УДК 532.517

А. М. Волк, доцент

ПЛЕНОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ НА ПРОНИЦАЕМОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЗАКРУЧЕННОГО ГАЗОВОГО ПОТОКА

Laminar film movement of a viscous liquid under influence of a involute gas flow on permeable cylinder surface is considered. The analytical decisions of the Navier-Stokes equations are received and basic dynamic characteristics are found.

Рассмотрим установившееся осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по внутренней стенке проницаемого цилиндра под воздействием закрученного газового потока (рис.).

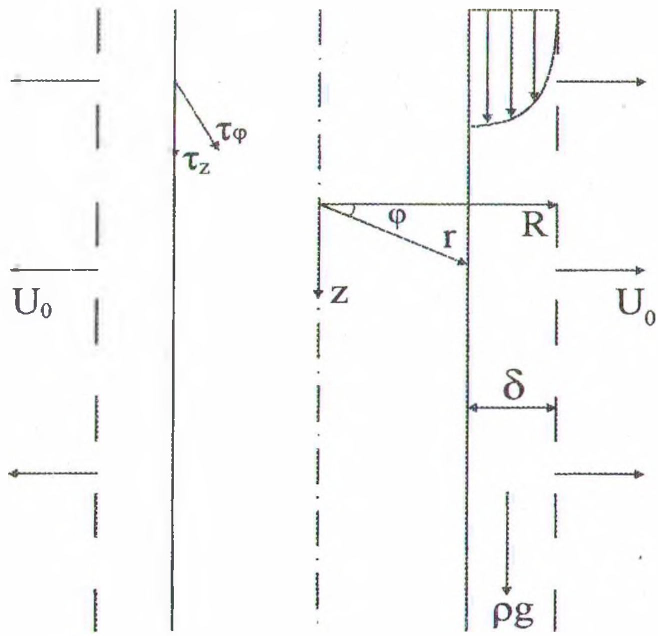

Рис. Схема двухфазного пленочного течения на проницаемой цилиндрической поверхнос

Выберем цилиндрическую систему координат r, φ, z. Ось z направим вниз по оси цилиндра.

В силу осесимметричности $\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$. Запишем уравнения Навье-Стокса и неразрывности:

$$\rho\left(U_r \frac{\partial U_z}{\partial r} + U \frac{\partial U_z}{\partial z}\right) = \rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2}\right); \quad (1)$$

$$\rho\left(U_r \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} + \frac{U_\varphi U_r}{r}\right) = \eta\left(\frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r^2}\right); \tag{2}$$

$$\rho\left(U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_\varphi^2}{r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2}\right); \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU_r\right) + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Скорость оттока жидкой фазы U_0 на некотором элементарном цилиндре длиной Δz будем считать постоянной. Объемный расход несжимаемой жидкости через цилиндрические поверхности равной длины будет одинаков: $2\pi r U_r \Delta z = 2\pi R U_0 \Delta z$. Отсюда находим радиальную скорость в пленке жидкости $U_r = \dfrac{U_0 R}{r}$. Тогда из уравнения неразрывности (4) получим $\dfrac{\partial U_z}{\partial z} = 0$ и $U_z = U_z(r)$. Принимаем

$$\psi = \frac{\partial P}{\partial z} = const.$$

Уравнения (1–3) приводятся к виду

$$\frac{d^2 U_z}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{U_0 R}{\nu} - 1\right)\frac{dU_z}{dr} = -\frac{\rho g - \psi}{\mu},$$

$$\frac{d^2 U_\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r}\left(\frac{U_0 R}{\nu} - 1\right)\frac{dU_\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{U_0 R}{\nu} + 1\right)U_\varphi = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\left(\frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3}\right).$$

В результате получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Это означает, что решение $U = U(r)$ будет автомодельным. Выполним переход к безразмерной координате $\tilde{r} = r / R$, обозначим $\alpha = \dfrac{U_0 R}{\nu}$ и получим:

$$\frac{d^2 U_z}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha - 1)}{\tilde{r}}\frac{dU_z}{d\tilde{r}} = -\frac{\rho g - \psi}{\mu} R^2, \tag{5}$$

$$\frac{d^2 U_\varphi}{d\tilde{r}^2} - \frac{(\alpha - 1)}{\tilde{r}}\frac{dU_\varphi}{d\tilde{r}} - \frac{(\alpha + 1)}{\tilde{r}^2} U_\varphi = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \rho\left(\frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3}\right). \tag{7}$$

