УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор; О. Н. Поддубная, аспирант

О ФОРМУЛЕ КОШИ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

A variation constant formula for hybrid systems is obtained.

Рассматриваем простейшую гибридную систему:

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + B_1(t)u(t) \;\; t > t_0 \\ &y(t) = A_{21}(t)x(t) + A_{22}^1(t)y(t-h) + B_2(t)u(t) \;\; t \ge t_0 , \end{aligned} \qquad (1)$$

где $x(t) \in R^n, u(t) \in R^r, y(t) \in R^m, t \ge -h, h > 0;$

компоненты матриц-функций $A_{11}(\cdot) \in R^{n\times n}, A_{12}(\cdot) \in R^{n\times m}, A_{21}(\cdot) \in R^{m\times n}$, $A_{22}^1(\cdot) \in R^{m\times m}$, $B_1(\cdot) \in R^{n\times r}$, $B_2(\cdot) \in R^{m\times r}$ – кусочно-непрерывны на каждом отрезке $[a,b] \in [-h,+\infty)$.

Начальные условия для системы (1) задаем в виде

$$x(t_0+0) = x_0, y(\tau) = \psi(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0), \qquad (2)$$

где $x_0 \in R^n$, ψ – кусочно-непрерывная на $[t_0 - h, t_0]$ m –вектор-функция.

Вводим обозначение $T = \left[\dfrac{t-t_0}{h}\right]$.

Умножая первое уравнение системы (1) на кусочно-непрерывную по второму аргументу матричную функцию $X^*(t,\tau)$ с точками разрыва 1-го рода в моменты $\tau = t - kh$, $k = 1,2...T$ и интегрируя по τ от t_0 до t, получаем

$$\int_{t_0}^{t} (X^*(t,\tau)\dot{x}(\tau) - X^*(t,\tau)A_{11}(\tau)x(\tau) - X^*(t,\tau)A_{12}(\tau)y(\tau) - $$
$$- X^*(t,\tau)B_1(\tau)u(\tau))d\tau = 0 . \qquad (3)$$

Умножая второе уравнение системы (1) на кусочно-непрерывную по τ матричную функцию $Y_1^*(t,\tau)$ и интегрируя по τ от t_0 до t, получаем

$$\int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau)(y(\tau) - A_{21}(\tau)x(\tau) - A_{22}^1(\tau)y(\tau - h) - B_2(\tau)u(\tau))d\tau = 0 . \qquad (4)$$

Умножая второе уравнение системы (1) на матричную функцию $Y_0^*(t, t-kh)$ и суммируя по k от 0 до T, получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)y(t-kh) - \sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh)x(t-kh) - \\ &-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{22}^1(t-kh)y(t-kh-h) - \\ &-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh) = 0 . \end{aligned} \qquad (5)$$

Сложим (3), (4), (5):

$$\int_{t_0}^{t} X^*(t,\tau)(\dot{x}(\tau) - A_{11}(\tau)x(\tau) - A_{12}(\tau)y(\tau) - B_1(\tau)u(\tau))d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau)(y(\tau) - A_{21}(\tau)x(\tau) - A_{22}^1(\tau)y(\tau-h) - B_2(\tau)u(\tau))d\tau +$$
$$+\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)y(t-kh) - \sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh)x(t-kh) -$$
$$-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{22}^1(t-kh)y(t-kh-h) - \tag{6}$$
$$-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh) = 0,\ t > t_0 .$$

