

МЕХАНИКА MECHANICS

УДК 531.382

Т. Б. Карлович, А. П. Васеха, Р. Н. Ласовский
Белорусский государственный технологический университет

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ТОЧКИ КАСАНИЯ ВОЛЧКА ТИП-ТОП С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ

Волчок тип-топ (tippe top) является примером механической системы, которая при вращении может переворачиваться на 180° , занимая неустойчивое положение равновесия. Волчок представляет собой симметричное тело вращения с одинаковыми моментами инерции относительно горизонтальных осей и отличным от них моментом инерции относительно вертикальной оси. В состоянии покоя центр тяжести волчка располагается ниже центра описанной вокруг него сферы, а при движении он может подниматься выше центра сферы. Переворот волчка обусловлен наличием трения скольжения по поверхности.

В настоящей работе для эксперимента были разработаны два вида волчков в виде тонкостенных сферических оболочек, срезанных выше экватора, и ножек в виде усеченных конусов, вкручиваемых в цилиндрические отверстия на дне сферических оболочек. Внутри одной из сферических оболочек для локализации воздуха добавлялись перегородки. Модели распечатывались на 3D-принтере PLA-пластиком. Затем волчки запускались многократно на гладкой горизонтальной поверхности и производилась видеосъемка их движения. Выяснилось, что траектории движения представляют собой сходящиеся спирали, причем для волчка без перегородок максимальный видимый диаметр витка спирали больше, чем для волчка с перегородками. Это соответствует предсказаниям теории эволюции тяжелого динамически симметричного тела сферической формы на горизонтальной плоскости с малым трением.

Ключевые слова: механическая система, динамически симметричное тело, количество движения, кинетический момент.

Для цитирования: Карлович Т. Б., Васеха А. П., Ласовский Р. Н. Экспериментальное исследование траектории точки касания волчка тип-топ с горизонтальной поверхностью при его движении // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 19–24.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3.

T. B. Karlovich, A. P. Vasekha, R. N. Lasovsky
Belarusian State Technological University

EXPERIMENTAL STUDY OF THE TRAJECTORY OF THE TOUCH POINT OF A TIPPE TOP WITH A HORIZONTAL SURFACE DURING ITS MOVEMENT

A tippe top is an example of a mechanical system that is spun by hand and can tip 180° when rotated, exhibited dynamically unstable behavior. A top is a symmetrical body of rotation with equal moments of inertia about the horizontal axes and a different moment of inertia about the vertical axes. At rest, the center of gravity of the top is located below the center of the sphere described around it, and when moving, it can rise above the center of the sphere. The turning of the top is due to the presence of sliding friction on the surface.

In this work, models of two types of tops in the form of thin-walled spherical shells, cut above the equator, and legs in the form of truncated cones, screwed into cylindrical holes at the bottom of the spherical shells, were developed for the experiment. Partitions were added inside of the spheres to contain air. The models were printed on a 3D-printer using PLA-plastic. Then the tops were launched repeatedly on a smooth horizontal surface and their movement was videotaped. It turned out that the trajectories of movement are converging spirals, and for a top without partitions maximum visible diameter of a spiral

turn is greater than for a top with partitions. This corresponds to the predictions of the theory of evolution of a heavy dynamically symmetrical spherical body on a horizontal plane with low friction.

Keywords: mechanical system, dynamically symmetrical body, momentum, kinetic moment.

For citation: Karlovich T. B., Vasekha A. P., Lasovsky R. N. Experimental study of the trajectory of the touch point of a tippe top with a horizontal surface during its movement. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 19–24 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-3.

Введение. Волчком тип-топ или волчком Томпсона называется кинетическое устройство, которое при раскручивании на неподвижной горизонтальной поверхности может переворачиваться на 180° в вертикальной плоскости. Обычно такой волчок представляет собой сферическую оболочку, срезанную выше экватора с конусообразной ножкой внутри. Волчок является симметричным телом с осью вращения, совпадающей с осью конусообразной ножки, и центром тяжести, находящимся ниже центра сферы, описанной вокруг него. Для переворота волчка и поднятия его центра тяжести выше центра сферы необходимо раскрутить волчок до определенной угловой скорости. В случае малой скорости вращения переворот не происходит, а возникает лишь прецессия оси симметрии волчка.

