

УДК 691.002.5;666.1/.9

А. А. ГАРАБАЖИУ, Э. И. ЛЕВДАНСКИЙ, А. Э. ЛЕВДАНСКИЙ

ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩАЯ РОТОРНО-ЦЕНТРОБЕЖНАЯ МЕЛЬНИЦА ДЛЯ ТОНКОГО ПОМОЛА СЫПУЧИХ И КУСКОВЫХ МАТЕРИАЛОВ

Процессы измельчения являются весьма распространенными и встречаются практически в любой отрасли производственной деятельности. Наиболее широкое применение они находят в горнорудной промышленности при переработке полезных ископаемых, в химической промышленности при производстве минеральных удобрений, красителей и многих других видов продукции, в промышленности строительных материалов при производстве вяжущих материалов (цемента, извести, гипса), при изготовлении керамических, силикатных, бетонных и железобетонных изделий и конструкций. Широкое применение процессы измельчения нашли также в сельскохозяйственном производстве и пищевой промышленности, например, при изготовлении муки, крупы, комбикормов [1—3].

Однако процесс тонкого измельчения является весьма энергоемким, т. е. требует больших энергетических затрат и сопряжен с безвозвратной потерей металла из-за износа рабочих элементов измельчителей. Так, в ряде работ [4—6] отмечается, что в настоящее время на измельчение затрачивается около 5—10% производимой в мире электроэнергии и несколько миллионов тонн высококачественной стали. В той же горнорудной промышленности на измельчение расходуется около 40% от всей используемой энергии, в комбикормовой — до 70%, в мукомольной — около 50%. Мощность привода шаровых барабанных мельниц в горнорудной промышленности и цементном производстве достигает 8000 кВт [6].

Большие энергетические затраты объясняются не только большими объемами перерабатываемых материалов, но и тем, что используемые для измельчения машины (особенно для помола) отличаются чрезвычайно низкой эффективностью и КПД их составляет в лучшем случае несколько процентов [3]. Поэтому многие исследователи в настоящее время занимаются разработкой новых эффективных машин для измельчения материалов. Все более широкое применение находят среднеходные мельницы, у которых расход электроэнергии на единицу измельченного материала ниже почти в два раза по сравнению с барабанными мельницами [7]. Более эффективными и перспективными машинами для измельчения материалов являются центробежно-ударные мельницы [5, 8, 9].

Однако, несмотря на это, современные измельчители ударного действия имеют целый ряд недостатков, которые значительно снижают эффективность их работы. Наряду с высоким износом рабочих элементов (молотков, бил, отбойных плит и т. д.) в данных измельчителях большая часть подводимой энергии расходуется на измельчение материала именно за счет истирания, а не удара, что приводит к излишнему росту удельных энергозатрат на тонну готового продукта. Так, например, по данным С. П. Джинджихадзе [10], в молотковой дробилке при скорости вращения молотков 110 м/с на измельчение зерна ударом расходуется только 16,9% от всей подводимой энергии, а на измельчение истиранием — 83,1%. Одним из путей решения данной проблемы является обеспечение непрерывного и высокоэффективного удаления из зоны измельчения частиц, достигших требуемой тонины помола. В этом случае значительно меньше частиц материала будет подвергаться безрезультатному нагружению, что в конечном итоге обеспечит снижение энергозатрат на трение частиц между собой и исключит их переизмельчение.

Принимая во внимание все вышесказанное, в Белорусском государственном технологическом университете на кафедре МиАХиСП авторами данной статьи был разработан целый ряд принципиально новых роторно-центробежных мельниц (Р-ЦМ) для тонкого помола сыпучих материалов, схема одной из конструкций которых представлена на рис. 1. Она состоит из цилиндрического корпуса 1, нижняя часть которого жестко соединена с бункером 2. К

