

## УДАР ПРУЖИНОЙ, НАВИТОЙ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫМ НАТЯГОМ

Канд. физ-мат. наук, доц. В. С. ВИХРЕНКО, канд. техн. наук А. М. ГУСЬКОВ,  
ст. препод. П. И. СОЛОВЕЙ

*Проведены исследования по определению импульса, который сообщает пружина растяжения с предварительным натягом опоре, и энергии, потерянной в результате неупругого столкновения между витками. Приводятся теоретические и экспериментальные исследования скоростей и времени движения пружин. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании эффективных механических ударников без применения сосредоточенных масс.*

В ряде технических устройств [1] для создания ударного импульса используют пружины, навитые с предварительным натягом. Такие пружины при незначительной массе и малых удлинениях позволяют создавать значительный импульс, так как в момент удара пружина движется как жесткое тело. Современная технология позволяет получать пружины с различными переменными по длине характеристиками. Однако расчет импульса таких пружин до настоящего времени не проводился. Для определения скорости движения области посадки витков, скорости распространения области посадки могут быть использованы результаты работы [2], где автором исследованы волновые процессы при внезапном нагружении стержня с кусочно-линейной жесткой ха-

рактической материала. В настоящей работе определяется импульс, создаваемый пружиной с предварительным натягом.

В цилиндрической пружине с предварительным натягом, витки плотно прижаты друг к другу с усилием  $N_0$ . В сжатом состоянии пружина имеет длину  $L_0$  и массу единицы длины (линейную плотность)  $m_0$ . Заменим пружину эквивалентным стержнем той же длины, плотности и жесткости. Если элемент сжатой пружины длиной  $ds_0$  под действием силы  $N$  растянут до величины  $ds_N$ , то получаем следующее значение удлинения:

$$\lambda_N = \frac{ds_N}{ds_0} = \begin{cases} 1 + \frac{N - N_0}{c}, & N \geq N_0; \\ 1, & N \leq N_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $c$  — экспериментальная постоянная, имеющая размерность силы; как и в случае обычной винтовой цилиндрической пружины, ее можно оценить по формуле

$$c \approx \frac{Gd^5}{8D^3}, \quad (2)$$

где  $G$  — модуль упругости второго рода,  $d$  — диаметр проволоки,  $D$  — средний диаметр пружины.

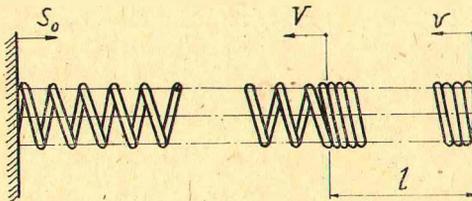


Рис. 1

Рассмотрим динамику пружины, заземленной левым торцом и нагруженной на правом торце силой  $P > N_0$ , после мгновенного освобождения правого торца. При этом вблизи свободного правого конца (рис. 1) образуется область посадки, длина которой  $l$  изменяется во времени. Фронт области посадки движется влево со скоростью  $V$ . Область посадки также движется влево со скоростью  $v$  как жесткое целое. (Все вычисления проведем в лагранжевой системе отсчета  $O s_0$ ,  $s_0 \in [0; L_0]$ ). Во фронте области посадки скорость движения среды изменяется скачком от  $v_+ = 0$  до  $v_- = -v$ . Линейная плотность  $m$  также изменяется от  $m_+ = m_p$  до  $m_- = m_0$ . Величину  $m_p$  определим на основе закона сохранения массы как  $m_p ds_p = m_0 ds_0$ . Тогда из (1)

$$m_p = m_0 / \lambda_p. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности потока массы через фронт области посадки имеет вид [3]

$$[m]V + [mv] = 0, \quad (4)$$

где квадратные скобки означают скачок функции:  $[f] = f_+ - f_-$ . В нашем случае уравнение (4) с учетом (3) записывается следующим образом:

$$V - \lambda_p(V - v) = 0. \quad (5)$$

Положим, что освобождение пружины произошло в момент времени  $t = 0$ . Тогда длина области посадки

$$l = \int_0^t (V - v) dt, \quad (6)$$

и лагранжева координата фронта области посадки

$$s_{0 \text{ фронта}} = L_0 - l. \quad (7)$$

Разрежем пружину впереди фронта области посадки, где внутренняя растягивающая сила равна  $P$ . Масса области посадки изменяется во времени, поэтому уравнение изменения импульса области посадки вычисляется следующим образом:

$$-\frac{d}{dt} \left[ v \int_{L_0-l}^{L_0} m_0(s_0) ds_0 \right] = -P. \quad (8)$$

