$$=\rho\frac{R^2\left(\tau_\varphi^{'}\right)^2(1-\tilde{\delta})^4}{\left(\mu\alpha(1-\tilde{\delta})^{\alpha+2}+2\mu\right)^2}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\alpha+3}-\frac{(1-\tilde{\delta})^{2\alpha+3}}{2\alpha+3}-\frac{2}{\alpha+1}+\frac{2(1-\tilde{\delta})^{\alpha+1}}{\alpha+1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3(1-\tilde{\delta})^3}\right)-$$

$$-\frac{\rho R^2U_0^2}{4}\left(1-\frac{1}{(1-\tilde{\delta})^4}\right).$$

Полученная математическая модель позволяет определять гидродинамические характеристики пленочного течения под воздействием закрученного газового потока с учетом оттока жидкой фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969 .- 942 с.
2. Ерощенко В.М., Зайчик Л.И. Гидродинамика и тепломассообмен на проницаемых поверхностях. – М.: Наука, 1984 .– 274 с.
3. Соколов В.И., Доманский И.В. Газожидкостные реакторы. – Л.: Машиностроение, 1976.–216 с.

УДК 514.144 + 514.755.44

Н. П. Можей, ассистент

ОДНОРОДНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ АФФИННОЙ, ЭКВИАФФИННОЙ И ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

This paper is devoted to the local classification of homogeneous submanifolds with stabilizer in four-dimensional affine, projective and equiaffine geometries. Among these submanifolds, we distinguish those whose symmetry algebras act locally transitively on the four-dimensional affine and projective space and have a finite number of orbits. The methods used in the present paper are distinct in the sense that homogeneous submanifolds are classified here by purely algebraic means, using the algebraic analog of the moving frame method.

Введение

Работа посвящена описанию локально-однородных подмногообразий со стаби- затором в четырехмерной аффинной, проективной и эквиаффинной геометрии. Одн о-родные подмногообразия являются интересным и важным подклассом в классе всех подмногообразий в однородных пространствах, и задача их классификации активно обсуждалась в математической литературе начиная с конца прошлого века.

Лучше всего изучены однородные подмногообразия в аффинной и проективной геометриях размерности ≤ 3. Однако при переходе к четырехмерным аффинной и проективной геометриям возникает ряд трудностей, связанных с резким увеличением объема вычислений и громоздкостью конечного результата. Так, в этой работе ограничимся описанием однородных поверхностей, алгебры симметрий которых имеют размерность больше размерности поверхности, то есть наиболее симметричных поверхностей. В частности, в этот класс попадают все цилиндры и квадрики. **Теоремы 1.1, 1.2,**

1.3, 2.1, 2.2, 2.3 и **3** данной работы дают полный список остальных однородных поверхностей из этого класса (27 гиперповерхностей, 21 двумерная и одна одномерная поверхности в проективной геометрии, 33 гиперповерхности, 31 двумерная и одна одномерная в аффинной геометрии и 7 гиперповерхностей в эквиаффинной геометрии).

Рассматриваемая в работе задача тесно связана также с описанием аффинных и проективных действий, имеющих нетривиальную открытую орбиту, и, в частности, таких действий с конечным числом орбит. Действительно, в этом случае размерность группы преобразований не менее 4, и эта группа содержится в группе симметрий одной из орбит меньшей размерности, то есть попадаем в рассматриваемый в работе класс подмногообразий.

Особенностью методики, представленной в данной работе, является использование чисто алгебраических методов описания однородных подмногообразий. Для решения проблемы используется алгебраический аналог метода Картана подвижных реперов, описанный в [1].

Методика классификации

Пусть M — однородное пространство, снабженное транзитивным действием группы Ли $\overline{G}$, и пусть L — вложенное подмногообразие в M. Будем предполагать, что действие $\overline{G}$ на M локально эффективно, и отождествлять алгебру Ли g группы Ли $\overline{G}$ с некоторой подалгеброй алгебры Ли векторных полей на M.