нижней плите 3 корпуса 1 с помощью болтов крепится электродвигатель 4, вертикальный вал которого проходит внутри рабочей камеры мельницы. Внутри корпуса 1, на валу электродвигателя 4, с помощью ступицы установлен ротор, состоящий из диска 5 и радиальных рабочих лопастей 6. Конструкция ротора — сварная. Сверху к корпусу 1 приварен фланец 13, к которому при помощи болтов крепится крышка 7 с питательным патрубком 8. Внутри корпуса 1, вдоль цилиндрической обечайки, по окружности жестко закреплены отражательные стержни 9, изготовленные из износостойкой стали. В зависимости от требуемой тонины помола стержни 9 устанавливаются друг от друга на расстоянии $\delta = 1\text{—}5$ мм. К наружной поверхности плиты 3 снизу приварена внутренняя цилиндрическая обечайка 12, жестко соединенная с бункером 2. Таким образом, цилиндрическая обечайка корпуса 1 и внутренняя обечайка 12 образуют кольцевой канал, по которому осуществляется выгрузка из рабочей камеры мельницы в приемный бункер 2 тонко измельченного материала. Бункер 2 имеет коническую форму и заканчивается внизу патрубком с затвором 11 для выгрузки готового продукта. Для удаления воздуха из приемного бункера 2 в верхней его части имеется специальный патрубок 10, к которому подсоединяется фильтр.

При работе мельницы электродвигатель 4 приводит во вращение роторный диск 5 с окружной скоростью по концам лопастей 6 не менее 50 м/с. Подлежащий измельчению материал через питательный патрубок 8 равномерно подается в центральную часть мельницы на роторный диск 5. Далее радиальные лопасти 6 отбрасывают материал на периферию, где он измельчается при ударе об отражательные стержни 9. В процессе измельчения мельница одновременно работает и как вентилятор. В рабочую камеру воздух нагнетается за счет вращения ротора через питательный патрубок 8. Крупные частицы материала после удара об отражательные стержни 9 отскакивают назад и попадают под удар вращающихся лопастей 6, где и доизмельчаются. Более мелкие же частицы подхватываются воздушным потоком и начинают вращаться внутри рабочей камеры вдоль стержней 9, многократно ударяясь о них. Таким образом, измельчение происходит как при ударе рабочих лопастей 6 о частицы материала, так и при ударе частиц об отражательные стержни 9. За счет центробежной силы у поверхности стержней 9 создается зона повышенного давления воздуха. Это способствует тому, что воздух вместе с частицами тонкодисперсного материала беспрепятственно проходит через щели между стержнями 9 в кольцевой канал и далее, двигаясь вниз, поступает в приемный бункер 2. Измельченный материал осаждается в бункере 2, а запыленный воздушный поток через патрубок 10 поступает в фильтр на очистку.

Ввиду того, что тангенциальная скорость воздуха и измельченных частиц материала внутри рабочей камеры у поверхности отражательных стержней 9 значительно выше, чем их радиальная скорость в щелях, то естественно, что радиальный поток воздуха будет подхватывать только тонкодисперсные частички материала, размер которых намного меньше размера самих щелей. Следовательно, при таких условиях исключается забивка щелей между отражательными стержнями 9 и наряду с высокой степенью измельчения будет обеспечиваться непрерывное удаление из рабочей камеры Р-ЦМ частиц материала, достигших требуемой тонины помола.

С целью промышленного внедрения нами был изготовлен экспериментальный полупромышленный образец данной конструкции Р-ЦМ с диаметром рабочего диска по концам лопастей 0,4 м. Привод рабочего диска мельницы осуществлялся посредством электродвигателя на 7,5 кВт через ступицу, шкивы и клиноременную передачу, что позволяло изменять число оборотов ротора от 20 до 80 м/с. На диске в ходе исследований изменялось число рабочих лопастей от 4 до 14, а также их высота. Отражательные стержни использовались круглого и квадратного сечений. В качестве материала для исследований применялись гранулы извести после печи, работающей по мокрому способу производства, гипсовый камень, мел, а также зерно пшеницы. Материал на измельчение подавался в мельницу из бункера шнековым питателем. Изменение подачи материала осуществлялось за счет варьирования числа оборотов шнекового питателя. Измерение расхода электроэнергии на привод электродвигателя мельницы осуществлялось ваттметром [11, 12].

