

$$\begin{aligned}
 x(t) = & X^*(t, t_0)x_0 + \int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t, \tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t (X^*(t, \tau)B_1(\tau) + Y_1^*(t, \tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau, \quad t > t_0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где начальные условия для сопряженной системы определены в виде $X^*(t, t-0) = E_{n \times n}$, $Y_0^*(t, t) = 0 \in R^{n \times n}$;

$$\begin{aligned}
 y(t) = & X^*(t, t_0-0)x_0 + \int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t, \tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau + \\
 & + \int_{t_0}^t (X^*(t, \tau)B_1(\tau) + Y_1^*(t, \tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau + \\
 & + Y_0^*(t, t-Th)A_{22}^1(t-Th)\psi(t-Th-h) + \\
 & + \sum_{k=0}^T Y_0^*(t, t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh), \quad t \geq t_0,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где начальные условия сопряженной системы определены в виде $Y_0^*(t, t) = E_{m \times m}$, $X^*(t, t-0) = A_{21}(t) \in R^{m \times n}$.

Замечание. В случае (19), как легко видеть из (16), скачки функции $X^*(t, \tau)$ равны нулю, и, таким образом, функцию можем считать непрерывной при $\tau < t$, в частности, $X^*(t, t_0-0) = X^*(t, t_0+0) = X^*(t, t_0)$. В случае (20) функция $X^*(t, \tau)$ имеет скачки в точках $\tau = t - kh$, причем в случае $\tau = t_0 + Th$ скачок осуществляется и в точке t_0 , что с учетом (16) дает значение $X^*(t, t_0-0)$ в формуле решения (20).

УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доцент

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Boundary problems with a small parameter near the highest derivative are investigated. A method reduced a boundary problem to the set of the cauchy problems is proposed. Different locations of boundary layers are considered.

Вследствие многочисленных приложений задачи с пограничным слоем вызывают к себе повышенный интерес. Из-за наличия пограничных слоев задачи такого рода обладают весьма сложным характером поведения решений и особенно градиентов решений.

Рассмотрим систему линейных о.д.у. второго порядка

$$-\varepsilon y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = f(x), \quad \alpha \leq x \leq \beta \tag{1}$$

с пограничным слоем и граничными условиями вида

$$A_1 y'(\alpha) + A_2 y(\alpha) = a, \quad (2)$$

$$B_1 y'(\beta) + B_2 y(\beta) = b \quad (3)$$

в предположении, что $A(x), B(x)$ - произвольные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, элементы которых - кусочно-непрерывные функции, зависящие от x , $f: [\alpha, \beta] \rightarrow G^n$, A_1, A_2, B_1, B_2 - известные квадратные матрицы порядка $(n \times n)$, такие, что прямоугольные матрицы (A_1, A_2) и (B_1, B_2) имеют $\text{rang}[A_1, A_2] = n$, $\text{rang}[B_1, B_2] = n$, $\varepsilon > 0$ - фиксированный малый параметр при старшей производной. Требуется определить функцию $y: [\alpha, \beta] \rightarrow C^n$ так, чтобы выполнялись равенства (1-3).

Для численного решения системы о.д.у. второго порядка вида (1-3) предлагается модификация метода унитарной прогонки [1]. С помощью этого метода система о.д.у. вида (1-3) приводится к совокупности задач Коши, благоприятных в вычислительном отношении. Известно, что в настоящее время для решения задач Коши существует ряд хорошо развитых методик [2]. Установлено, что в зонах пограничных слоев наблюдается быстрый рост решений, и особенно градиентов решений. В целях упрощения вычислений, регулирования роста решений и их производных, придания равноправия функциям $y(x)$ и $y'(x)$ в областях погранслоев вводятся регулирующие множители $M_1(x, \varepsilon)$ и $M_2(x, \varepsilon)$.

Изложим вычислительную схему алгоритма модификации метода унитарной прогонки.

1. В целях упрощения вычислений введем регулирующие множители $M_1(x, \varepsilon), M_2(x, \varepsilon)$. И вместо $y(x)$ и $y'(x)$ будем рассматривать $M_1(x, \varepsilon)y(x)$ и $M_2(x, \varepsilon)y'(x)$, что будет способствовать обеспечению нормального роста регуляризованных таким образом решения системы и его производной.

