

УДК 681.51

Д. С. Карпович. Т. П. Фокин

Белорусский государственный технологический университет

**АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ $(1 - W(p))$ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ
ПРИ ПОМОЩИ РЕАЛЬНО ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩЕГО ЗВЕНА
И АПЕРИОДИЧЕСКОГО ЗВЕНА ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В данной публикации рассмотрено представление функции $(1 - W(p))$ с запаздыванием в виде реального дифференцирующего звена и последовательного соединения со звеном второго порядка. В статье показано влияние изменения величины запаздывания и постоянной времени объекта на точность аппроксимации.

Особенностью реализации данного способа является большое запаздывание у функции $W(p)$, которое делает управление и предсказание поведения подобных функций сложной задачей. Произведен анализ целесообразности и достаточной точности данной аппроксимации. Представлены особенности реализации, требуемые для соответствия исходной и аппроксимируемой функций.

Созданы функции для анализа влияния на ошибку аппроксимации параметров передаточных функций. Также приведена модель, сравнивающая поведение функции $(1 - W(p))$ с ее представлением в виде реального дифференцирующего звена и звена второго порядка при различных параметрах изначальной функции, и зависимость ошибки аппроксимации от запаздывания и постоянной времени данной функции.

Определены оптимальные параметры исходной функции, при которых аппроксимация наиболее точно повторяет поведение оригинальной функции, в качестве уравнения зависимости между постоянной времени и запаздыванием функции. Построена плоскость распространения ошибки аппроксимации относительно параметров изначальной функции.

Ключевые слова: аппроксимация, передаточная функция, ошибка аппроксимации, звено второго порядка с запаздыванием.

Для цитирования: Карпович Д. С., Фокин Т. П. Аппроксимация функции $(1 - W(p))$ с запаздыванием при помощи реально дифференцирующего звена и аperiodического звена второго порядка // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 53–57.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-8.

D. S. Karpovich. T. P. Fokin

Belarusian State Technological University

**APPROXIMATION OF THE $(1 - W(p))$ FUNCTION USING A REAL
DIFFERENTIATING TRANSFER FUNCTION AND A SECOND-ORDER
APERIODIC TRANSFER FUNCTION**

This paper considers the representation of the function $(1 - W(p))$ with delay in the form of a real differentiating link and serial connection with the second-order link. The article shows the influence of changing the value of the delay and time constant of the object on the accuracy of approximation.

The peculiarity of the implementation of this method is a large delay of the function $W(p)$, which makes the control and prediction of the behaviour of such functions a difficult task. The feasibility and sufficient accuracy of this approximation are analysed. The implementation features required to match the original and approximated functions are presented.

Functions are created to analyse the influence of transfer function parameters on the approximation error. A model comparing the behaviour of the function $(1 - W(p))$ with its representation in the form of a real differentiating transfer function and a second-order transfer function at different parameters of the original function and the dependence of the approximation error on the delay and time constant of this function is also given.

The optimal parameters of the original function, at which the approximation most accurately repeats the behaviour of the original function, are determined as the equation of dependence between the time constant and delay of the function. The plane of propagation of the approximation error with respect to the parameters of the original function is constructed.

Keywords: approximation, transfer function, approximation error, second-order delayed transfer function with delay.

For citation: Karpovich D. S., Fokin T. P. Approximation of the $(1 - W(p))$ function using a real differentiating transfer function and a second-order aperiodic transfer function. *Proceedings of BSTU, issue. 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 53–57 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-8.

Введение. При управлении сложными объектами с большими запаздываниями зачастую требуется выполнение функции $(1 - W(p))$ для синтеза предиктора или системы управления в целом. Данная функция имеет сложности при реализации, обусловленные в том числе и большим запаздыванием функции $W(p)$.

Основная часть. Разность $(1 - W(p))$ зачастую сложна в реализации обратной связи или проста в виде элемента синтезируемой системы управления, и по этой причине для реализации сложных схем вроде предикторов часто прибегают к ее представлению в ином виде. Рассмотрим вариант, в котором нам необходимо получить функцию $(1 - W(p))$ путем аппроксимации звена запаздывания реально-дифференцирующим элементом [1].