Анализ известных методов оценки качества помола и опубликованных работ по измельчению [13—16] показал, что наиболее простым и в достаточной степени эффективным методом анализа дисперсности продуктов помола строительных материалов является метод механической классификации (рассева) на ситах. Помимо простоты и надежности, метод механического рассева на ситах отличается также тем, что не требует использования высокосложного и дорогостоящего оборудования. Кроме этого, он единственный в своем роде дает возмож-

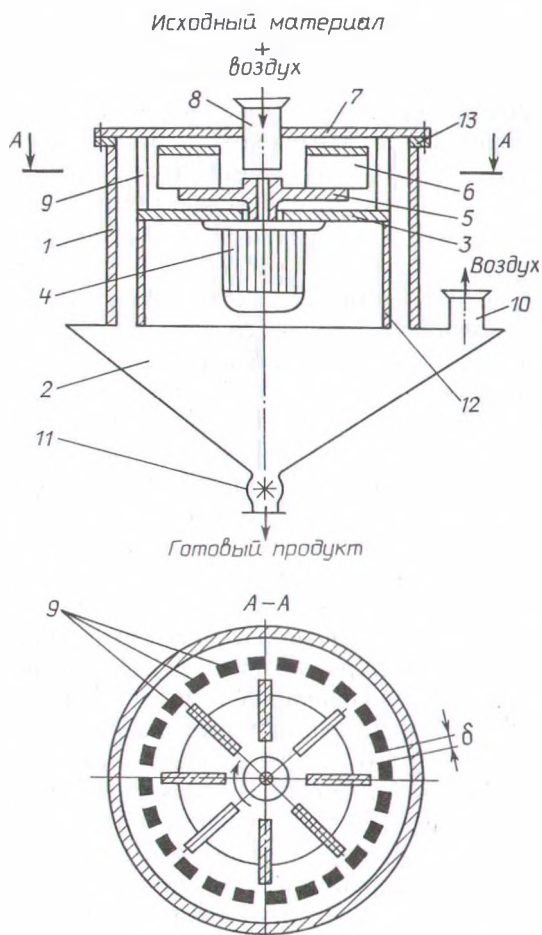


Рис. 1. Схема роторно-центробежной мельницы с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта: 1 — корпус; 2 — приемный бункер; 3 — нижняя плита; 4 — электродвигатель; 5 — диск; 6 — лопасти; 7 — крышка; 8 — питательный патрубок; 9 — отражательные стержни; 10 — патрубок удаления воздуха; 11 — патрубок выгрузки готового продукта; 12 — внутренняя цилиндрическая обечайка; 13 — фланец

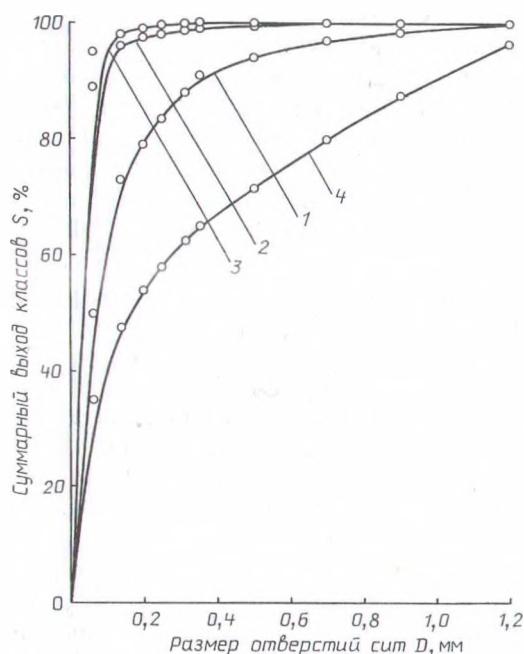


Рис. 2. Фракционный состав продуктов помола гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы для роторно-центробежной мельницы с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта ($\delta = 0,001$ м): 1, 2, 3, 4 — гипсовый камень ($G = 220$ кг/ч), известь ($G = 280$ кг/ч), мел ($G = 290$ кг/ч), зерно пшеницы ($G = 170$ кг/ч)

ность получить достаточно полную информацию о фракционном составе продуктов помола, как по массе, так и по размеру. Недостатком этого метода является его длительность, а также сложности, возникающие при просеивании частиц на ситах с размером ячеек менее 40 мкм. Поэтому для определения тонины помола нами использовался набор стандартных сит с минимальным размером ячеек 0,063 мм, а максимальным — 2 мм.