Преобразуем слагаемые в (6):

$$\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)y(t-kh) = \sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh)y(t-kh) + Y_0^*(t,t)y(t). \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh)x(t-kh) =$$
$$= \sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh)x(t-kh) + Y_0^*(t,t)A_{21}(t)x(t). \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{22}^1(t-kh)y(t-kh-h) =$$
$$= \sum_{k=0}^{T-1} Y_0^*(t,t-kh)A_{22}^1(t-kh)y(t-kh-h) +$$
$$+Y_0^*(t,t-Th)A_{22}^1(t-Th)\psi(t-Th-h) = \tag{9}$$
$$= \sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh+h)A_{22}^1(t-kh+h)y(t-kh) +$$
$$+Y_0^*(t,t-Th)A_{22}^1(t-Th)\psi(t-Th-h).$$

$$\int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau)A_{22}^1(\tau)y(\tau-h)d\tau = \int_{t_0-h}^{t-h} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)y(\tau)d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)y(\tau)d\tau + \int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau -$$
$$- \int_{t-h}^{t} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)y(\tau)d\tau .$$

Полагаем $Y_1^*(t,\tau) = 0\ \tau > t$, тогда

$$\int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau)A_{22}^1(\tau)y(\tau-h)d\tau = \int_{t_0-h}^{t-h} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)y(\tau)d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)y(\tau)d\tau + \int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau. \quad (10)$$

Поскольку $X^*(t,\tau)$ кусочно-непрерывна на $(t_0,t]$, то, применяя свойство аддитивности интеграла и интегрируя по частям на каждом интервале $(t-kh, t-kh-h]$, получаем

$$\int_{t_0}^{t} X^*(t,\tau)\dot{x}(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{T}\int_{t-kh}^{t-kh+h} X^*(t,\tau)\dot{x}(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t-Th} X^*(t,\tau)\dot{x}(\tau)d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{T}(X^*(t,t-kh+h-0)x(t-kh+h) - X^*(t,t-kh+0)x(t-kh) -$$
$$- \int_{t-kh}^{t-kh+h} \dot{X}^*(t,\tau)x(\tau)d\tau) + X^*(t,t-Th-0)x(t-Th) - X^*(t,t_0+0)x_0 - \quad (11)$$
$$- \int_{t_0}^{t-Th} \dot{X}^*(t,\tau)x(\tau)d\tau = \sum_{k=1}^{T}(X^*(t,t-kh-0) - X^*(t,t-kh+0))x(t-kh) -$$
$$- \int_{t_0}^{t-Th} \dot{X}^*(t,\tau)x(\tau)d\tau + X^*(t,t-0)x(t) - X^*(t,t_0+0)x_0.$$

С учетом преобразований (7)–(11) равенство (6) перепишем в виде

$$-\int_{t_0}^{t}(\dot{X}^*(t,\tau) + X^*(t,\tau)A_{11}(\tau) + Y_1^*(t,\tau)A_{21}(\tau))x(\tau)d\tau -$$
$$-\int_{t_0}^{t}(X^*(t,\tau)A_{12}(\tau) - Y_1^*(t,\tau) + Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h))y(\tau)d\tau -$$
$$-\int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau -$$
$$-\int_{t_0}^{t}(X^*(t,\tau)B_1(\tau) + Y_1^*(t,\tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau + X^*(t,t-0)x(t) -$$
$$-X^*(t,t_0+0)x_0 + \sum_{k=1}^{T}(X^*(t,t-kh-0) - X^*(t,t-kh+0))x(t-kh) +$$
$$+\sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh)y(t-kh) + Y_0^*(t,t)y(t) -$$
$$-\sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh)x(t-kh) - Y_0^*(t,t)A_{21}(t)x(t) -$$

$$-\sum_{k=1}^{T} Y_0^*(t,t-kh+h)A_{22}^1(t-kh+h)y(t-kh)-$$
$$-Y_0^*(t,t-Th)A_{22}^1(t-Th)\psi(t-Th-h)- \tag{12}$$
$$-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh)=0, \quad t>t_0.$$

Пусть матрицы-функции $X^*(t,\tau)$, $Y_0^*(t,\tau), Y_1^*(t,\tau)$ являются решениями сопряженной системы:

$$\dot{X}^*(t,\tau)+X^*(t,\tau)A_{11}(\tau)+Y_1^*(t,\tau)A_{21}(\tau)=0, \tag{13}$$

$$Y_1^*(t,\tau)=X^*(t,\tau)A_{12}(\tau)+Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h), \tag{14}$$

$\tau\in(t-kh,t-kh+h]$,

$$Y_1^*(t,\tau)=0,\ \tau>t, \tag{15}$$

$$X^*(t,t-kh-0)-X^*(t,t-kh+0)=Y_0^*(t,t-kh)A_{21}(t-kh), \tag{16}$$

$$Y_0^*(t,t-kh)=Y_0^*(t,t-kh+h)A_{22}^1(t-kh+h), \tag{17}$$

$k=1,2...T$.