Для этого исходную передаточную функцию со звеном чистого запаздывания

$$W_{\text{зд}}(p) = \frac{1 \cdot e^{-\tau_{\text{зд}} p}}{T_{\text{зд}}^2 p^2 + 2T_{\text{зд}} \xi_{\text{зд}} p + 1},$$

где $\tau_{\text{зд}}$ – величина чистого запаздывания; $T_{\text{зд}}$ – постоянная времени исходной передаточной функции; $\xi_{\text{зд}}$ – коэффициент демпфирования, можно представить в виде последовательного соединения реального дифференцирующего звена и звена второго порядка вида:

$$1 - W_{\text{зд}}(p) \cong \frac{kp}{T_{\text{д}} p + 1} \cdot \frac{1}{T_{\text{д}}^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

где коэффициенты аппроксимирующей функции связаны с параметрами исходной функции следующими зависимостями:

$$k = 2T_{\text{зд}} \xi_{\text{зд}} + \tau_{\text{зд}};$$

$$T_{\text{д}} = \frac{0,5\tau_{\text{зд}} - T_{\text{зд}}^2}{\frac{2T_{\text{зд}} \xi_{\text{зд}}}{\tau_{\text{зд}}} + 1};$$

$$T_2 = T_{\text{зд}}; \quad T_1 = 2T_{\text{зд}} \xi_{\text{зд}}.$$

При этом следует выделить важное условие для изначальной системы, которое должно выполняться для корректной аппроксимации запаздывания:

$$T_{\text{зд}}^2 < 0,5\tau_{\text{зд}}^2. \quad (1)$$

Исходная функция $(1 - W(p))$ имеет переходную характеристику следующего вида (рис. 1) [1].

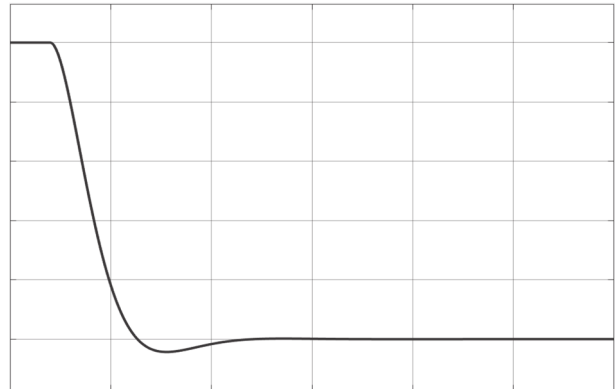


Рис. 1. График переходной характеристики исходной передаточной функции с запаздыванием

При этом аппроксимированная функция будет обладать переходной характеристикой вида, представленного на рис. 2.

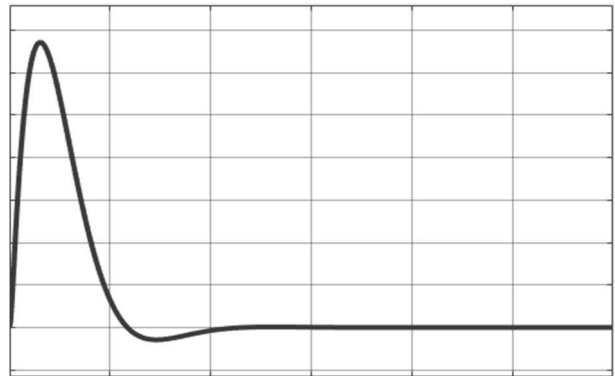


Рис. 2. График переходной характеристики аппроксимированной функции

Как можно заметить, у данных переходных характеристик есть отличия. Если сравнить площади под кривыми, представленными на рис. 1 и 2, можем получить следующие графики (рис. 3, 4) [2].

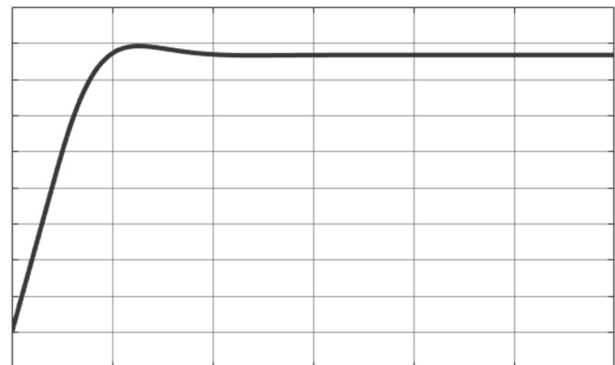


Рис. 3. График интеграла переходной характеристики исходной передаточной функции

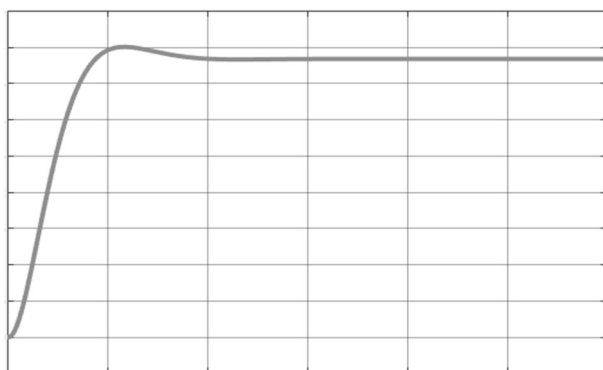


Рис. 4. График интеграла переходной характеристики аппроксимированной передаточной функции