Частные решения уравнений (5-6) ищем в виде r^k и получаем общие решения:

$$U_z = c_1 + c_2 \tilde{r}^{\alpha} + \frac{\rho g - \psi}{2\mu(\alpha - 1)} \tilde{r}^2, \quad U_\varphi = \frac{c_3}{\tilde{r}} + c_4 \tilde{r}^{\alpha+1}.$$

В качестве граничных условий принимаем условия прилипания на стенке и равенство касательных напряжений на границе раздела фаз:

$$U_z\big|_{\tilde{r}=1} = U_\varphi\big|_{\tilde{r}=1} = 0\ ;\ \tau_z' = -\frac{\mu}{R}\frac{dU_z}{d\tilde{r}}\bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}}\ ;\ \tau_\varphi' = -\mu\left(\frac{\partial U_\varphi}{R\partial \tilde{r}} - \frac{U_\varphi}{R\tilde{r}}\right)\bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}},$$

где τ_z' и τ_φ' – составляющие тензора касательных напряжений газового потока на границе раздела фаз.

Из условия равновесия сил, действующих на газовый поток,

$$\pi(R-\delta)^2 \Delta P = 2\pi(R-\delta)\tau_z' l$$

получим

$$\psi = \frac{\Delta P}{l} = \frac{2\tau_z'}{R(1-\delta)} = -\frac{2\tau_z}{R(1-\delta)}.$$

Учитывая граничные условия, получаем распределение скорости в пленке жидкости:

$$U_z = \left[\frac{\tau_z' R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^2}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}}\right]\left(1-\tilde{r}^{\alpha}\right) -$$

$$-\left[\frac{\rho g R^2}{2\mu\alpha(\alpha-2)} + \frac{\tau_z' R}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})}\right]\left(1-\tilde{r}^2\right),$$

$$U_\varphi = \frac{R\tau_\varphi'(1-\tilde{\delta})^2}{\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2} + 2\mu}\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}^{\alpha+1}\right).$$

Найдем объемный расход жидкой фазы на единицу периметра:

$$q = R\int_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_z \tilde{r}\, d\tilde{r} =$$

$$= \left[\frac{\tau_z' R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} + \frac{\rho g R^3}{\mu\alpha(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}}\right]\left[\frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1-(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2}\right] -$$

$$-\left[\frac{\rho g R^3}{2\mu(\alpha-2)} + \frac{\tau_z' R^2}{\mu(\alpha-2)(1-\tilde{\delta})}\right]\left[\frac{1-(1-\tilde{\delta})^2}{2} - \frac{1-(1-\tilde{\delta})^4}{4}\right].$$

Изменение данного объемного расхода по длине описывается уравнением

$$\frac{dq}{dz} = -U_0 .$$

$$q = \frac{\tau_z' R^2}{\mu(\alpha-2)}\left[\frac{\alpha}{2(\alpha+2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-1}} - \frac{1}{2(1-\tilde{\delta})^{\alpha-3}} + \frac{(1-\tilde{\delta})^3}{\alpha+2} - \frac{1}{4(1-\tilde{\delta})} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\tilde{\delta}}{2} - \frac{(1-\tilde{\delta})^3}{4}\right] + \frac{\rho g R^3}{\mu(\alpha-2)}\left[\frac{1}{2(\alpha+2)(1-\tilde{\delta})^{\alpha-2}} + \frac{1}{2\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha-4}} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\tilde{\delta})^4}{\alpha(\alpha+2)} - \frac{1}{8} + \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{4} - \frac{(1-\tilde{\delta})^4}{4}\right].$$

