

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МАТЕМАТИКА MATHEMATICS

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

МОДАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ЗАПАЗДЫВЮЩЕГО ТИПА В СПЕЦИАЛЬНОМ СЛУЧАЕ

В публикации рассмотрено решение задачи модальной управляемости для двумерной стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Дано определение задачи модального управления для исследуемой системы. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно.

В статье получено решение поставленной задачи при определенных значениях параметров исследуемой системы с запаздыванием. Также получены регуляторы по типу обратной связи, решающие задачу модального управления для рассматриваемой системы. Эти регуляторы найдены в частотной области как элементарные функции коэффициентов системы. Далее приведены правила, согласно которым полученные регуляторы переходят из частотной области в регуляторы по типу обратной связи для исследуемой системы. Приведен иллюстративный пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы.

Дан список литературы, в которой задача модального управления решается для других запаздывающих систем и систем нейтрального типа.

Ключевые слова: запаздывающие системы, модальное управление, регуляторы, обратная связь, запаздывание.

Для цитирования: Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в специальном случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2024. № 2 (284). С. 5–9.

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

MODAL CONTROLLABILITY OF ONE TWO-DIMENSIONAL DELAYED SYSTEM IN A SPECIAL CASE

The publication considers the solution of the modal controllability problem for a two-dimensional stationary dynamic system with a retarded argument with one input and two commensurate delays in one special case. The definition of the modal control problem for the system under study is given. The modal control problem is one of the main problems of control theory. Such a problem has been well studied for systems without delay. For systems with a retarded argument and neutral type systems, the solution of the modal control problem is much more complicated. This is due to the fact that the state space of such systems is usually infinite-dimensional.

The article obtains a solution to the problem for certain values of the parameters of the system with delay under study. Feedback-type controllers are also obtained that solve the modal control problem for the system under study. These controllers are found in the frequency domain as elementary functions of the system coefficients. Below are the rules according to which the obtained controllers pass from the frequency domain to feedback-type controllers for the system under study. An illustrative example of solving the modal control problem for the system under study is given.

A list of literature is given in which the modal control problem is solved for other delayed systems and neutral type systems.

Keywords: retarded systems, modal control, regulators, feedback control, delay.

For citation: Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in a special case. *Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics*, 2024, no. 2 (284), pp. 5–9 (In Russian).

DOI: 10.52065/2520-6141-2024-284-1.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом и систем нейтрального типа [1–7] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. В данной работе решается задача модального управления для двумерной стационарной динамической системы с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями в одном специальном случае. Получены регуляторы по принципу обратной связи, решающие задачу модального управления. Приведен пример решения такой задачи.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + bu(t), \quad (1)$$

где A_j , $j = 0, 1, 2$ – постоянные (2×2) -матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0 \ 1)$

(штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h}] &\equiv \lambda^2 + \\ &+ (\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h}) \lambda + \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \\ &+ \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h} x(t) \equiv x(t - jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = \sum_{j=0}^M q'_j x(t-jh) + \int_{-lh}^0 g'(s) x(t+s) ds, \quad (3)$$

где $l, M \in \mathbb{N}$, q_j , $j = 0, 1, \dots, M$ – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = \sum_{j=0}^M q'_j e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \quad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 2, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с формулой (2)):

$$\begin{aligned} \det[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)] &\equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h}) \lambda + \tilde{\alpha}_{00} + \\ &+ \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h} = 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2; \quad (5)$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} m + \tilde{\alpha}_{02} m^2 + \tilde{\alpha}_{03} m^3 + \tilde{\alpha}_{04} m^4, \quad (6)$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, j = 0, 1, 3, 4$; $i = 1, j = 0, 1, 2$ – произвольные числа. Тогда система (1), замкнутая регулятором, решающим задачу модального управления, имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0. \quad (7)$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига ($mx(t) = x(t-h)$), $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2$. Не ограничивая общности, можно считать, что матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{21}(m) &= a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2; \\ a_{22}(m) &= a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2. \end{aligned} \quad (8)$$

В работах [6], [7] требовалось выполнение условия $a_1 \neq 0$. В данной работе рассмотрим случай

$$a_1 = 0. \quad (9)$$

Тогда матрица $A(m)$ примет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix}.$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$\begin{aligned} U(\lambda, m) &= [u_1(\lambda, m) \quad u_2(\lambda, m)] = \\ &= [\eta_{11}(m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m)], \end{aligned} \quad (10)$$

где $\eta_{11}(m)$ – полином относительно m .