Учитывая (13),(14),(16),(17), формула (12) примет вид

$$-\int_{t_0-h}^{t_0} Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau-$$
$$-\int_{t_0}^{t}(X^*(t,\tau)B_1(\tau)+Y_1^*(t,\tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau+$$
$$+X^*(t,t-0)\,x(t)-X^*(t,t_0+0)\,x_0+Y_0^*(t,t)y(t)-Y_0^*(t,t)A_{21}(t)x(t)- \tag{18}$$
$$-Y_0^*(t,t-Th)A_{21}(t-Th)\psi(t-Th-h)-$$
$$-\sum_{k=0}^{T} Y_0^*(t,t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh)=0, \quad t>t_0.$$

Сформулируем основной результат:

Теорема. *Решение системы (1) с начальными условиями (2), соответствующее кусочно-непрерывному управлению $u(\cdot)$, существует, единственно и может быть вычислено по формулам*

$$x(t)=X^*(t,t_0)x_0+\int\limits_{t_0-h}^{t_0}Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}(X^*(t,\tau)B_1(\tau)+Y_1^*(t,\tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau,\ t>t_0, \tag{19}$$

где начальные условия для сопряженной системы определены в виде $X^*(t,t-0)=E_{n\times n}$, $Y_0^*(t,t)=0\in R^{n\times n}$;

$$y(t)=X^*(t,t_0-0)x_0+\int\limits_{t_0-h}^{t_0}Y_1^*(t,\tau+h)A_{22}^1(\tau+h)\psi(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}(X^*(t,\tau)B_1(\tau)+Y_1^*(t,\tau)B_2(\tau))u(\tau)d\tau+ \tag{20}$$
$$+Y_0^*(t,t-Th)A_{22}^1(t-Th)\psi(t-Th-h)+$$
$$+\sum_{k=0}^{T}Y_0^*(t,t-kh)B_2(t-kh)u(t-kh),\ t\geq t_0,$$

где начальные условия сопряженной системы определены в виде $Y_0^*(t,t)=E_{m\times m}$, $X^*(t,t-0)=A_{21}(t)\in R^{m\times n}$.

Замечание. В случае (19), как легко видеть из (16), скачки функции $X^*(t,\tau)$ равны нулю, и, таким образом, функцию можем считать непрерывной при $\tau<t$, в частности, $X^*(t,t_0-0)=X^*(t,t_0+0)=X^*(t,t_0)$. В случае (20) функция $X^*(t,\tau)$ имеет скачки в точках $\tau=t-kh$, причем в случае $\tau=t_0+Th$ скачок осуществляется и в точке t_0, что с учетом (16) дает значение $X^*(t,t_0-0)$ в формуле решения (20).

УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доцент

О РЕШЕНИИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ О.Д.У. ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Boundary problems with a small parameter near the highest derivative are investigated. A method reduced a boundary problem to the set of the cauchy problems is proposed. Different locations of boundary layers are considered.

Вследствие многочисленных приложений задачи с пограничным слоем вызывают к себе повышенный интерес. Из-за наличия пограничных слоев задачи такого рода обладают весьма сложным характером поведения решений и особенно градиентов решений.

Рассмотрим систему линейных о.д.у. второго порядка

$$-\varepsilon y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=f(x),\ \alpha\leq x\leq\beta \tag{1}$$

с пограничным слоем и граничными условиями вида