Объяснение опрокидывания волчка связано с решением задачи о движении тела по твердой неподвижной горизонтальной поверхности с учетом силы трения. Еще в середине прошлого века появился ряд работ, качественно объясняющих поворот оси симметрии быстро закрученного волчка, основанных на решении нелинейных динамических уравнений. Задача о существовании и устойчивости непрерывных вращений сферы на горизонтальной поверхности была исследована в работе [1]. В работе [2] рассмотрена модель движения шара, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии. На него действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта волчка с горизонтальной плоскостью. Получены приближенные уравнения, описывающие динамику шара, и на основе диаграмм Смейла продемонстрированы условия существования устойчивых решений, в том числе для случая расположения центра тяжести шара выше его центра симметрии.

В работе [3] исследованы теоретическая модель и экспериментальная реализация волчка тип-топ. Выделены три типа динамического поведения: с опрокидыванием, без опрокидывания и наклонное, при котором волчок поднимается, но не переходит в вертикальное положение, а остается в некотором промежуточном состоянии. Найдены условия, при которых осуществляется переход от одного типа вращения к другому, а также изготовлены и протестированы несколько образцов волчка «три-в-одном» с подвижным

центром тяжести. Перемещение центра тяжести в образцах позволяет наблюдать три типа их динамического поведения.

Основная часть. Для эксперимента были разработаны модели двух волчков, которые изготавливались на 3D-принтере при помощи печати PLA-пластиком плотностью $1,24 \text{ г/см}^3$. Модель волчка тип-топ (рис. 1) представляет собой сферическую оболочку, толщиной 1 мм и внешним диаметром 38 мм. Оболочка срезается приблизительно на $1/4$ диаметра, чтобы в образовавшееся отверстие можно было вставить ножку и вручную за нее раскручивать волчок. Ножка является усеченным конусом длиной 38 мм с меньшим диаметром 3 мм и большим диаметром 5 мм. Она вкручивается в цилиндрическое отверстие высотой 4 мм, сделанное в дне сферы.

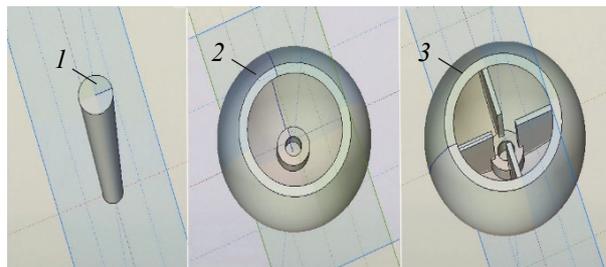


Рис. 1. 3D-модели элементов волчков тип-топ:
1 – ножка; 2 – сферическая оболочка без ребер;
3 – сферическая оболочка с ребрами

Моделирование волчков осуществлялось в САД системе по оригинальным чертежам. Необходимость отдельной печати ножки и шляпки (срезанной сферической оболочки) обусловлена соблюдением сферической формы с точностью 0,5 мм, иначе волчок не будет переворачиваться. Для второго волчка (рис. 1, рис. 2, б) сферическая оболочка печатается с внутренними ребрами (перегородками), разбивающими ее пространство на четыре одинаковых сектора. Масса первого волчка составляет 7,03 г, второго – 8,13 г. Соответствующие элементы моделей представлены на рис. 1.

Готовые собранные волчки показаны на рис. 2. На рис. 2, а представлен образец с полой шляпкой, в которой при раскручивании осуществляется вихревое движение потоков воздуха. Для уменьшения скорости воздушных потоков внутри сферы служат внутренние ребра (рис. 2, б).

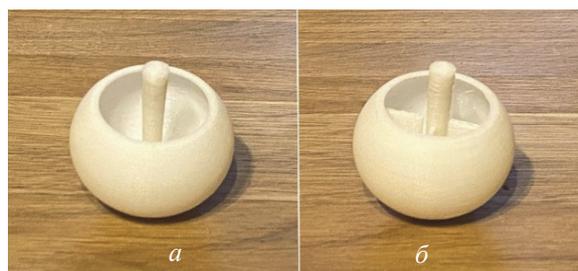


Рис. 2. Волчки тип-топ, распечатанные на 3D-принтере:

а – без перегородок; *б* – с перегородками

Для экспериментов с волчками выбиралась твердая горизонтальная поверхность с малой шероховатостью. Измерение наклона поверхности проводилось уровнем. Максимальные отклонения от горизонтали составили $\pm 0,5^\circ$. В качестве материала для поверхности использовались ламинат и окрашенный порошковой краской металлический лист. Принципиального отличия в движениях волчков на менее шероховатой поверхности (ламинат) и более шероховатой поверхности (металлический лист) не наблюдалось. Лучшее сцепление с поверхностью, большая сила трения скольжения и более четко прописанная траектория точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении наблюдались на металлической поверхности.

Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении проводилась двумя способами. Визуализация траектории первым способом осуществлялась путем видеосъемки со скоростью 240 кадров в секунду с последующей раскадровкой через равные интервалы времени $\sim 0,1$ с. При отсутствии сыпучего материала на поверхности траектории точки касания представляли собой начальный криволинейный отрезок движения до переворота волчка (не показан на рис. 3) и скручивающуюся спираль после его переворота (показана на рис. 3). Причем первоначальный отрезок движения был длиннее для волчка без ребер, так же как и максимальный видимый диаметр витка спирали. Волчок без ребер быстрее переворачивался, но был менее устойчивый при вращении на ножке. Волчок с ребрами переворачивался при большей начальной скорости, однако дольше мог находиться в перевернутом состоянии. Максимальное количество витков спирали было более 10. Видимый радиус закручивания траектории для волчка без ребер составлял ~ 150 мм, для волчка с ребрами ~ 100 мм.

Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности с сыпучим материалом производилась вторым способом: по следу, оставляемому ножкой волчка. Для этого на темный ламинат наносился мелкодисперсный легкосыпучий материал. Лучше

всего для этих целей подошла мука, которая предварительно просеивалась, а затем рассыпалась тонким слоем по поверхности ламината. Волчки много раз запускались вручную на ламинате, в результате их движения в муке образовывались дорожки, повторяющие траекторию точки касания ножки горизонтальной поверхности.

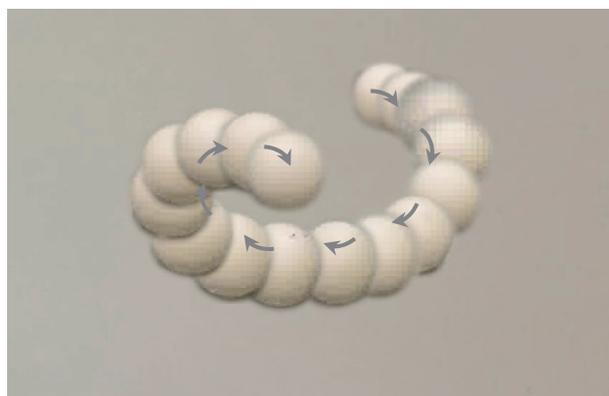


Рис. 3. Фрагмент спиралевидного движения шапочки волчка после его переворота, вид сверху (получен путем раскадровки видео с последующим удалением фона из кадров и наложением их друг на друга; стрелками показано направление движения)

В присутствии сыпучего материала возрастала сила трения скольжения волчка по поверхности. Для волчков с ребрами и без ребер при движении количество витков скручивающейся спирали резко уменьшалось. В некоторых случаях волчки не переворачивались, а прецессировали на шляпке. Типичные траектории движения волчков представлены на рис. 4. Основные этапы эволюции хорошо заметны на рис. 4, *а*. Участок *AB* характеризует движение волчка на шляпке при воздействии внешнего крутящего момента. В точке *B* вследствие неустойчивого движения за короткий интервал времени происходит переворот на ножку. Тонкие линии соответствуют скольжению конца ножки по поверхности. На участке *BC* наблюдается движение волчка по дуге окружности с одновременным вращением вокруг мгновенной вертикальной оси. В точке *C* происходит торможение движения и обратный переворот волчка на шляпку. На участке *CD* движение осуществляется на шляпке до полной остановки. Вследствие неоднородности насыпания муки на ламинированную поверхность движение волчка может сопровождаться случайными поворотами, и тогда его траектория становится петлеобразной, как на рис. 4, *б*. Если переворота волчка во время движения не происходит, то на траектории отсутствует участок *BC* (рис. 4, *а*). Такой случай показан на рис. 4, *в*. Для менее инертного волчка

без ребер показана траектория на рис. 4, *г*. Вначале он движется по спирали, а затем в силу большого сопротивления резко тормозит, разворачивается и заканчивает движение.

