B_{22}

```

for  $i \in V_2$  do
  for  $j \in V_2$  and  $j \neq i$  do
     $d_{ij} \leftarrow \infty$ 
    for  $k \in V_1$  do
       $d_{ik} \leftarrow \infty$ 
      for  $k_1 \in V_1$  do
         $s_1 \leftarrow W_{21}(i, k_1) + B_{11}(k_1, k)$ 
        if  $d_{ik} > s_1$  then  $d_{ik} \leftarrow s_1$ 
      if  $d_{ik} > W_{21}(i, k)$  then  $d_{ik} \leftarrow W_{21}(i, k)$ 
       $d_{kj} \leftarrow \infty$ 
      for  $k_2 \in V_1$  do
         $s_2 \leftarrow B_{11}(k, k_2) + W_{12}(k_2, j)$ 
        if  $d_{kj} > s_2$  then  $d_{kj} \leftarrow s_2$ 
      if  $d_{kj} > W_{12}(k, j)$  then  $d_{kj} \leftarrow W_{12}(k, j)$ 
       $d_{ikj} \leftarrow d_{ik} + d_{kj}$ 
      if  $d_{ij} > d_{ikj}$  then  $d_{ij} \leftarrow d_{ikj}$ 
    if  $B_{22}(i, j) > d_{ij}$  then  $B_{22}(i, j) \leftarrow d_{ij}$ 
return  $B_{22}$ 

```

Let $V_{21} \subseteq V_2$ be a subset of the set V_2 of vertices that are bridges between clusters C_2 and C_1 . Let E_{21} be a subset $E_{21} = \{(i, j) \mid i \in V_{21} \text{ and } j \in V_1\}$ of the set E of edges connecting clusters C_2 and C_1 . These are called bridge edges. Similarly, let $V_{12} \subseteq V_1$ be the subset of bridge vertices between clusters C_1 and C_2 , and $E_{12} = \{(i, j) \mid i \in V_{12} \text{ and } j \in V_2\}$ be the subset of bridge edges connecting clusters C_1 and C_2 . We assume that the blocks B_{11}, B_{22} are represented as *DiM*, and the sets V_{21}, E_{12}, V_{12} and E_{21} are represented as *AjL*. Algorithm 4 describes a modified fast version 2 of the BlockTBlock operation, from which all redundant computations of Algorithm 3 have been removed.

Algorithm 4: Calculation of diagonal block B_{22} through diagonal block B_{11} and interconnect edges (*BlockTBlock, version 2*)

Input: Blocks B_{11}, B_{22}, W_{12} and W_{21}
Input: Subsets V_1 and V_2 of vertex set V
Input: Subsets $V_{12} \subseteq V_1$ and $V_{21} \subseteq V_2$ of bridge vertices
Input: Subsets $E_{12} \subseteq E$ and $E_{21} \subseteq E$ of bridge edges
Output: Recalculated block B_{22}

```

for  $i \in V_{21}$  do
  for  $(i, k1) \in E_{21}$  and  $k1 \in V_1$  do
    for  $k2 \in V_{12}$  do
      for  $(k2, j) \in E_{12}$  and  $j \in V_2$  do
         $w \leftarrow W_{21}(i, k1) + B_{11}(k1, k2) + W_{12}(k2, j)$ 
        if  $B_{22}(i, j) > w$  then
           $B_{22}(i, j) \leftarrow w$ 

```

return B_{22}

Approximate algorithm for finding APSPs in clusters of large sparse graphs (ACSG). Let the number of clusters satisfies $M > 2$. In this case we use the *BlockTBlock* algorithm by repeatedly computing diagonal blocks (clusters) through each other and through peripheral blocks. As a result, the shortest paths between pairs of vertices of each cluster are computed. Algorithm 5 performs two traversals through the clusters: forward and backward.

The *Diagonal*(S, B, P, d)* function is executed $2 \cdot M - 1$ times and is realized using the *Diagonal* (B_{dd}) operation. The *BlockTBlock*(S, B, p, d)* function is executed $M \cdot (M - 1)$ times and is realized using the *BlockTBlock* ($B_{dd}, W_{dp}, B_{pp}, W_{pd}$) operation. Thus, Algorithm 5 is very fast and occupies little memory space (up to M times less than *APSPUS*). At the same time, it is approximate because it does not consider all paths passing through all clusters in any order.