2. Введем в рассмотрение вспомогательные вектор - функции $r(x)$ и $s(x)$, определенные на $[\alpha, \beta]$, и матрицы $W_i(x)$, $i=1, 2, 3, 4$ по правилу

$$r(x) = W_1^*(x)[M_2(x, \varepsilon)y'(x)] + W_3^*(x)[M_1(x, \varepsilon)y(x)], \quad (4)$$

$$s(x) = W_2^*[M_2(x, \varepsilon)y'(x)] + W_4^*(x)[M_1(x, \varepsilon)y(x)]. \quad (5)$$

3. Ограничения на матрицы определим таким образом, чтобы квадратная матрица

$$W(x) = \begin{bmatrix} W_1(x) & W_2(x) \\ W_3(x) & W_4(x) \end{bmatrix}$$

для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ обладала свойством унитарности. Это возможно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} W_1(x)W_1^*(x) + W_2(x)W_2^*(x) = \dot{E} \\ W_3(x)W_3^*(x) + W_4(x)W_4^*(x) = \dot{E} \\ W_1(x)W_3^*(x) + W_2(x)W_4^*(x) = 0 \\ W_3(x)W_1^*(x) + W_4(x)W_2^*(x) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Обозначим (*) переход к комплексно-сопряженной и транспонированной матрице.

4. Из соотношений (4, 5) получим формулы для нахождения искомого решения системы и его производной:

$$M_1(x, \varepsilon)y(x) = W_3(x)r(x) + W_4(x)s(x), \quad (7)$$

$$M_2(x, \varepsilon)y'(x) = W_1(x)r(x) + W_2(x)s(x). \quad (8)$$

5. Переформулируем исходную задачу вида (1-3) в совокупность задач Коши. Получим

$$\begin{cases} W_1' + [A/\varepsilon + (M_2^{-1})^* M_2'] W_1 + (M_2^{-1})^* M_1^* W_3 = W_1 G^*, \\ W_1(\alpha) = V_1^*, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} W_3' + (M_1^{-1})^* B^*/\varepsilon M_2^* W_1 + (M_1^{-1})^* M_1^* W_3 = W_3 G^*, \\ W_3(\alpha) = V_3^*, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} r' = Gr - W_1^* M_2^f/\varepsilon, \\ r(\alpha) = \gamma. \end{cases} \quad (11)$$

Матрицы $W_1^*(x)$ и $W_3^*(x)$ являются верхней половиной “унитарной” матрицы. А поскольку A_1 и A_2 - любые матрицы, то G_1 и G_2 тоже любые и верхней частью “унитарной” матрицы быть не могут, т.к. они должны обеспечивать свойство унитарности. Все строки G_1 и G_2 должны быть ортонормальны. Для нахождения начальных условий для полученных уравнений вида (9-11) используем ортонормирование по Шмидту [3].

Это будет прямой ход метода унитарной прогонки. Решая задачи Коши (9-11) с соответствующими начальными условиями, получим матрицы $W_1(x)$, $W_2(x)$ и вектор-функцию $r(x)$.

6. Осуществим перенос граничного условия (2) из точки $x=\alpha$ во все остальные точки отрезка $[\alpha, \beta]$. Далее рассмотрим граничное условие (3). Пусть ранг матрицы

$$D\beta = \begin{bmatrix} W_1^*(\beta) & W_3^*(\beta) \\ e_1 M_2^{-1}(\varepsilon, \beta) & e_2 M_1^{-1}(\varepsilon, \beta) \end{bmatrix} \quad (12)$$

равен $2n$, т.е.

$$D\beta \neq 0. \quad (13)$$

Условие (13) равносильно однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений относительно $M_1 u$ и $M_2 u'$, а значит, и исходной задачи с пограничным слоем вида (1-3).

7. Для осуществления обратного хода данной модификации метода унитарной прогонки будем вновь использовать процесс ортонормирования по Шмидту. В конечном итоге получим следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} W_2' + \left[\frac{A^*}{\varepsilon} + (M_2^{-1})^* (M_2')^* \right] W_2 + (M_2^{-1})^* M_1^* W_4 = \\ = W_1^* + W_2 I^*, \\ W_2(\beta) = V_3^*, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} W_4' + (M_1^{-1})^* e^* / \varepsilon M_2^* W_4 + (M_1^{-1})^* (M_1')^* W_4 = \\ = W_3^* + W_4 I^*, \\ W_4(\beta) = V_4^*, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} S' = n(x)r + I(x)S - W_2^* M_2^f / \varepsilon, \\ S(\beta) = \tilde{\varepsilon}. \end{cases} \quad (16)$$

Выяснив вопрос о ранге матрицы $D\beta$ и получив начальные условия $W_2(\beta), W_4(\beta), S(\beta)$ для уравнений обратной прогонки вида (14)-(16), получим все необходимые компоненты для нахождения непосредственно самого решения на всем интервале $[\alpha, \beta]$.

8. Искомое решение исходной системы о.д.у. с пограничным слоем $y(x)$ находим по формуле (7), а его производную $y'(x)$ - по формуле (8).