Компоненту $\eta_2(\lambda, m)$ регулятора (10) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \quad (11)$$

где $\eta_{21}(m)$ – полином относительно m ; $\eta_{22}(\lambda, m)$ соответствует интегральной части. Будем искать эту функцию в следующем виде:

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

где $k = e^{-a_0h}$; c_1, c_2 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (10) системы (1) примет вид

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_0 - \lambda & b_0 + b_1m + m^2 \\ \eta_{11} & \eta_{21} + (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0} - \lambda \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv \lambda^2 + (-a_0 - \eta_{21})\lambda - b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \\ &- \eta_{11}m^2 + \eta_{21}a_0 - \eta_{11}b_0 + c_1k - c_1m = 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить для замкнутой системы характеристическое уравнение (7), выберем в качестве η_{21} следующий квазиполином:

$$\eta_{21} = -a_0 - \mu_1,$$

где μ_1 определен в формуле (5).

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы примет вид

$$\lambda^2 + \mu_1\lambda - b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \eta_{11}m^2 - a_0^2 -$$

$$- \mu_1a_0 - b_0\eta_{11} + c_1k - c_1m = 0.$$

Чтобы последнее уравнение имело вид (7), нужно выполнение равенства

$$\begin{aligned} &-b_1\eta_{11}m + c_2km - c_2m^2 - \eta_{11}m^2 - a_0^2 - \\ &- \mu_1a_0 - b_0\eta_{11} + c_1k - c_1m = \mu_2. \end{aligned}$$

Выразив отсюда η_{11} , получим

$$\eta_{11} = \frac{-\mu_2 + c_2km - c_2m^2 - a_0^2 - \mu_1a_0 + c_1k - c_1m}{b_0 + b_1m + m^2}. \quad (12)$$

Последняя дробь, в общем случае, не является полиномом относительно m . Подберем c_1 и c_2 так, чтобы правая часть формулы (12) стала полиномом. Для этого вначале выделим целую часть в (12).

$$\begin{aligned} \eta_{11} &= -c_2 + \\ &+ \frac{b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2}{b_0 + b_1m + m^2}. \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы числитель последней дроби был бы равен нулю. Имеем

$$\begin{aligned} b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2 &\equiv \\ &\equiv (b_1c_2 + c_2k - c_1)m - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + \\ &+ c_1k - \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в качестве c_1 можно взять

$$c_1 = b_1c_2 + c_2k. \quad (13)$$

Тогда с учетом соотношения (13)

$$\begin{aligned} b_1c_2m + c_2km - a_0^2 - \mu_1a_0 + b_0c_2 + c_1k - c_1m - \mu_2 &\equiv \\ &\equiv (b_0 + b_1k + k^2)c_2 - a_0^2 - a_0\mu_1 - \mu_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$c_2 = \frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + k^2}. \quad (14)$$

Нетрудно увидеть, что для того, чтобы c_2 из формулы (14) было полиномом относительно m , необходимо и достаточно выполнения условия

$$b_0 + b_1k + k^2 \neq 0. \quad (15)$$

С учетом того, что

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2m) \frac{m - k}{\lambda - a_0},$$

и приняв во внимание (13), (14), после несложных преобразований получим

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \frac{(a_0^2 + \mu_1a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0}.$$

Таким образом, с учетом (10) регуляторы в частотной области

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{a_0^2 + a_0\mu_1 + \mu_2}{b_0 + b_1k + k^2} - a_{21}(m); \quad (16)$$

$$u_2(\lambda, m) = -a_0 - \mu_1 - a_{22}(m) + \frac{(a_0^2 + \mu_1 a_0 + \mu_2)(m + b_1 + k)}{b_0 + b_1k + k^2} \frac{m - k}{\lambda - a_0} \quad (17)$$

решают задачу модального управления для системы (1) при выполнении условия (15).