Алгеброй симметрий подмногообразия L называется подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ алгебры g, определенная следующим соотношением:

$$\mathrm{sym}(L) = \{ X \in \mathrm{g} \mid X_p \in \mathrm{T}_p L \text{ для всех } p \in L\}.$$

Пусть h — произвольная подалгебра в g, и H — соответствующая связная виртуальная подгруппа группы $\overline{G}$. Тогда орбиты H могут быть рассмотрены как вложенные подмногообразия в M. Говорят, что L является орбитой подалгебры h через точку $p\in M$, если L — связное открытое подмногообразие (во внутренней топологии) орбиты H, примененной к точке p, и $p\in L$. Конечно, орбита h через точку $p\in M$ определяется не однозначно, но любые две орбиты совпадают в некоторой окрестности точки p.

Таким образом, чтобы найти соответствующее однородное подмногообразие L, нужно найти для h связную виртуальную подгруппу H группы $\overline{G}$ и ее орбиту через фиксированную точку.

Пусть a — фиксированная точка на M и L — орбита h через точку a. Определим подалгебру $g_0\subset g$ и построим цепочку подалгебр $g_0\supset g_1\supset \ldots$ следующим образом: $g_0=\{X\in g|X_a=0\}$, $g_{n+1}=\{x\in g_n|[x,h]\subset g_n+h\}$. Тогда $\mathrm{sym}(L)=g_\infty+h$ и подалгебра $\mathrm{sym}(L)$ является наибольшей из подалгебр a,таких, что $h \subset a \subset g+h$.

Будем полагать, что две подалгебры алгебры g эквивалентны, если они могут быть преобразованы друг в друга с помощью элементов группы $\mathrm{Aut}(g,g_0)$.

Пусть $V_n=(h+g_n)/g_n\subset g/g_n$ для всех n, а $p_n: g\to g/g_n$ и $t_n: g/g_{n+1}\to g/g_n$ — естественные проекции при всех n. Для данного подпространства $\mathrm{V_n}$ обозначим через G_{n+1} подгруппу $g+h$ в $\mathrm{Aut}(g,g_0)$, состоящую из всех автоморфизмов, которые сохраняют подалгебру g_n и при индуцировании на g/g_n сохраняют подпространство V_n.

Алгоритм описания всех алгебр симметрий однородных подмногообразий в M (см. [1]):

1. Опишем все подпространства V_0 в g/g_0 (с точностью до преобразований, индуцированных элементами группы $\mathrm{Aut}(g,g_0)$).

2. Для каждого подпространства V_n, найденного на предыдущем шаге, определим подалгебру g_{n+1}, подгруппу G_{n+1} и подпространство $W=t_n^{-1}(V_n)$ в g/g_{n+1}. Если $g_{n+1}\neq g_n$, опишем все подпространства V_{n+1} в W, для которых выполнены условия:

[-] V_{n+1} является дополнительным к $\ker t_n= g_n/g_{n+1}$;

[-] для любых двух элементов $x+g_{n+1}$, $y+g_{n+1}\in V_{n+1}$ элемент $[x,y]+g_n$ принадлежит подпространству V_n.

Затем повторяем этот шаг снова.

3. Если $g_n= g_{n+1}$, найдем $h=p_n^{-1}(V_n)$ в g. Если h является подалгеброй, то h является алгеброй симметрий некоторого однородного подмногообразия. Более того, таким образом могут быть получены все алгебры симметрий.

Поверхности в проективной геометрии

Применяя алгоритм к случаю $g=sl(5,R)$, $M=RP^4$, $\dim M=3$, получим классификацию:

Теорема 1.1

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в RP^4, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

(1) $x_4=x_1x_3^2+x_2x_3$;

(2) $x_4=x_1x_3^2+x_2x_3+x_3^4$;

(3) $x_4=x_1^2x_3+x_2x_3$;

(4) $x_4=x_1^2+x_2x_3+x_3^3$;

(5) $x_4=x_1^2+x_1x_3^2+x_2x_3+a\,x_3^4$;