Сита в количестве 10 шт. собирались в пакет с возрастанием размера ячеек от низа к верху и продукт помола в количестве 500 г загружался на верхнее сито. После чего пакет закреплялся на столе лабораторной машины, предназначенной для отсева. Далее машина включалась в сеть, и стол совершал колебательные движения в течение 20 мин, производя рассев материала. По окончании отсева на лабораторных весах осуществлялось взвешивание количества материала, оставшегося на каждом из использованных сит, а также взвешивание количества материала, прошедшего через сито № 0063. Для каждого опытного результата помола рассев осуществлялся не менее трех раз, и полученные данные усреднялись.

Основными технико-экономическими показателями работы всех без исключения дробильно-помольных машин являются степень помола и удельный расход энергии на измельчение единицы объема (массы) готовой продукции заданного размера.

Результаты экспериментальных исследований гранулометрического состава продуктов помола гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы при минимальной производительности (G , кг/ч) роторно-центробежной мельницы представлены на рис. 2.

Анализируя графические зависимости, отображенные на рис. 2, можно отметить, что наиболее высокая степень измельчения в Р-ЦМ достигается при помолу мела и извести (кривые 3 и 2 соответственно). Несколько хуже измельчается гипсовый камень (кривая 1), а наибольшие затруднения вызывает помол зерна (кривая 4). Высокая степень помола извести и мела объясняется тем, что гранулы той же извести или кусочки мела состоят из мелких кристаллов, связь между которыми значительно слабее, чем связь между кристаллами гипсового камня или между молекулами зерна пшеницы. Поэтому при ударе гранул извести или кусочков мела о лопасти рабочего диска и об отражательные стержни мельницы имеет место почти полное разрушение частиц материала на отдельные кристаллы. В результате этого через зазоры между отражательными стержнями проходит большое количество частиц извести или мела, значительно меньших по размеру, чем размер самих зазоров. При помолу же кусков гипсового камня или зерна пшеницы того же ударного импульса оказывается недостаточно, чтобы измельчить их на отдельные кристаллы или молекулы, поэтому через зазоры между отражательными стержнями уже будут проходить значительно большие по размеру частицы гипсового камня или зерна, соизмеримые с размером самих зазоров. Таким образом, чем слабее межкристаллические (или межмолекулярные) связи внутри материала, тем легче он поддается разрушению и тем выше его качество помола.

Результаты экспериментальных исследований удельных энергозатрат, имевших место при измельчении гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы в Р-ЦМ с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта, представлены на рис. 3. Анализируя графические зависимости, отображенные на рис. 3, можно отметить следующее. Во-первых, наибольший удельный расход электроэнергии в Р-ЦМ имел место именно при помолу зерна (кривая 4), несколько меньший — при помолу гипсового камня (кривая 1) и минимальный — при помолу извести и мела (кривые 2, 3 соответственно). Объясняется это различной прочностью межкристаллических (межмолекулярных) связей внутри того или иного материала. Как уже отмечалось выше, чем слабее эти связи внутри материала, тем легче он поддается измельчению и, следовательно, тем меньше энергии на это расходуется.

Во-вторых, в процессе измельчения гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы при увеличении производительности Р-ЦМ, наблюдалось довольно резкое снижение удельных энергозатрат на размол данных материалов. Однако эта тенденция ограничивалась тем, что мельница имела оптимальную производительность, при которой удельный расход электроэнергии на размол того или иного материала был минимальным. Отклонения производительности от оптимальной величины вызывало повышение удельных энергозатрат на размол материалов, что наиболее отчетливо можно проследить на примере зерна и гипсового камня. При помолу зерна пшеницы оптимальная производительность Р-ЦМ ($G_{\text{опт}}$) составила примерно 350 кг/ч. При помолу же гипсового камня $G_{\text{опт}} = 400$ кг/ч, а при помолу извести и мела $G_{\text{опт}} = 550\text{—}600$ кг/ч. Таким образом, оптимальная производительность Р-ЦМ по извести и мелу значительно выше, чем по зерну и гипсовому камню. Величина оптимальной производительности любой мельницы определяется только экспериментальным путем, так как зависит от большого количества конструктивных и технологических факторов.