Проанализировав рис. 3 и 4, можно сделать вывод, что площади подынтегральных кривых близки друг другу. Это подобие еще больше проявляется, если совместить эти графики на одной координатной плоскости, как показано на рис. 5.

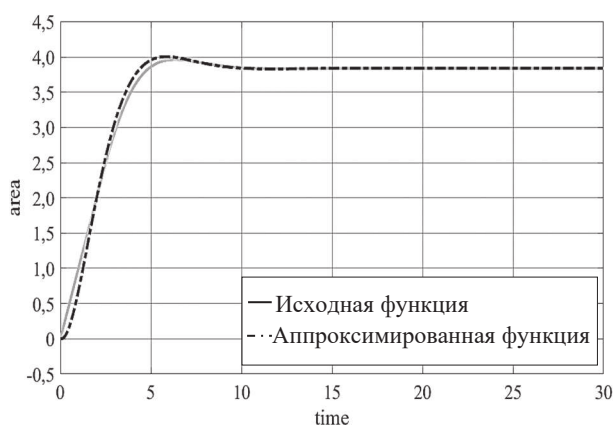


Рис. 5. Графики интегралов переходных характеристик исходной и аппроксимированной передаточных функций

Определим, какое влияние оказывают величины параметров исходного объекта на ошибку аппроксимации. Для этого произведем ряд симуляций с изменением одного параметра при неизменных иных параметрах и построим графики изменения модуля ошибки площади под кривой [3].

При изменении запаздывания график модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины чистого запаздывания $\tau_{зд}$ меняется в соответствии с видом, представленным на рис. 6.

Данные, приведенные на рис. 6, были получены для передаточной функции $W_{зд}(p)$ следующего вида:

$$W_{зд}(p) = \frac{1 \cdot e^{-\tau_{зд}p}}{1,99^2 p^2 + 2,828p + 1},$$

где $\tau_{зд}$ изменялось в диапазоне от 4 до 25 с.

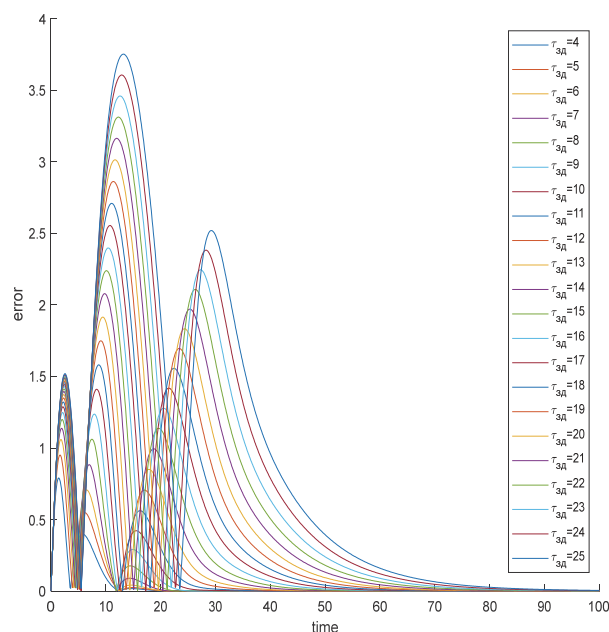


Рис. 6. График изменения модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины чистого запаздывания $\tau_{зд}$

Анализ рис. 6 позволяет сделать вывод, что увеличение запаздывания $\tau_{зд}$ влечет за собой рост ошибки на первом и втором пиках в примерно равных пропорциях, но при этом приводит лишь к небольшому смещению этих двух пиков в течение нескольких десятков секунд [4].

При изменении постоянной времени объекта $T_{зд}$ график модуля ошибки площадей под кривой меняется в соответствии с графиком, представленным на рис. 7.