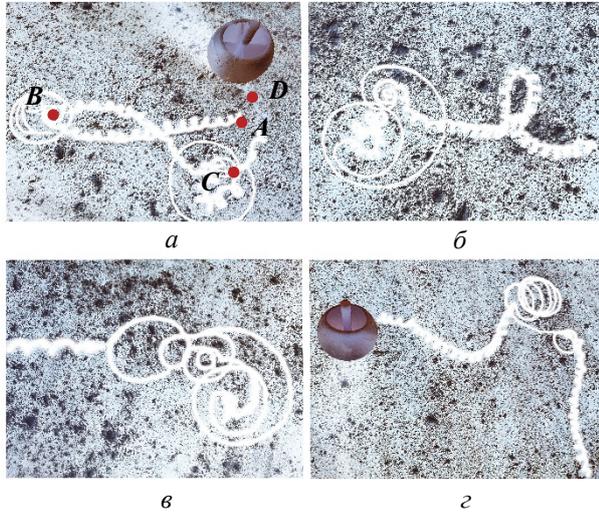


Рис. 4. Визуализация траектории точки касания волчка горизонтальной поверхности при его движении, полученная путем инверсии изображения (для улучшения качества изображения сделана обводка траекторий): *а* – траектория для волчка с ребрами: *A* – начало траектории, *B* – момент переворота волчка, *BC* – движение на ножке, *C* – опрокидывание на шляпку; *D* – конец движения; *б* – петлеобразная траектория для волчка с ребрами; *в* – траектория для волчка, который не перевернулся на ножку; *г* – траектория для волчка без ребер

Спиральное движение волчка теоретически предсказывается в статье [4] на основе нелинейной динамической модели сферической оболочки на плоскости с вязким трением. Для описания прецессии сферы радиуса ρ используются неподвижная система отсчета $Oxyz$ и подвижная система отсчета $G\xi\eta\sigma$ с началом в центре масс, который отстоит от центра симметрии C на величину ε (рис. 5). Система векторных дифференциальных уравнений записывается с учетом теорем об изменении количества движения и момента количества движения сферы, условия постоянства вектора восходящей вертикали γ и условия безотрывного движения сферы по горизонтальной плоскости в точке касания плоскости Q :

$$\begin{aligned} m\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{v} &= -mg\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{R}; \\ I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} + \mathbf{M}; \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} &= 0; \\ (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \boldsymbol{\gamma} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где m – масса сферы; \mathbf{v} – скорость центра масс; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость; $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор

восходящей вертикали; \mathbf{R} – реакция, приложенная в точке Q ; $\mathbf{R} = N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}$, где N – нормальная составляющая реакции; \mathbf{F} – сила трения скольжения; I – центральный тензор инерции сферы относительно осей координат $G\xi, G\eta, G\sigma$, связанных со сферой; \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из центра масс к нижней точке сферы Q ; $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ – суммарный момент силы трения и силы сопротивления воздуха.

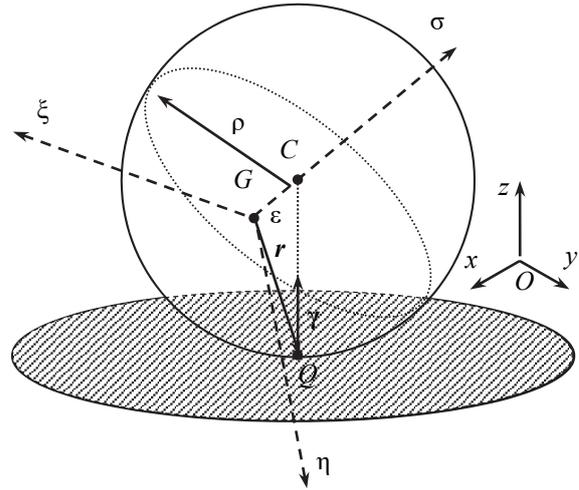


Рис. 5. Схематическое движение сферического волчка по горизонтальной плоскости Oxy

Предполагается, что моменты инерции относительно осей $G\xi$ и $G\eta$ одинаковы между собой, равны A и отличаются от момента инерции относительно оси $G\sigma$ – C , так что тензор инерции I имеет вид

$$I = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В работе [4] аналитически определяются координаты точки касания Q в виде периодических зависимостей от времени, которые задают сходящееся спиральное движение, однако с ограничением радиуса эволюционирующей окружности радиусом сферы ρ .

В эксперименте с двумя волчками наблюдались спиральные движения с видимым радиусом окружности вращения, большим радиуса сферы волчков. Несовпадение с теоретическими расчетами может быть обусловлено несколькими причинами: 1) использованием теории возмущений в работе [4]; 2) несферической формой волчков; 3) несимметричным раскручиванием волчка вручную (большой и указательный пальцы руки создают несимметричную пару сил); 4) влиянием сопротивления воздуха. В случае вращения цельной сферы

обтекание воздухом происходит только снаружи, в случае срезанной сферической оболочки движение воздуха наблюдается как снаружи, так и внутри. Сила сопротивления воздуха, действующая на сферический объект, оценивается по формуле

$$F_c = c \frac{\rho_0 w^2}{2} s, \quad (3)$$

где c – коэффициент аэродинамического сопротивления для вращающихся тел; ρ_0 – плотность воздуха; w – скорость набегающего воздушного потока; s – эффективная площадь.