Специфическим конструктивным параметром, который позволяет в довольно широких пределах регулировать тонину помола того или иного материала в данной конструкции Р-ЦМ, является величина зазора (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы (рис. 1). Результаты экспериментальных исследований качества помола гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы в Р-ЦМ при различных значениях ширины зазора (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы представлены на рис. 4.

Анализируя графические зависимости (рис. 4), можно отметить следующее. Во-первых, при увеличении ширины зазора (δ , мм) между отражательными стержнями роторно-центробежной мельницы наблюдалось значительное снижение качества помола всех вышеперечисленных материалов в данном измельчителе. Эту закономерность можно объяснить следующим образом. В данной конструкции Р-ЦМ (рис. 1) отражательные стержни, жестко закрепленные по окружности вдоль цилиндрической обечайки корпуса, устанавливаются с определенным зазором (δ , мм) друг относительно друга и выполняют роль не только отбойных поверхностей, но и служат своеобразным классификатором измельчаемого материала. При этом процесс непрерывной проточной классификации осуществляется таким образом, что через зазоры (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы проходят только те частицы измельченного материала, размер которых намного меньше размера самих зазоров.

Поэтому, чем выше величина зазора (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы, тем ниже будет качество помола в данном измельчителе того или иного материала.

Во-вторых при измельчении в Р-ЦМ с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта гипсового камня, извести, мела и зерна пшеницы наиболее высокая тонина помола наблюдалась при измельчении мела (кривая 3), а самая низкая — при измельчении зерна пшеницы (кривая 4). Кроме того, при увеличении размера зазора (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы качество помола вышеперечисленных материалов снижалось не одинаково. Так, при изменении величины зазора (δ) от 0,5 до 3 мм, остаток на сите № 0063 при помоле в данной мельнице зерна пшеницы увеличивался на 41% (кривая 4). При помоле гипсового камня эта величина составляла 34 % (кривая 1). При измельчении извести и мела — 12,5 и 8% соответственно (кривые 2, 3). Подобные результаты можно легко объяснить, исходя из прочностных особенностей измельчаемых материалов. Прочность межкристаллических (или межмолекулярных) связей внутри гипсового камня (или зерна пшеницы) намного выше, чем прочность межкристаллических связей внутри извести или мела. Поэтому тонина помола извести и мела в данной конструкции Р-ЦМ оказалась значительно выше по сравнению с тониной помола гипсового камня и зерна пшеницы, а увеличение размера зазора (δ , мм) между отражательными стержнями мельницы оказало на нее не столь существенное влияние.

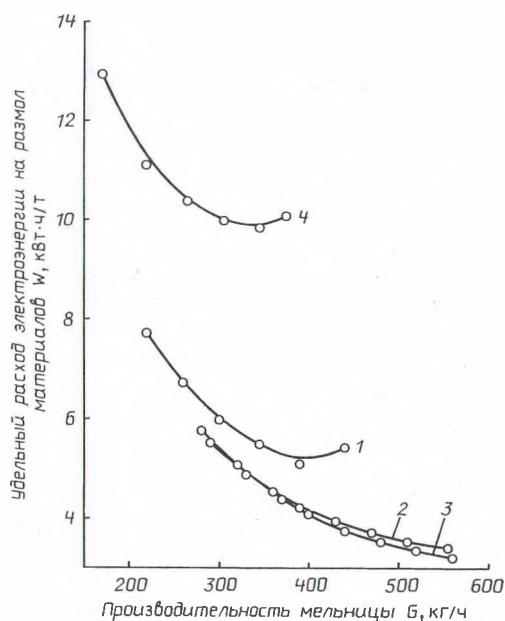


Рис. 3. Зависимость удельного расхода электроэнергии на размол материалов от производительности роторно-центробежной мельницы с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта ($\delta = 0,001$ м): 1, 2, 3, 4 — гипсовый камень, известь, мел, зерно пшеницы соответственно