Итак, матрицы $W_i(x)$ и вектор-функции $r(x)$ и $s(x)$ являются благоприятными в вычислительном отношении. Проверкой устанавливается, что найденная таким образом вектор-функция $y(x)$ удовлетворяет исходной задаче (1-3).

Обозначим

$$\delta_{11}(x) = W_1^*(x)W_1(x) + W_3^*(x)W_3(x), \quad (17)$$

где $W_1(x), W_3(x)$ определяются как решения соответствующих задач при начальных условиях.

Лемма. Матрица $\delta_{11}(x)$, определяемая по формуле (17), является решением следующей задачи Коши:

$$d/dx(\delta_{11}(x)) = \Lambda_1(\delta_{11} - E) + [\Lambda_1(\delta_{11} - E)]^*, \quad (18)$$

$$\delta_{11}(\alpha) = E, \quad a < x < b. \quad (19)$$

Доказательство. Продифференцируем выражение (17) по переменной x , получим

$$\delta_{11}'(x) = W_1^{*'} W_1 + W_1^* W_1' + W_3^{*'} W_3 + W_3^* W_3',$$

где

$$W_1^{*'} = GW_1^* - W_3^* M_1 M_2^{-1} - W_1^* (A/\varepsilon + M_2' M_2^{-1}), \quad (20)$$

$$W_3^{*'} = GW_3^* - W_1^* M_2 (B/\varepsilon) M_1^{-1} - W_3^* M_1' M_1^{-1}, \quad (21)$$

$$W_1' = W_1 G^* - (M_2^{-1})^* M_1^* W_3 - [A^* / \varepsilon + (M_2^{-1}) M_2'] W_1, \quad (22)$$

$$W_3' = W_3 G^* - (M_1^{-1})^* (B^* / \varepsilon) (M_2^{-1})^* - (M_1^{-1})^* (M_1')^* W_3. \quad (23)$$

Учитывая выражения (20-23), получим

$$\begin{aligned} \delta_{11}'(x) = & G\delta_{11} + \delta_{11}G^* - [W_1^* (A/\varepsilon + (M_2') M_2^{-1}) W_1 + W_1^* M_2 (B/\varepsilon) M_1^{-1} W_3 + \\ & + W_1^* (M_2^{-1})^* M_1^* W_3] - [W_1^* (A^* / \varepsilon + (M_2^{-1})^*) W_1 + W_3^* (M_1^{-1})^* (B^* / \varepsilon) M_2^* W_1 + \\ & + W_3^* M_1 M_2^{-1} W_1] \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$W_1^* (A/\varepsilon + (M_2') M_2^{-1}) W_1 + W_1^* M_2 (B/\varepsilon) M_1^{-1} W_3 + W_1^* (M_2^{-1})^* M_1^* W_3 = \Lambda_1^*,$$

$$W_1^* (A^* / \varepsilon + (M_2^{-1})^*) W_1 + W_3^* (M_1^{-1})^* (B^* / \varepsilon) M_2^* W_1 + W_3^* M_1 M_2^{-1} W_1 = \Lambda_1.$$

Получим

$$\delta_{11}'(x) = G\delta_{11}(x) + \delta_{11}(x)G^* - \Lambda_1^* - \Lambda_1.$$

Матрицу G выберем равной Λ_1 , т.е. $G = \Lambda_1, G^* = \Lambda_1^*$. Будем иметь

$$\delta_{11}'(x) = \Lambda_1 \delta_{11}(x) + \delta_{11}(x) \Lambda_1^* - \Lambda_1^* - \Lambda_1 = (\Lambda_1 + \Lambda_1^*)(\delta_{11}(x) - E).$$

Этой формуле после простых преобразований можно придать вид

$$d/dx(\delta_{11} - E) = \Lambda_1(\delta_{11} - E) + [\Lambda_1(\delta_{11} - E)]^*.$$

Т.е. матрица $\delta_{11}(x)$ является решением уравнения вида (1). Начальные условия (2) легко получаются путем подстановки значений матриц $W_1(x)$, $W_3(x)$ в начальной точке $x = \alpha$ и прямого вычисления значения $\delta_{11}(\alpha)$. Лемма доказана.

На основании леммы можно доказать устойчивость рассматриваемого метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монастырный П.И., Кулешова И.Ф. О модификациях метода унитарной прогонки для систем линейных о.д.у. второго порядка с погранслоем // Известия АН БССР. Серия физико-матем. наук. Минск. Деп. в ВИНТИ 08.06.88. № 4527.-С.21.
2. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений // Пер. с англ. М., 1983.-С.200.
3. Соловьева И.Ф. Решение систем линейных о.д.у. второго порядка с различными расположениями пограничных слоев // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информатики. Вып. VII. Минск, 1999.-С.24-29.