Для чисел Рейнольдса $\sim 10^5$ в соответствии с работой [5] примем значение $c = 0,48$. Тогда $F_c = 0,0065$ Н. Оценку силы трения произведем для коэффициента трения скольжения $\mu = 0,5$ с использованием равенства

$$F_m \simeq \mu mg = 0,0245 \text{ Н}. \quad (4)$$

В соответствии с расчетами по формулам (3) и (4) сила сопротивления воздуха может составлять до 27% от силы трения скольжения. В случае срезанной сферы обтекание воздухом происходит как по внешней, так и по внутренней поверхности волчка с перемешиванием

воздушных потоков на поверхности среза сферы.

Теоретически сопротивление воздуха учитывается в уравнениях (1) в виде пары сил, эквивалентной моменту M_2 , направление которого совпадает с направлением кинетического момента волчка [6].

Заключение. В работе экспериментально исследованы траектории точки касания волчка тип-топ горизонтальной поверхности при его движении. Для этого были смоделированы и распечатаны на 3D-принтере два волчка, шляпка одного из которых была полый, а внутри шляпки другого находились ребра, повышающие сопротивление воздуха при движении. Экспериментальные исследования показали, что оба волчка при раскручивании вручную на шляпке очень быстро переворачиваются на ножку и движутся по закручивающейся спирали, причем максимальный видимый диаметр витка спирали у волчка без ребер оказывается большим, чем у волчка с ребрами. Также было проведено сравнение с аналитическими результатами, полученными в работе [4]. Оказалось, что форма траектории полностью совпадает с теоретическими предсказаниями, однако есть отличие в параметрах спирали.

Список литературы

1. Карапетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
2. Карапетян А. В., Муницына М. А. Динамика волчка тип-топ при вязком трении // Труды МФТИ. 2021. Т. 13, № 1. С. 114–121.
3. К созданию прототипа сферического китайского волчка / М. С. Чоччи [и др.] // Нелинейная динамика. 2012. Т. 1, № 2. С. 391–425.
4. Маркеев А. П. К динамике волчка // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 3. С. 30–38.
5. Герасимов С. А. Об автомодельности аэродинамического сопротивления // Вестник машиностроения. 2007. № 1. С. 34–35.
6. Паус Э. Дж. Динамика системы твердых тел. В 2 т. Т. 2 / под. ред. Ю. А. Архангельского, В. Г. Демина. М.: Наука, 1983. 544 с.

References

1. Karapetyan A. V. Global quality analysis of Chinese spinning top (tippe top) dynamics. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Dinamika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics], 2008, vol. 43, no. 3, pp. 33–41 (In Russian).
2. Karapetyan A. V., Munitsyna M. A. Dynamics of a tip-top with viscous friction. *Trudy MFTI*. [Proceedings of MFTI], 2021, vol. 13, no. 1, pp. 114–121 (In Russian).
3. Ciocci M. S., Malengier B., Langerok B., Grimonprez B. Towards the creation of a prototype of Spherical Chinese top. *Nelineynaya dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2012, vol. 1, no. 2, pp. 391–425 (In Russian).
4. Markeev A. P. To the dynamics of a top. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [News of the USSR Academy of Sciences. Solid Body Mechanics], 1984, no. 3, pp. 30–38 (In Russian).
5. Gerasimov S. A. On the self-similarity of aerodynamics drag. *Vestnik mashinostroyeniya* [Bulletin of Mechanical Engineering], 2007, no. 1, pp. 34–35 (In Russian).
6. Routh E. J. Dynamics of a system of rigid bodies. Vol. 2. Ed. Yu. A. Arkhangelsky, V. G. Demin Moscow, Nauka Publ., 1983. 544 p.

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Васеха Антон Павлович – ассистент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: anton.vaseha@mail.ru

Ласовский Руслан Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры механики и конструирования. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lasovskyr@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Vasekha Anton Pavlovich – Assistant, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anton.vaseha@mail.ru

Lasovsky Ruslan Nikolayevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Mechanics and Design. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lasovskyr@gmail.com

Поступила после доработки 10.07.2024