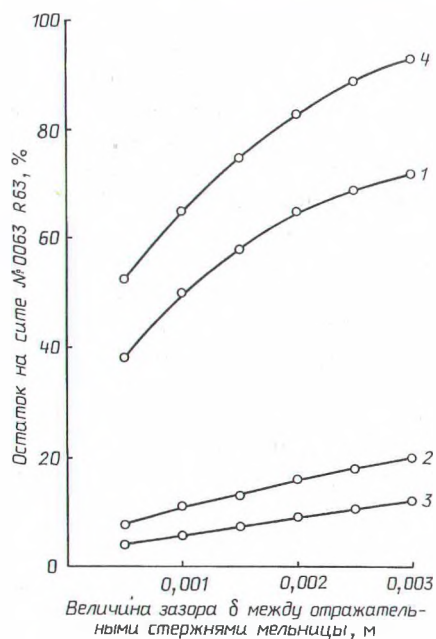


Рис. 4. Зависимость остатка на сите № 0063 от величины зазора между отражательными стержнями при помоле материалов в роторно-центробежной мельнице с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта: 1, 2, 3, 4 см. на рис. 2

Принимая во внимание необходимость и большую значимость промышленных испытаний любого нового измельчителя, авторами данной статьи были реализованы внедрение и серийный выпуск новой конструкции Р-ЦМ с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта на НПП «АГРОНОМИЯ» для помола антикоррозионного фосфатного пигмента и на НПП «АГРОМЕЛ» для помола фуражного зерна в г. Минске. В ходе промышленных испытаний Р-ЦМ были получены следующие результаты:

новая конструкция Р-ЦМ обеспечивает высокую эффективность помола антикоррозионного фосфатного пигмента с остатком на сите № 0063 не более 0,5—1%, что полностью отвечает технологическим требованиям по производству данного продукта;

промышленные испытания Р-ЦМ при помоле фуражного зерна показали, что 75—80% готового продукта соответствует по размеру муке высшего сорта, что в свою очередь обеспе-

чивает его наилучшее усвоение сельскохозяйственными животными и некоторое снижение расхода зерна на производство комбикормов;

внедрение данной конструкции Р-ЦМ в производстве комбикормов вместо применяемых в настоящее время молотковых дробилок может обеспечить снижение удельных энергозатрат на 1 т готового продукта как минимум на 30%.

Кроме этого, в ближайшее время предусматривается внедрение данной конструкции Р-ЦМ на Волковском известковом заводе. Использование данного измельчителя в производстве извести вместо применяемой в настоящее время барабанной шаровой мельницы даст возможность снизить расход электроэнергии на помол более чем в 10 раз, а степень измельчения извести при этом составит остаток на сите № 008 в 7—8%, тогда как существующим стандартом при помоле извести предусмотрен остаток на сите № 008 не более 10—15%.

Проведенные экспериментальные исследования, результаты которых представлены выше, а также опыт внедрения Р-ЦМ с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта позволили определить основные достоинства данной мельницы по сравнению с современными измельчителями центробежно-ударного действия: простота конструкции; компактность и малогабаритность; низкая энергоемкость и металлоемкость; высокая производительность и степень измельчения; низкий уровень капитальных затрат; быстрозаменяемость и высокий коэффициент использования материала отражательных стержней.

Низкая энергоемкость и высокая производительность Р-ЦМ достигаются за счет непрерывного и высокоэффективного удаления в процессе измельчения из рабочей камеры мельницы частиц, достигших требуемой тонины помола.

Таким образом, можно отметить, что разработанная конструкция Р-ЦМ с инерционно-гравитационной выгрузкой готового продукта является работоспособной и может обеспечить высококачественный помол материалов низкой и средней прочности при оптимальном размере зазора $\delta = 1\text{--}2$ мм и при более низком по сравнению с существующими измельчителями подобного действия расходе электроэнергии.