Algorithm 5: Computing all-pairs shortest paths in clusters of sparse graphs (*ACSG*)

Input: A vector S of sizes of vertex subsets
Input: A blocked matrix $B[M \times M]$
Output: Recalculated matrix $B[M \times M]$

```

for  $d \leftarrow 1$  to  $M$  do
  Diagonal*(S, B, d)
  if  $d < M$  then
    for  $p \leftarrow d + 1$  to  $M$  do
      BlockTBlock*(S, B, p, d)
for  $d \leftarrow M$  down to  $1$  do
  if  $d < M$  then
    Diagonal*(S, B, d)
  if  $d > 1$  then
    for  $p \leftarrow d - 1$  down to  $1$  do
      BlockTBlock*(S, B, p, d)

```

return B

Fig. 3 shows the forward traversal and computation of clusters C_1 to C_3 . Cluster C_1 is recomputed through itself, clusters C_2 and C_3 are recomputed through C_1 in parallel, cluster C_2 is recomputed

through itself, and cluster C_3 is recomputed through C_2 and itself. Fig. 4 depicts the reverse traversal and computation of clusters from C_3 to C_1 .

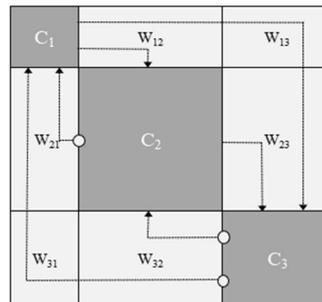


Fig. 3. Forward calculation of clusters from C_1 to C_3

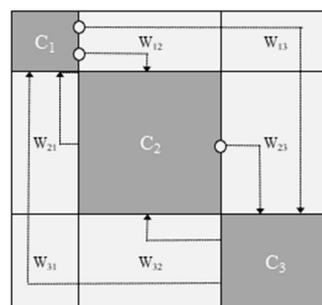


Fig. 4. Backward recalculation of clusters C_3 to C_1

Real-time computation of shortest paths between vertices of different clusters. An adaptation of the Dijkstra family algorithm provides accurate calculation of shortest paths between vertices of different clusters considering the shortest paths within clusters already accurately computed. The algorithm can be accelerated because the shortest paths between vertices within clusters have already been computed. The fast approximate Algorithm 6 can give good solutions if the graph satisfies the following constraints: 1) the clusters are connected to each other; 2) the weights of edges connecting clusters are greater than the weights of interior edges. For directly unconnected clusters it is not applicable.

Algorithm 6: Calculation of shortest paths between vertices of two clusters in real time (*ABCSG*)

Input: Blocks B_{11}, B_{22}, W_{12}
Input: Subsets V_1 and V_2 of vertex set V
Input: Subset $V_{12} \subseteq V_1$ of bridge vertices
Input: Subset $E_{12} \subseteq E$ of bridge edges
Output: Block B_{12}

```

for  $i \in V_1$  and  $j \in V_2$  do  $B_{12}(i, j) \leftarrow \infty$ 
for  $i \in V_1$  do
  for  $i1 \in V_{12}$  do
    for  $(i1, j1) \in E_{12}$  and  $j1 \in V_2$  do
      for  $j \in V_2$  do
         $w \leftarrow B_{11}(i, i1) + W_{12}(i1, j1) + B_{22}(j1, j)$ 
        if  $B_{12}(i, j) > w$  then
           $B_{12}(i, j) \leftarrow w$ 

```

return B_{12}

Results. The proposed algorithms were implemented in C++ language using Visual Studio 2022 under OS Windows 10. Experimental results were obtained on Intel Core i7-10700 CPU processor. Fig. 5 shows the speedup of 22.8 to 28.4 times given by the proposed all-pairs shortest paths approximate *ACSG* and *ABCSG* algorithms compared to the exact *APSPUS* algorithm on random graphs of 1,200, 2,400, 3,600 and 4,800 vertices. All graphs consist of 10 clusters of different sizes and with different numbers of edges. The price of this high speedup is the small inaccuracies in the calculation of shortest paths introduced by the approximate algorithms.