Отсюда видна справедливость следующей теоремы

Теорема. Для того чтобы система (1) была модально управляема регулятором вида (3) в случае (9), выполнение условия (15) необходимо и достаточно. При этом регуляторы, решающие задачу модального управления, в частотной области имеют вид (16), (17).

При переходе от регуляторов в частотной области к регуляторам вида (3) нужно следовать следующим правилам.

1. Слагаемым вида $m^i x_j$ соответствует

$$x_j(t - ih).$$

2. Слагаемым вида $\mu_1 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{10} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{11} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{12} x_j(t - 2h).$$

3. Слагаемым вида $\mu_2 x_j$ соответствует

$$\tilde{\alpha}_{00} x_j(t) + \tilde{\alpha}_{01} x_j(t - h) + \tilde{\alpha}_{02} x_j(t - 2h) + \tilde{\alpha}_{03} x_j(t - 3h) + \tilde{\alpha}_{04} x_j(t - 4h).$$

4. Слагаемым вида $\frac{m - k}{\lambda - \xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-h}^0 H(t + s) H(h + s) e^{-(h+s)\xi} x_j(t + s) ds,$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

5. Слагаемым вида $m \cdot \frac{m - k}{\lambda - \xi} x_j$ соответствует

$$\int_{-2h}^{-h} H(t + s) H(2h + s) e^{-(2h+s)\xi} x_j(t + s) ds.$$

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ a_{210} & a_{220} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ a_{211} & a_{221} \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{212} & a_{222} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} -3 & 2 + 5m + m^2 \\ a_{210} + a_{211}m + a_{212}m^2 & a_{220} + a_{221}m + a_{222}m^2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим $k = e^{-a_0 h} = e^{3h} \in \mathbb{R}$. Проверим выполнение условия (15):

$$b_0 + b_1 k + k^2 = 2 + 5e^{3h} + e^{6h} > 0.$$

Условие (15) выполнено. Тогда регуляторы (16), (17) примут следующий вид:

$$u_1(\lambda, m) = -\frac{9 - \mu_1 + \mu_2}{2 + 5k + k^2} - a_{210} - a_{211}m - a_{212}m^2,$$

$$u_2(\lambda, m) = 3 - \mu_1 - a_{220} - a_{221}m - a_{222}m^2 + \frac{(9 - 3\mu_1 + \mu_2)(m + 5 + k)}{2 + 5k + k^2} \frac{m - k}{\lambda + 3}.$$

Нетрудно проверить, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристическое уравнение вида

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda + \mu_2 = 0,$$

где μ_1, μ_2 определены в формулах (5), (6).

Заключение. В статье получен способ нахождения регуляторов по принципу обратной связи, решающих задачу модального управления для двумерной системы запаздывающего типа с двумя соизмеримыми запаздываниями и одним входом в случае (9). Указаны дополнительные условия существования таких регуляторов. Также рассмотрен иллюстративный пример.

Список литературы

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
3. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
4. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общепериодическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2 (200). С. 25–27.
5. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общепериодическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1 (206). С. 5–8.

6. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 1 (266). С. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3.

7. Якименко А. А. Модальная управляемость одной двумерной системы запаздывающего типа в случае кратных корней // Труды БГТУ. Сер. 3, Физико-математические науки и информатика. 2023. № 2 (272). С. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).

2. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).

3. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).

4. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2 (200), pp. 25–27 (In Russian).

5. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1 (206), pp. 5–8 (In Russian).

6. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system. Proceedings of BSTU, issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 1 (266), pp. 15–19. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-266-1-3 (In Russian).

7. Yakimenka A. A. Modal controllability of one two-dimensional delayed system in the case of multiple roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], issue 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2023, no. 2 (272), pp. 18–22. DOI: 10.52065/2520-6141-2023-272-2-3 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliaksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила после доработки 17.04.2024