Первый интеграл в (8) с учетом того, что  $l(t=0) = 0$ , записывается в виде

$$v \int_{L_0-l}^{L_0} m_0(s_0) ds_0 = Pt. \quad (9)$$

Из соотношений (5) и (6) скорости  $V$  и  $v$  можно выразить через  $dl/dt$ :

$$V = \lambda_P \frac{dl}{dt}, \quad v = (\lambda_P - 1) \frac{dl}{dt}. \quad (10)$$

Тогда (9) превращается в уравнение для определения  $l(t)$ :

$$(\lambda_P - 1) \frac{dl}{dt} \int_{L_0-l}^{L_0} m_0(s_0) ds_0 = Pt. \quad (11)$$

В общем случае  $m_0$  может зависеть от  $s_0$ , а  $\lambda_P$  — от значения координаты  $s_0$  во фронте, т. е. при  $s_0 = s_{0 \text{ фронта}}$  фронта (7). Тогда уравнение (11) будет с разделяющимися переменными, и интеграл от него можно представить в виде

$$\int_{L_0-l}^{L_0} \left\{ [\lambda_P(s) - 1] \int_s^{L_0} m_0(s_0) ds_0 \right\} ds = \frac{1}{2} Pt^2, \quad (12)$$

где неизвестная величина  $l$  входит в нижний предел внешнего интеграла, т. е. при известных функциях  $\lambda_P(s)$ ,  $m_0(s_0)$  (12) превращается в конечное уравнение для определения  $l$ . На практике чаще всего важно знать величину импульса пружины  $I_*$  в момент времени  $t_*$ , когда область посадки охватывает всю пружину, т. е.  $l(t_*) = L_0$ . При этом имеем

$$I_* = v_* \int_0^{L_0} m_0(s_0) ds_0 = Pt_*. \quad (13)$$

Значение времени  $t_*$  находим из (12)

$$t_* = \sqrt{\frac{2}{P} \int_0^{L_0} \left\{ [\lambda_P(s) - 1] \int_s^{L_0} m_0(s_0) ds_0 \right\} ds}. \quad (14)$$

Тогда величина импульса (13)

$$I_* = \sqrt{2P \int_0^{L_0} \{[\lambda_P(s) - 1] \int_s^{L_0} m_0(s_0) ds_0\} ds} \quad (15)$$

Из (15), (13) и (5) определяем также значение скоростей области посадки  $v_*$  и фронта  $V_*$  в момент удара:

$$v_* = I_* \left[ \int_0^{L_0} m_0(s_0) ds_0 \right]^{-1}, \quad V_* = \left[ \frac{\lambda_P}{\lambda_P - 1} \right]_{s_0=0} v_* \quad (16)$$

Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Пружина с постоянной линейной плотностью и постоянной характеристикой:  $\{m_0, \lambda_P\} = \text{const}$ . Длина области посадки изменяется согласно (12):

$$l(t) = at \sqrt{\chi_P / (\chi_P - \chi_0)}, \quad (17)$$

где  $a = \sqrt{c/m_0}$ ,  $\chi_0 = N_0/c$ ,  $\chi_P = P/c$ . (18)

После подстановки (17) и (18) в (10) получаем, что скорости  $v$  и  $V$  постоянны:

$$v = a \sqrt{\chi_P (\chi_P - \chi_0)}, \quad V = a \lambda_P \sqrt{\chi_P / (\chi_P - \chi_0)}. \quad (19)$$

Время  $t_*$  и импульс  $I_*$  находим из (14), (15)

$$t_* = \frac{L_0}{a} \sqrt{(\chi_P - \chi_0) / \chi_P}, \quad I_* = \frac{L_0 c}{a} \sqrt{\chi_P (\chi_P - \chi_0)}. \quad (20)$$

Для этого случая экспериментально были найдены значения  $t_*$  и  $v$ . Экспериментальная установка (рис. 2) состоит из направляющего стержня 1, вдоль которого свободно движется пружина 2, и барабана 3 с осью вращения, параллельной оси стержня. Один конец пружины крепится неподвижно, а к ее свободному концу присоединяется перо самописца 4. Барабан с намотанной на него бумажной лентой приводится во вращение с известной постоянной угловой скоростью. Затем пружина растягивается силой  $P$  и перо самописца легким усилием прижимается к ленте. После мгновенного снятия усилия перо вычерчивает на ленте близкую к прямой линию, что позволяет определить время  $t_*$  и скорость  $v$ . Результаты измерений и вычислений по формулам (19), (20) приведены в таблице.