We evaluated the inaccuracies in shortest paths within and between clusters of the graphs consisting of 2,400 vertices and 139,444 edges with different numbers of bridge edges and different bridge edge weights. Fig. 6 shows the dependence of inaccuracies (%) in shortest paths lengths within clusters on the average bridge edge weights varying from 0 to 40 with an average edge weight of 54.55 within clusters. In Fig. 6, solid, dashed, and dotted lines correspond to 1,177, 5,761 and 11,478 bridge edges, respectively. It can be observed that the inaccuracies are higher for graphs with a larger number of bridge edges and with smaller bridge edge weights. When the bridge edge weight is greater than 40, *ACSG* becomes an accurate algorithm. The inaccuracy is only 0.031% for 1,177 bridge edges with weight 10, is 0.012% for 5,761 edges with weight 20, and is 0.049% for 11,478 edges with weight 20. All weights are less than the average weight of 54.55 for edge within clusters.

Fig. 7 shows the effect of bridge edge weights on the inaccuracies (%) given by *ABCSG* when computing the lengths of shortest paths between clusters of the sparse graphs with the same parameters. A graph with 1,177 edges connecting clusters gave inaccuracies ranging from 23.7% down to 0% when the bridge edge weight varied from 0 to 99 (0.014% for a weight of 50). When the graph has 5,761 bridge edges, the inaccuracies range from 163.6% down to 0% when the bridge edge weights range from 0 to 99 (0.018% for a weight of 50). When the graph has 11,478 bridge edges, the inaccuracies are from 100.9% down to 0% for a bridge edge weight of 0 to 40 (0.035% for a weight of 50).

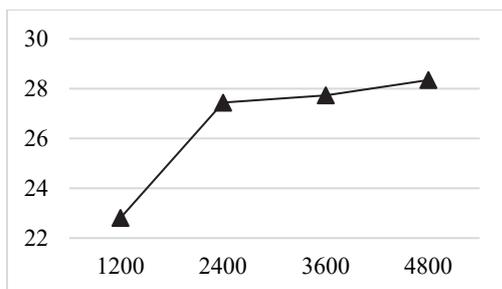


Fig. 5. Speedup (times) of *ACSG-ABCSG* compared to *APSPUS* vs. graph size

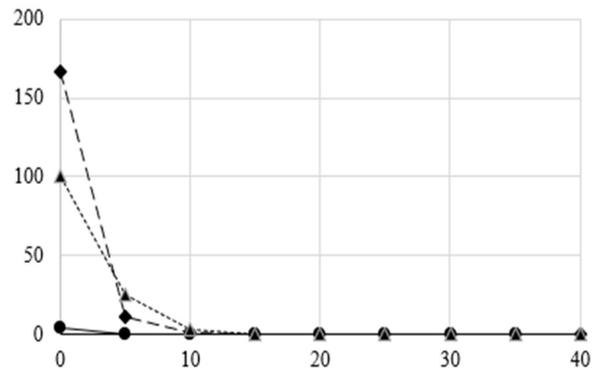


Fig. 6. Inaccuracies (%) in shortest paths lengths within clusters *ACSG* has given for graphs of 2,400 vertices vs. bridge edge weight

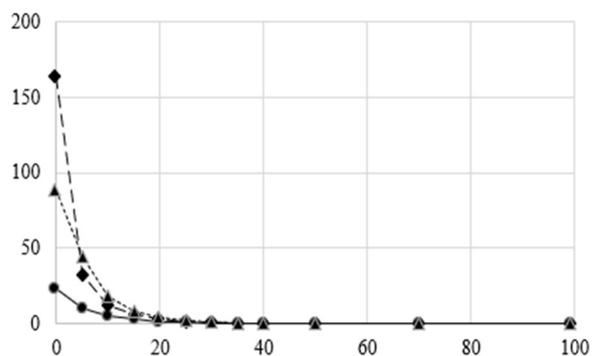


Fig. 7. Inaccuracies (%) in shortest paths lengths between clusters the *ABCSG* has given for graphs of 2,400 vertices vs. bridge edge weight