(6) $x_2^2+x_1x_3^2+x_1x_4=0$, $x_1>0 \vee x_1<0$;

(7) $x_4(1+x_1^2)=x_1(x_2^2-x_3^2)+2x_2x_3$;

(8) $x_1+x_3x_4\pm x_2^2+x_4^a=0$, $a\sim 2-a$, $a\neq -1,0,1,2,3$;

(9) $x_1+x_3x_4\pm x_2^2+(1+x_4^2)e^{a\,\mathrm{arctg}\,x_4}=0$, $a\sim -a$, $a\neq 0$;

(10) $x_1+x_3x_4+x_2^2+x_4\ln x_4=0$;

(11) $x_1+x_3x_4+x_2^2+(1+x_4^2)\mathrm{arctg}\,x_4=0$;

(12) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm\ln x_4=0$;

(13) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm e^{x_4}=0$;

(14) $x_2^2+x_1x_3=x_4^a$, $a\sim 2-a$, $a\neq 0,1,2$;

(15) $x_2^2+x_1x_3=(1+x_4^2)e^{a\,\mathrm{arctg}\,x_4}$, $a\sim -a$, $a\neq 0$;

(16) $x_2^2+x_1x_3=e^{x_4}$;

(17) $x_2+x_1x_3+\ln x_4=0$;

(18) $x_2+x_1x_3+e^{x_4}=0$;

(19) $x_2+x_1x_3+x_4\ln x_4=0$;

(20) $x_2+x_1x_3+x_4^a=0$, $a\neq 0,1,2$;

(21) $\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=x_4^a$, a~2-a, $a\neq 0,1,2$;

(22) $\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=(1+x_4^2)e^{a\,\mathrm{arctg}\,x_4}$, a~-a, $a\neq 0$;

(23) $\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=e^{x_4}$;

(24) $x_3x_4=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4^a$, $a\neq 0,1,2$;

(25) $x_3x_4=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4^2\ln x_4$;

(26) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)+e^{x_4}$;

(27) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4\ln x_4$.

Замечание. В случае (6) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1>0$ и $x_1<0$, которые, как следует из доказательства, не являются проективно-эквивалентными. В дальнейшем мы будем обозначать эти связные компоненты через (6,+) и (6,-) соответственно.

Применяя алгоритм к случаю $g=sl(5,R)$, $\dim V=2$, получим классификацию:

Теорема 1.2

Всякое двумерное локально-однородное подмногообразие в RP^4, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 3, либо является открытым подмножеством цилиндра или подмногообразия в RP^3, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

(1) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_2^2$;

(2) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1x_2$;

(3) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1x_2+x_1^4$;

(4) $x_1^2=x_3+x_2^2$, $x_4=x_2x_1$;

(5) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1^3+x_2^2$;

(6) $x_3=x_1x_2+x_1^3/3$, $x_4=x_2^2-x_1^4/6$;

(7) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1^a$, a~1-a, $a\neq 1,2,3$;

(8) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1\ln x_1$;

(9) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1^2\ln x_1$;

(10) $x_1^2=x_3-x_3^2$, $x_3=(x_1x_4+x_3x_2)^2e^{a\,\mathrm{arctg}\frac{x_2}{x_1}}$, a~-a;

(11) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=e^{x_1}$;

(12) $x_2=x_1^2$, $x_4=x_3^a$, $a\neq 1/2,1$, $|a|\leq 1$;

(13) $x_2=x_1^2$, $x_4=e^{x_3}$;

(14) $x_2=x_1^2$, $x_4=x_3\ln x_3$;

(15) $x_2=x_1^2$, $\ln(x_3^2+x_4^2)=a\,\mathrm{arctg}\dfrac{x_3}{x_4}$, a~-a;

(16) $x_2=x_1x_3$, $x_4=x_1^a$, a~1-a, $a\neq 2$;

(17) $x_2=x_1x_3$, $x_4=\ln x_1$;

(18) $x_2=x_1x_3$, $x_4=e^{x_1}$;

(19) $x_1x_4=x_3x_2$, $\ln(x_1^2+x_2^2)=a\,\mathrm{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$, a~-a

или одного из подмногообразий, заданных параметрически:

(20) $(g_{12}z+g_{22})^3(g_{11}z+g_{21})$;

(21) $(g_{12}z+g_{22})^2(g_{11}z+g_{21})^2$,

где параметры g_{11}, g_{12}, g_{21}, g_{22} удовлетворяют условию $g_{11}g_{22}-g_{21}g_{12}=1$, а проективными координатами точки на многообразии являются коэффициенты при степенях многочлена.