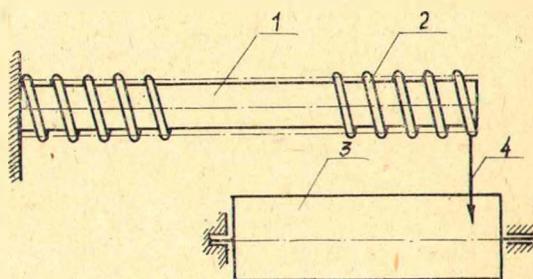


Рис. 2

Таблица

$a$ , м/с	$L_0$ , м	$\chi_0$	$\chi_P$	Расчет		Эксперимент	
				$v$ , м/с	$t_* \times 10^2$ , с	$v$ , м/с	$t_* \times 10^2$ , с
9,9	0,40	0,337	0,53	3,18	2,78	2,92	3,04
9,9	0,46	0,337	0,49	2,73	2,58	2,48	2,85
9,9	0,40	0,337	0,41	1,73	1,96	1,57	2,16
52,4	0,52	0,069	0,186	7,70	0,78	7,59	0,80
52,4	0,52	0,069	0,159	5,18	0,74	6,10	0,75
52,4	0,52	0,069	0,128	4,62	0,67	4,55	0,68
52,4	0,52	0,069	0,107	3,37	0,59	3,30	0,61

Пример 2. Пружина с переменным усилием предварительного натяга:  $N_0 = N_0(s_0)$ ;  $\{c, m_0\} = \text{const}$ . Выражение для импульса (15) принимает вид

$$I_* = \frac{L_0 c}{a} \sqrt{\left[ x_P^2 - \frac{2x_P}{L_0^2} \int_0^{L_0} x_0(L_0 - s) ds \right]}. \quad (21)$$

Предположим, что по технологическим условиям функция  $N_0(s_0)$  (или  $x_0(s_0)$ ) — линейная:

$$x_0(s_0) = k(1 + \varepsilon s_0/L_0), \quad \{k, \varepsilon\} = \text{const}. \quad (22)$$

Удлинение пружины  $\Delta L$  задано и равно, например,  $\frac{1}{2} x_P L_0$ , т. е.

$$\Delta L = \int_0^{L_0} (\lambda_P - 1) ds_0 = \frac{1}{2} x_P L_0. \quad (23)$$

Подставляя (22) в (23) ( $\lambda_P = 1 + x_P - x_0$ ), находим значение  $k = x_P / (2 + \varepsilon)$ . Тогда импульс (21) оказывается равным

$$I_* = \frac{L_0 P}{a} \sqrt{(1 + 2\varepsilon/3)/(2 + \varepsilon)}. \quad (24)$$

Такое же значение импульса (24) можно создать пружиной с  $x_0' = \text{const}$ :

$$x_0' = x_P(1 - \alpha), \quad \alpha = \text{const}. \quad (25)$$

Согласно (20) и (24) находим, что при этом

$$\alpha = (1 + 2\varepsilon/3)/(2 + \varepsilon).$$

Однако вычисленное по (23) удлинение пружины

$$\Delta L' = \int_0^{L_0} (\lambda_P' - 1) ds_0 = \alpha x_P L_0$$

будет больше  $1/2 x_P L_0$ , если

$$\alpha = (1 + 2\varepsilon/3)/(2 + \varepsilon) > \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Из неравенства (26) получаем, что при  $\varepsilon > 0$  удлинение пружины с постоянным натягом всегда больше удлинения пружины с переменным натягом (22) при одинаковом импульсе. Уравнение (21) позволяет сформулировать задачу о создании оптимальной пружины —  $I_* \rightarrow \text{max}$ . При этом на функцию  $x_0(s_0)$  могут быть наложены известные ограничения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алабужев П. М. и др., Электромеханический молоток, Авторское свидетельство № 173658 от 17 февраля 1964 г., «Бюллетень изобретений», 1965, № 15.
2. Бидерман В. Л., О распространении волны продольной деформации при нелинейной и «жесткой» зависимости между напряжениями и деформациями, сб. «Расчеты на прочность», № 6, Машгиз, М., 1960.
3. Бленд Д., Нелинейная динамическая теория упругости, изд-во «Мир», М., 1972.

Статья поступила 13 марта 1980 г.

*Продолжение в № 9 за 1982 г.  
Более общее рассмотрение будет  
опубликовано в сб. «Расчеты на  
прочность» 1982 или 1983 года.*