Conclusion. In the paper, we have developed an approach for solving the all-pairs shortest paths problem on large sparse graphs partitioned into dense weakly connected clusters. The key advantages of the approach are the reduction of the memory footprint and the reduction of the CPU time consumed. The approach is based on our recently published blocked algorithms that operate on unequally sized blocks of the cost adjacency matrix. In this paper, we proposed a very fast exact algorithm that implements an operation of computing the shortest paths between vertices of one cluster passing through vertices of a neighboring cluster, and through edges connecting the clusters. This operation is the basis of a time- and memory-efficient approximate algorithm that computes the shortest paths within all clusters of the graph. The shortest paths between vertices of different clusters are computed in real time. The algorithm is up to 28 times faster than the blocked Floyd-Warshall family algorithm. It can provide accurate solutions for roads and other networks since inaccuracies in shortest paths are negligible when the weights of bridge edges are greater than the weights of interior edges of clusters.

References

1. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1959, vol. 1, no. 1, pp. 269–271.
2. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path. *Communications of the ACM*, 1962, no. 5 (6), p. 345.
3. Glabowski M., Musznicki B., Nowak P. and Zwierzykowski P. Review and Performance Analysis of Shortest Path Problem Solving Algorithms. *International Journal on Advances in Software*, 2014, vol. 7, no. 1&2, pp. 20–30.
4. Madkour A., Aref W. G., Rehman F. U., Rahman M. A., Basalamah S. A Survey of Shortest-Path Algorithms. ArXiv: 1705.02044v1 [cs. DS], 4 May 2017. 26 p.
5. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm. *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*, 2003, vol. 8, pp. 857–874.
6. Park J. S., Penner M., and Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance. *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2004, no. 15 (9), pp. 769–782.
7. Katz G. J., Kider J. T. All-pairs shortest-paths for large graphs on the GPU. *GH'08: Proceedings of the 23rd ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS symposium on Graphics hardware*, ACM, 2008, pp. 47–55.
8. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Heterogeneous blocked all-pairs shortest paths algorithm. *Sistemnyy Analiz i prikladnaya informatika* [System analysis and applied information science], 2017, no. 3, pp. 68–75. (In Russian).
9. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm. *Trudy BGTU Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2023, no. 1 (266), pp. 77–83.
10. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Inference of shortest path algorithms with spatial and temporal locality for big data processing. *Big Data and Advanced Analytics: proceedings of VIII International conference*. Minsk, Bestprint Publ., 2022, pp. 56–66.
11. Prihozhy A., Karasik O. New blocked all-pairs shortest paths algorithms operating on blocks of unequal sizes. *System analysis and applied information science*, 2023, no. 4, pp. 4–13.
12. Djidjev H., Thulasidasan S., Chapuis G., Andonov R. and Lavenier D. Efficient multi-GPU computation of all-pairs shortest paths. *IEEE 28th International Parallel and Distributed Processing Symposium*. IEEE, 2014, pp. 360–369.
13. Yang S. Liu X., Wang Y., He X., Tan G. Fast All-Pairs Shortest Paths Algorithm in Large Sparse Graph. *ICS'23 Proceedings of 37th International conference on Supercomputing*, 2023, pp. 277–288.
14. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms. *System analysis and applied information science*, 2021, no. 3, pp. 40–50.
15. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Tuning block-parallel all-pairs shortest path algorithm for efficient multi-core implementation. *System analysis and applied information science*, 2022, no. 3, pp. 57–65.
16. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Influence of shortest path algorithms on energy consumption of multi-core processors. *System analysis and applied information science*, 2023, no. 2, pp. 4–12.
17. Prihozhy A. A. Generation of shortest path search dataflow networks of actors for parallel multicore implementation. *Informatics*, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 65–84.
18. Prihozhy A., Merdjani R., Iskandar F. Automatic Parallelization of Net Algorithms. *Proceedings of the International Conference on Parallel Computing in Electrical Engineering (PARELEC'00)*. Quebec, Canada, 2000, pp. 24–28.