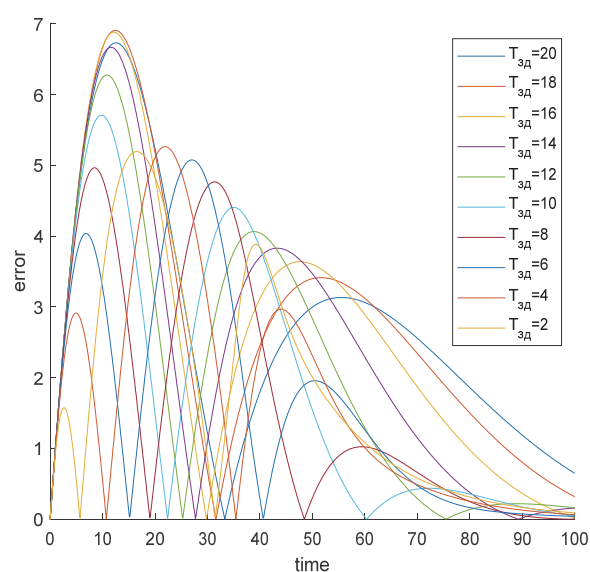


Рис. 7. График изменения модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины постоянной времени объекта

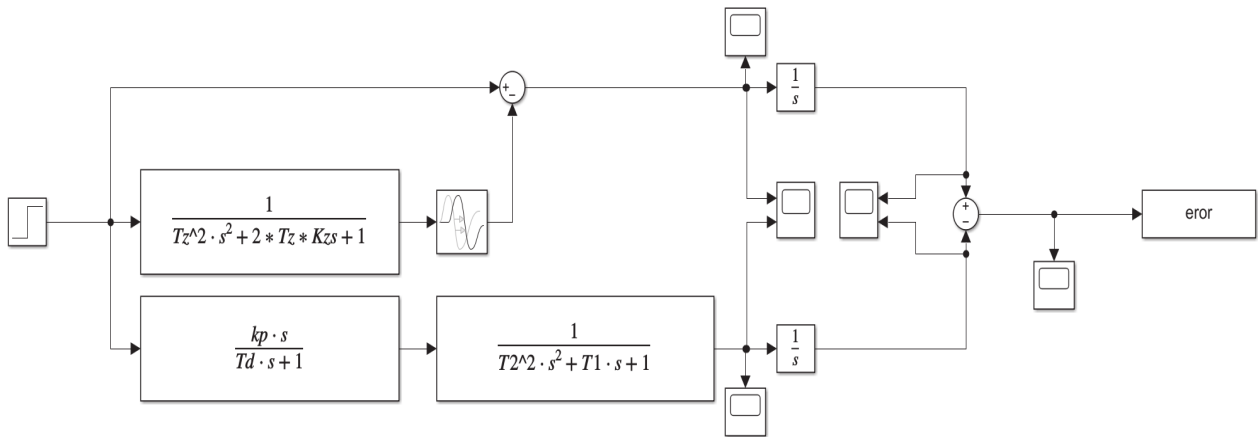


Рис. 8. Структура Simulink для определения ошибки аппроксимации

Данные, представленные на рис. 7, были получены для передаточной функции $W_{зд}(p)$ следующего вида:

$$W_{зд}(p) = \frac{1 \cdot e^{-35p}}{T_{зд}^2 p^2 + 1,414 T_{зд} p + 1},$$

где $T_{зд}$ изменялось в диапазоне от 2 до 20 с.

Как можно заметить, увеличение постоянной времени $T_{зд}$ влечет за собой увеличение первого пика ошибки, при постепенном уменьшении второго и третьего пиков, но при этом приводит к существенному смещению этих двух пиков во времени, в отличие от изменений запаздывания.

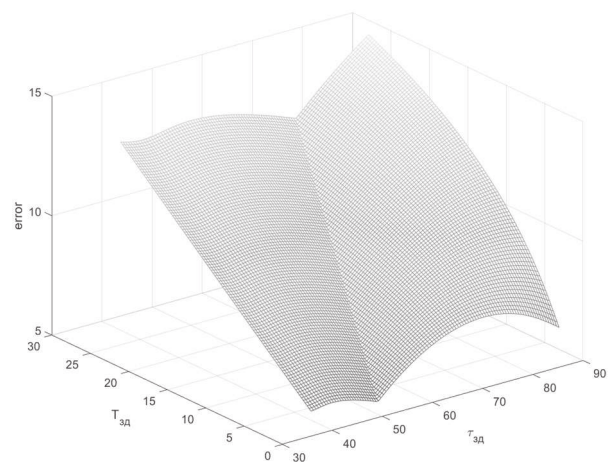
Для оценки влияния на графики обоих параметров построим плоскость распределения модуля разности площадей под кривыми для различных значений запаздывания и постоянных времени.