Разложение правой части в ряд до четвертой степени включительно имеет вид

$$q = \frac{\tau_z' R^2}{\mu}\left[\frac{\tilde{\delta}^2}{2} + \frac{2\alpha}{3!}\tilde{\delta}^3 + \frac{3(\alpha^2+1)\tilde{\delta}^4}{4!} + \ldots\right] + + \frac{\rho g R^3}{\mu}\left(\frac{2\tilde{\delta}^3}{3!} + \frac{3\alpha-8}{4!}\tilde{\delta}^4 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{\tau_z' \delta^2}{\mu}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{U_0\delta}{\nu} + \frac{1}{8}\left(\frac{U_0^2\delta^2}{\nu^2} + \frac{\delta^2}{R^2}\right) + \ldots\right] + + \frac{\rho g \delta^3}{\mu}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{24}\left(3\frac{U_0\delta}{\nu} - 8\frac{\delta}{R}\right) + \ldots\right].$$

Данное разложение показывает, что существенное изменение гидродинамических характеристик вследствие оттока жидкой фазы происходит, когда безразмерный комплекс Рейнольдса $\dfrac{U_0\delta}{\nu}$ соизмерим с единицей.

Найдем среднее значение касательной составляющей скорости пленки и перепад давления в радиальном направлении:

$$\langle U_\varphi \rangle = \frac{1}{\tilde{\delta}}\int_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_\varphi d\tilde{r} = \frac{R\tau_\varphi'}{\tilde{\delta}\mu}\frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}+2}\left[\frac{1}{\alpha+2} - \frac{(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \ln(1-\tilde{\delta})\right].$$

$$\Delta P_r = \rho\int_{1-\tilde{\delta}}^{1}\left(\frac{U_\varphi^2}{r} + \frac{U_0^2 R^2}{r^3}\right)d\tilde{r} =$$

$$= \rho\int_{1-\tilde{\delta}}^{1}\left(\frac{R^2\left(\tau_\varphi'\right)^2(1-\tilde{\delta})^4}{\left(\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}+2\mu\right)^2}\left(\tilde{r}^{2\alpha+2} - 2\tilde{r}^{\alpha} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\right) + \frac{U_0^2R^2}{\tilde{r}^3}\right)d\tilde{r} =$$

$$= \rho \frac{R^2 \left(\tau_{\varphi}^{'}\right)^2 \left(1-\delta\right)^4}{\left(\mu\alpha\left(1-\delta\right)^{\alpha+2}+2\mu\right)^2} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\alpha+3} - \frac{\left(1-\delta\right)^{2\alpha+3}}{2\alpha+3} - \frac{2}{\alpha+1} + \frac{2\left(1-\delta\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3\left(1-\delta\right)^3} \right) -$$

$$- \frac{\rho R^2 U_0^2}{4} \left(1 - \frac{1}{\left(1-\delta\right)^4} \right).$$

Полученная математическая модель позволяет определять гидродинамические характеристики пленочного течения под воздействием закрученного газового потока с учетом оттока жидкой фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969 .- 942 с.

2. Ерощенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. – М.: Наука, 1984 .– 274 с.

3. Соколов В.И., Доманский И.В. Газожидкостные реакторы. – Л.: Машиностроение, 1976.–216 с.

УДК 514.144 + 514.755.44

Н. П. Можей, ассистент

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АФФИННОЙ, ЭКВИАФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

This paper is devoted to the local classification of homogeneous submanifolds with stabilizer in four-dimensional affine, projective and equiaffine geometries. Among these submanifolds, we distinguish those whose symmetry algebras act locally transitively on the four-dimensional affine and projective space and have a finite number of orbits. The methods used in the present paper are distinct in the sense that homogeneous submanifolds are classified here by purely algebraic means, using the algebraic analog of the moving frame method.

Введение

Работа посвящена описанию локально-однородных подмногообразий со стабилизатором в четырехмерной аффинной, проективной и эквиаффинной геометрии. Однородные подмногообразия являются интересным и важным подклассом в классе всех подмногообразий в однородных пространствах, и задача их классификации активно обсуждалась в математической литературе начиная с конца прошлого века.

Лучше всего изучены однородные подмногообразия в аффинной и проективной геометриях размерности ≤ 3. Однако при переходе к четырехмерным аффинной и проективной геометриям возникает ряд трудностей, связанных с резким увеличением объема вычислений и громоздкостью конечного результата. Так, в этой работе ограничимся описанием однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность больше размерности поверхности, то есть наиболее симметричных поверхностей. В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. **Теоремы 1.1, 1.2,**