Список литературы

1. Dijkstra E. W. A note on two problems in connexion with graphs // *Numerische Mathematik*. 1959. Vol. 1, no. 1. P. 269–271.
2. Floyd R.W. Algorithm 97: Shortest path // *Communications of the ACM*. 1962. No. 5 (6). P. 345.
3. Glabowski M., Musznicki B., Nowak P. and Zwierzykowski P. Review and Performance Analysis of Shortest Path Problem Solving Algorithms // *International Journal on Advances in Software*. 2014. Vol. 7, no. 1&2. P. 20–30.
4. Madkour A., Aref W. G., Rehman F. U., Rahman M. A., Basalamah S. A Survey of Shortest-Path Algorithms. ArXiv: 1705.02044v1 [cs. DS]. 4 May 2017. 26 p.
5. Venkataraman G., Sahni S., Mukhopadhyaya S. A Blocked All-Pairs Shortest Paths Algorithm. *Journal of Experimental Algorithmics (JEA)*. 2003. Vol. 8. P. 857–874.
6. Park J. S., Penner M., Prasanna V. K. Optimizing graph algorithms for improved cache performance // *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*. 2004. No. 15 (9). P. 769–782.
7. Katz G. J., Kider J. T. All-pairs shortest-paths for large graphs on the GPU // *GH'08: Proceedings of the 23rd ACM SIGGRAPH/EUROGRAPHICS symposium on Graphics hardware*. 2008. P. 47–55.
8. Прихожий А. А., Карасик О. Н. Разнородный блочный алгоритм поиска кратчайших путей между всеми парами вершин графа // *Системный анализ и прикладная информатика*. 2017. № 3. С. 68–75.

9. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Advanced heterogeneous block-parallel all-pairs shortest path algorithm // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 77–83.
10. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Influence of shortest path algorithms on energy consumption of multi-core processors // System analysis and applied information science. 2023. No. 2. P. 4–12.
11. Prihozhy A., Karasik O. New blocked all-pairs shortest paths algorithms operating on blocks of unequal sizes // System analysis and applied information science. 2023. No. 4. P. 4–13.
12. Djidjev H., Thulasidasan S., Chapuis G., Andonov R. and Lavenier D. Efficient multi-GPU computation of all-pairs shortest paths // IEEE 28th International Parallel and Distributed Processing Symposium. IEEE, 2014. P. 360–369.
13. Yang S. Liu X., Wang Y. He X., Tan G. Fast All-Pairs Shortest Paths Algorithm in Large Sparse Graph // ICS'23 Proceedings of 37th International conference on supercomputing. 2023. P. 277–288.
14. Prihozhy A. A. Optimization of data allocation in hierarchical memory for blocked shortest paths algorithms // System analysis and applied information science. 2021. No. 3. P. 40–50.
15. Karasik O. N., Prihozhy A. A. Tuning block-parallel all-pairs shortest path algorithm for efficient multi-core implementation // System analysis and applied information science. 2022. No. 3. P. 57–65.
16. Prihozhy A. A., Karasik O. N. Inference of shortest path algorithms with spatial and temporal locality for big data processing // Big Data and Advanced Analytics: proceedings of VIII International conference. Minsk: Bestprint Publ., 2022. P. 56–66.
17. Prihozhy A. A. Generation of shortest path search dataflow networks of actors for parallel multicore implementation // Informatics. 2023. Vol. 20, no. 2. P. 65–84.
18. Prihozhy A., Merdjani R., Iskandar F. Automatic Parallelization of Net Algorithms // Proceedings of the International conference on parallel computing in electrical engineering (PARELEC'00). Quebec, Canada, 2000. P. 24–28.