Применяя алгоритм к случаю $g=sl(5,R)$, $\dim V=1$, получим классификацию:

Теорема 1.3

Всякое одномерное локально-однородное подмногообразие в RP^4, алгебра симметрий которого имеет размерность>1, либо является открытым подмножеством кривой в RP^3, либо эквивалентно открытому подмножеству кривой $x_2=x_1^2$, $x_3=x_1^3$, $x_4=x_1^4$.

Поверхности в аффинной геометрии

Классифицируем теперь трехмерные однородные подмногообразия в четырехмерном аффинном пространстве, применяя классификационный алгоритм к случаю $g=aff(4,R)$, $g_0=gl(4,R)$, $M=R^4$. Классификация проводится аналогично классификации подмногообразий в проективной геометрии. Проводя классификацию по алгоритму, получаем следующий результат:

Теорема 2.1

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в R^4, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

(1) $x_2^2+x_1x_2x_3+x_4x_1^2=0$;
(2) $x_4=x_1x_3^2+x_2x_3$;
(3) $x_4=x_1x_3^2+x_2x_3+x_3^4$;
(4) $x_4=x_1^2x_3+x_2x_3$;
(5) $x_4x_3+x_1x_3^2+x_2^2=0$;
(6) $x_4=x_1^2+x_2x_3+x_3^3$;
(7) $x_4=x_1^2+x_1x_3^2+x_2x_3+a\,x_3^4$;
(8) $x_2^2+x_1x_3^2+x_1x_4=0$, $x_1>0 \vee x_1<0$;
(9) $x_1+x_3x_4\pm x_2^2+x_4^a=0$, $a\neq 0,1,2,3$;
(10) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm x_4\ln x_4=0$;
(11) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm \ln x_4=0$;
(12) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm x_4^2\ln x_4=0$;
(13) $x_1+x_3x_4+x_2^2\pm e^{x4}=0$;
(14) $x_2^2+x_1x_3=x_4^a$, $a\neq 0,1,2$;
(15) $x_2^2+x_1x_3=e^{x4}$;
(16) $x_2x_4+x_1x_3+x_4^2\ln x_4=0$;
(17) $x_2+x_1x_3+\ln x_4=0$;
(18) $x_2+x_1x_3+e^{x4}=0$;
(19) $x_2x_4+x_1x_3+x_4\ln x_4=0$;
(20) $x_2+x_1x_3+x_4\ln x_4=0$;
(21) $x_2+x_1x_3+x_4^a=0$, $a\neq 0,1,2$;
(22) $x_2x_4+x_1x_3+x_4^a=0$, $a\neq 0,1,2$;
(23) $\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=x_4^a$, $a\neq 0,1,2$;
(24) $\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2=e^{x4}$;

(25) $x_3x_4=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4^a$, $a\neq 0,1,2$;
(26) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4^a$, $a\neq 0,1,2$;
(27) $x_3x_4=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4^2\ln x_4$;
(28) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)-\ln x_4$;
(29) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)+e^{x4}$;
(30) $x_3x_4=\pm(x_1^2+x_2^2)-x_4\ln x_4$.
(31) $x_3=\pm(x_1^2+x_2^2)+x_4\ln x_4$.
(32) $(x_1x_3^2-x_4x_2x_3+x_4^3/3)^2=-8/9(x_3x_2-x_4^2/2)^3$;
(33) $x_1x_2x_3+x_1^2x_4+x_2^3=0$.