Для решения данной задачи необходимо построить в среде Simulink схему, представленную на рис. 8. В которой верхняя часть реализует исходную передаточную функцию $(1 - W(p))$ с запаздыванием, а нижняя часть – аппроксимирующую передаточную функцию с реально дифференцирующим звеном. Интеграторы $\frac{1}{s}$ вычисляют

площади под графиками переходных процессов, а модуль разностей этих площадей выводится для последующего анализа [5].

После чего, проведя ряд симуляций, мы получим следующую поверхность модуля ошибки аппроксимации (error) в зависимости от параметров объекта ($\tau_{зд}$ и $T_{зд}$) (рис. 9).

Анализ данных, представленных на рис. 9, позволяет сделать вывод о том, что модуль ошибки аппроксимации имеет тенденцию к снижению при уменьшении постоянной времени объекта $T_{зд}$ и запаздывания $\tau_{зд}$, однако при этом изменение является нелинейным и имеет ярко выраженный минимум, характер изменения которого является линейным.

Рис. 9. График изменения модуля ошибки площадей под кривыми в зависимости от величины постоянной времени объекта $T_{зд}$ и запаздывания $\tau_{зд}$

При этом условие корректной аппроксимации (1) для минимизации ошибки может быть дополнено следующим условием:

$$T_{зд} = 1,5 + 1,125 \cdot (\tau_{зд} - 51). \quad (2)$$

Заключение. В данной работе проанализировано влияние на точность аппроксимации звена запаздывания для передаточной функции вида $(1 - W(p))$ с помощью реально дифференцирующего звена. Увеличение постоянной времени колебательного звена второго порядка повышает ошибку аппроксимации, как и увеличение значения чистого запаздывания. Однако влияние постоянной времени колебательного звена второго порядка на ошибку аппроксимации имеет скорее линейный характер, в отличие от запаздывания, которое влияет более сложным образом. Наличие явно выраженного локального минимума на поверхности, представленной на рис. 9, позволяет уточнить характер соотношений между $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ объекта для минимизации ошибки аппроксимации. Параметры $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ должны быть связаны линейной зависимостью для минимизации ошибки аппроксимации.

Проведенные исследования также показали, что характер влияния $\tau_{зд}$ на ошибку аппроксимации предположительно носит периодический характер, однако линии локальных минимумов будут проходить параллельно

друг другу, т. е. характер взаимосвязи между $\tau_{зд}$ и $T_{зд}$ имеет вид, соответствующий условию (2), но с другим свободным членом. Линейный коэффициент зависимости при этом будет сохраняться.

Список литературы

1. Кулаков Г. Т., Кулаков А. Т., Кравченко В. В. Теория автоматического управления. Минск: Высшая школа, 2022. 197 с.
2. Кузьмицкий, И. Ф., Кулаков, Г. Т. Теория автоматического управления: учебник. Минск: БГТУ, 2010. 572 с. (1 – $W(p)$)
3. Попов Е. П. Теория линейных систем и управления. М.: Наука, 1987. 341 с.
4. Теория автоматического управления: учебник / С. Е. Душин [и др]. М.: Высшая школа, 2005. 567 с.
5. Кузьміцкі І. Ф., Карповіч Д. С., Ліхавіцкі В. В. Тэорыя аўтаматычнага кіравання. Лабараторны практыкум. Мінск: БДТУ, 2007. 69 с.

References

1. Kulakov G. T., Kulakov A. T., Kravchenko V. V. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Minsk, Vysheyschaya shkola Publ., 2022. 197 p.
2. Kuzmitski I. F., Kulakov G. T. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Minsk, BGTU Publ., 2010. 572 p.
3. Popov E. P. *Teoriya lineynykh sistem i upravleniya* [Automatic control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 341 p.
4. S. E. Dushin [et al.]. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2005. 567 p.
5. Kuzmitski I. F., Karpovich D. S., Likhavitski V. V. *Teoriya avtomaticheskogo kirovannya. Laboratorny praktykum* [Automatic control theory. Laboratory practical work]. Minsk, BGTU Publ., 2007. 69 p.

Информация об авторах

Карпович Дмитрий Семенович – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Фокин Тимофей Павлович – преподаватель-стажер кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: fokin@belstu.by

Information about the authors

Karpovich Dzmitry Semenovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Head of the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: d.karpovich@belstu.by

Fokin Timophej Pavlovich – teacher trainee, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: fokin@belstu.by

Поступила 16.05.2024