Information about the authors

Prihozhy Anatoly Alexievich – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Computer and System Software. Belarusian National Technical University (65, Nezalezhnasti Ave., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: prihozhy@yahoo.com

Karasik Oleg Nikolayevich – PhD (Engineering), Lead Engineer, ISsoft Solutions (5, Chapaeva str., 220034, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

Информация об авторах

Прихожий Анатолий Алексеевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры программного обеспечения информационных систем и технологий. Белорусский национальный технический университет (220013, г. Минск, пр. Независимости 65, Республика Беларусь). E-mail: prihozhy@yahoo.com

Карасик Олег Николаевич – кандидат технических наук, ведущий инженер. Иностранное производственное унитарное предприятие «Иссофт Солюшенз». (220034, г. Минск, ул. Чапаева 5, Республика Беларусь). E-mail: karasik.oleg.nikolaevich@gmail.com

Received 15.03.2024

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ	5
МАТЕМАТИКА	5
Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в специальном случае	5
Можей Н. П. Однородные пространства разрешимых групп Ли, не допускающие эквивалентных связностей нулевой кривизны	10
МЕХАНИКА	19
Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении	19
ФИЗИКА	25
Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Статистическое исследование флуктуации поля плотности в сферических молекулярных наночастицах	25
Тульев В. В. Изучение поверхности структур металл / кремний, полученных ионно-ассистированным осаждением покрытий в вакууме	31
Гладков Л. Л., Гладкова Г. А. Интерпретация ИК-спектра дикатиона тетраоксопорфирина	38
ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	43
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	43
Войтов И. В., Штепа В. Н., Смелов В. В., Карпович Д. С. Оценка степени автоматизации и внедрения цифровых платформ управления системами водоотведения	43
Карпович Д. С., Фокин Т. П. Аппроксимация функции $(1 - W(p))$ с запаздыванием при помощи реально дифференцирующего звена и апериодического звена второго порядка	53
Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Оптимизация применения локальной аппроксимации для процесса сглаживания	58
Олиферович Н. М., Гринюк Д. А., Сухорукова И. Г., Оробей И. О. Повышение эффективности функционирования систем управления процессами водоподготовки	70
АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ	80
Игнаткова Я. А., Шутько Н. П. Алгоритмы реализации метода комбинированной оценки доступности веб-контента	80
Талапина Д. М., Новосельская О. А. Модификация алгоритма Хафа для распознавания и классификации штриховых изображений	89
Prihozhy A. A., Karasik O. N. Fast search for shortest paths in large sparse graphs divided into connected dense clusters	96

CONTENTS

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	5
MATHEMATICS	5
Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in a special case.....	5
Mozhey N. P. Equiaffine connections of zero curvature on homogeneous spaces of soluble groups of transformations	10
MECHANICS	19
Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the touch point of a tippe top with a horizontal surface during its movements	19
PHYSICS	25
Narkevich I. I., Farafontova E. V. Statistical research of density field fluctuations in spherical molecular nanoparticles	25
Tul'ev V. V. Studying the surface of metal / silicon structures, obtained by ion-assisted deposition metal-containing coatings in vacuum	31
Gladkov L. L., Gladkova G. A. Interpretation of the ir spectrum of tetraoxoporphyrin dication.....	38
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES	43
MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS	43
Voitau I. V., Shtepa V. N., Smelov V. V., Karpovich D. S. Assessment of the degree of automation and implementation of digital platforms for managing wastewater transportation systems.....	43
Karpovich D. S., Fokin T. P. Approximation of the $(1 - W(p))$ function using a real differentiating transfer function and a second-order aperiodic transfer function.	53
Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G. Optimization of the application of local approximation for the smoothing process.....	58
Oliferovich N. M., Hryniuk D. A., Suhorukova I. G. Orobei I. O. Increasing the efficiency of water treatment control systems.....	70
ALGORITHMIC AND PROGRAMMING	80
Ignatkova Ya. A., Shut'ko N. P. Algorithms for the implementation of the method of combined assessment of the availability of web content.....	80
Talapina D. M., Novoselskaya O. A. Modification of the hough algorithm for recognition and classification of line images.....	89
Prihozhy A. A., Karasik O. N. Fast search for shortest paths in large sparse graphs divided into connected dense clusters.....	96

Редакторы *Р. М. Рябая, Т. Е. Самсанович*
Компьютерная верстка *Е. А. Матейко, Д. А. Кускильдина*
Корректоры *Р. М. Рябая, Т. Е. Самсанович*

Подписано в печать 12.09.2024. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 12,3. Уч.-изд. л. 13,2.
Тираж 40 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
ЛП № 38200000001984.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.