Замечание. В случае (8) поверхность имеет две связные компоненты, определяемые условиями $x_1>0$ и $x_1<0$, которые не являются проективно-эквивалентными.

Применяя алгоритм к случаю $g=aff(4,R)$, $g_0=gl(4,R)$, $M=R^4$, $\dim V=2$, получим классификацию:

Теорема 2.2

Всякое двумерное локально-однородное подмногообразие в R^4, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 3, либо является открытым подмножеством цилиндра или подмногообразия в R^3, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

(1) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_2^2$;
(2) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1x_2$;
(3) $x_3x_1=1$, $x_2=x_1x_4$;
(4) $x_1^2=x_3-x_3^2$, $x_1x_4=x_2x_3$;
(5) $x_3=x_1^2-x_2^2$, $x_4=x_1x_2$;
(6) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1x_2$;
(7) $x_1^3=x_4x_2^2$, $x_3^3=x_2x_4^2$;
(8) $x_3=x_1^2$, $x_4=x_1^3+x_2^2=0$;
(9) $x_3=x_1x_2+x_1^3/3$, $x_4=x_2^2-x_1^4/6$;
(10) $x_3=x_1x_2$, $x_4=x_1^2x_2$;
(11) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=e^{x1}$;
(12) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=x_1\ln x_1$;
(13) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=\ln x_1$;
(14) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=x_1^2\ln x_1$;
(15) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=x_1^3\ln x_1$;
(16) $x_2=x_1^2$, $x_4+x_1x_3=x_1^a$, $a\neq 0,1,2,3,4$;
(17) $x_2=x_1^2$, $x_4=x_3\ln x_3$;
(18) $x_2=x_1^2$, $\ln(x_3^2+x_4^2)=a\operatorname{arctg}\dfrac{x_3}{x_4}$, $a\sim -a$;
(19) $x_2=x_1^2$, $x_4=x_3^a$, $a\neq 1/2,1$, $|a|\leq 1$;
(20) $x_2=x_1^2$, $x_4=e^{x3}$;
(21) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1^a$, $a\sim 1-a$, $a\neq 1,2$;

(22) $x_1^2=x_3-x_3^2$, $x_3=(x_1x_4+x_2x_3)^2e^{arctg\frac{x_2}{x_1}}$, $a\sim-a$;

(23) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1\ln x_1$;

(24) $x_1x_3=1$, $x_2+x_1x_4=x_1^2\ln x_1$;

(25) $x_2=x_1x_3$, $x_4=e^{x1}$;

(26) $x_2=x_3e^{x1}$, $x_4=e^{x1}$;

(27) $x_2=x_3\ln x_1$, $x_4=x_1\ln x_1$;

(28) $x_2=x_3x_1$, $x_4=x_1\ln x_1$;

(29) $x_2=x_3x_1$, $x_4=x_1^a$, $a\neq-1,0,1,2$;

(30) $x_1x_4=x_2x_3$, $\ln(x_1^2+x_2^2)=a\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2}$, $a\sim-a$;

(31) $x_2=x_1^{a-1}$, $x_4=x_1^a$, $a\sim-1/a$, $a\neq0,1,2$.

Применяя алгоритм к случаю $g=aff(4,R)$, $g_0=gl(4,R)$, $M=R^4$, $\dim V=1$, получим классификацию:

Теорема 2.3

Всякое одномерное локально – однородное подмногообразие в R^4, алгебра симметрий которого имеет размерность>1, либо является открытым подмножеством кривой в R^3, либо эквивалентно открытому подмножеству кривой $x_2=x_1^2$, $x_3=x_1^3$, $x_4=x_1^4$.

Поверхности в эквиаффинной геометрии

Классифицируем теперь трехмерные однородные подмногообразия в четырехмерном эквиаффинном пространстве, применяя классификационный алгоритм к случаю $g=sl(4,R)\prec R^4$, $g_0=sl(4,R)$, $M=R^4$. Проводя классификацию по алгоритму, получаем следующий результат:

Теорема 3

Всякое трехмерное локально-однородное подмногообразие в четырехмерной эквиаффинной геометрии, алгебра симметрий которого имеет размерность ≥ 4, либо является открытым подмножеством цилиндра или квадрики, либо эквивалентно открытому подмножеству одного из следующих подмногообразий:

(1) $x_4=x_3x_2+x_1x_3^2$;

(2) $x_4=x_1^2+x_2x_3+x_3^3$;

(3) $x_1+x_3x_4+x_2^2+a\ln x_4=0$, $a\neq0$;

(4) $(x_2^2+x_1x_3)^3x_4^2=a^2$, $a\neq0$;

(5) $(x_2+x_1x_3)^2x_4=a$, $a\neq0$;

(6) $(\pm(x_1^2+x_2^2)+x_3^2)x_4^2=a^2$, $a\neq0$;

(7) $(x_3\pm(x_1^2+x_2^2))^2x_4=a$, $a\neq0$.

Действия с открытой орбитой

Выделим из найденных аффинных и проективных действий те, которые имеют открытую орбиту и, в частности, конечное число орбит. У приведенных выше подмногообразий в случаях (1)-(7) **теоремы 1.1**, (1)-(8) **теоремы 2.1**, (1)-(4) **теоремы 1.2** и (1)-(6) **теоремы 2.2** алгебры симметрий действуют с конечным числом орбит. Кроме этого, алгебры симметрий квадрик имеют конечное число орбит. Далее, алгебра симметрий цилиндра имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда алгебра симметрий основания этого цилиндра имеет конечное число орбит. Заметим, что основание является поверхностью в пространстве меньшей размерности, а все такие подмногообразия классифицированы в работе [1]. Итак, классифицированы все локально-однородные поверхности со стабилизатором в четырехмерной аффинной, эквиаффинной и проективной геометрии (с точностью до аффинной, эквиаффинной и проективной эквивалентности соответственно). Отдельно выделены подмногообразия, алгебры симметрий которых имеют открытую орбиту и, в частности, конечное число орбит. При классификации для каждой поверхности найдена ее алгебра симметрий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Doubrov B., Komrakov B., Rabinovich M. Homogeneous surfaces in the three-dimensional affine geometry // Geometry of submanifolds. 1996. Vol. 8. - P. 168-178.
2. Goto M., GrosshansF. Semisimple Lie algebras. - New York: Marcel Decker, 1978.
3. Nomizu K., Sasaki T. Affine differentail geometry.- Cambridge Univ. Press, 1994.

УДК 531.19

Г.С. Бокун, доцент; В.С. Вихренко, профессор

УЧЕТ ДАЛЬНОДЕЙСТВИЯ В РЕШЕТОЧНЫХ СИСТЕМАХ

The selfconsistent diagram approximation is used for defining the equilibrium properties of lattice systems with long range interactions.

При наличии дальнодействия между частицами в системе возникают специфические корреляционные эффекты. Для их описания может быть использован метод коллективных переменных [1], позволяющий последовательно учитывать корреляции, порождающие эффекты экранирования.

В настоящей работе изложенный ранее подход разложения свободной энергии по майероподобным функциям [2] обобщается для учета дальнодействия. Рассматривается решеточная система из N узлов, содержащая n частиц. Распределение частиц по узлам решетки характеризуется набором чисел заполнения $\{n_k\}=\{n_1,\ldots n_i,\ldots n_N\}$, принимающих значения 0 либо 1, если узел решетки вакантен либо занят частицей соответственно.

Энергия взаимодействия частиц состоит из парных взаимодействий $\Phi(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$ и $V(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$, характеризующих близко- и дальнодействие:

$$U_N=\sum_{i<j}^{N}\Phi(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)n_i n_j+\sum_{i<j}^{N}V(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)n_i n_j\ , \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор узла i.

Наряду с исходной системой используем базисную, характеризуемую потенциалами $\varphi_j(n_i)$ взаимодействия частицы (n_i=1) или вакансии (n_i=0), расположенных в i-м узле, с j-м узлом решетки. Ее энергия