Summary

The data obtained from the experiments prove that the developed design of energy-saving rotor-centrifugal mill for inertia-gravitation unloading of products can be more effectively applied for fine grinding materials of low and average strength. For example, the application of the mill at enterprises producing lime (instead of a drum sphere mill) will allow to reduce electric energy consumption in more that 10 times and give a 15—20 per cent improvement of lime comminution quality.

Резюме

На основании анализа результатов промышленных испытаний и проведенных экспериментальных исследований сделан вывод о том, что данную конструкцию роторно-центробежной мельницы лучше всего использовать для тонкого помола материалов низкой и средней прочности. Внедрение этой мельницы, например, на предприятии по производству извести, вместо применяемой в настоящее время барабанной шаровой мельницы, даст возможность снизить расход электроэнергии на помол более чем в 10 раз, а качество измельчения извести при этом изменится к лучшему как минимум на 15—20%.

Литература

1. С и д е н к о П. М. Измельчение в химической промышленности. М., 1977.
2. К о ш е л е в А. Н., Г л е б о в Л. А. Производство комбикормов и кормовых смесей. М., 1986.
3. С е р г о Е. Е. Дробление, измельчение и грохочение полезных ископаемых. М., 1985.
4. Г и й о Р о ж е. Проблема измельчения материалов и ее развитие. М., 1964.
5. Тр. Европейского совещания по измельчению: Сб. ст. / Сост. А. В. Подкоцкий. М., 1966.
6. А к у н о в В. И. // Цемент. 1986. № 7. С. 13 —15.
7. Л е т и н Л. А., Р о д а т и с К. Ф. Среднеходные и тихоходные мельницы. М., 1981.
8. Опыт применения центробежно-ударных измельчителей: Обзор. информ. / Центр. науч.-исслед. ин-т информ. и техн.-эконом. исслед. черной металлургии. М., 1991.
9. П у г и н К. Г. Определение параметров и производительности роторных мельниц интенсифицирующего действия. Автореф. дис ... канд. техн. наук. М., 1994.
10. Д ж и н д ж и х а д з е С. П. Исследование энергоемкости процесса дробления фуражного зерна в молотковых дробилках: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Тбилиси, 1965.
11. П о в х И. Л. Аэродинамический эксперимент в машиностроении. М.; Л., 1974.

12. О с о к и н В. П. Молотковые мельницы. М., 1980.
13. К о у з о в П. А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов. М., 1987.
14. Х о д а к о в Г. С. Основные методы дисперсионного анализа порошков. М., 1968.
15. Х о д а к о в Г. С. Седиментационный анализ высокодисперсных систем. Л., 1981.
16. А к у н о в В. И. // Тр. ин-та НИИцемент: Сб. ст. / Под ред. И. П. Антонова. М., 1980. Вып. 42. С. 51—55.

*Белорусский государственный
технологический университет*

*Поступила в редакцию
22.04.99*

УДК 532.135:539.374

М. Д. МАРТЫНЕНКО, С. М. БОСЯКОВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ВЯЗКОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

Задача распространения волн в вязких жидкостях изучалась с позиций общей теории характеристик в работах [1, 2], авторы которых пришли к выводу о невозможности распространения волн в вязких жидких средах в силу рассеяния энергии. Ниже дается критический анализ этих статей и их обобщение на случай микрополярных вязких жидкостей. Поскольку монография [1] остается одной из основных в гидромеханике, что подтверждается В. И. Смирновым [3, стр. 194], то такой разбор представляется целесообразным. Отметим также, что исследование закономерностей распространения характеристических поверхностей целесообразно, кроме того, с физической точки зрения, поскольку характеристики являются носителями разрывных свойств соответствующих деформационных процессов [8] и т. д.

Задача распространения упругих волн в вязких жидкостях описывается следующей системой уравнений [7]:

$$\begin{cases} \rho \frac{du_i}{dt} = X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \Delta u_i; \\ \frac{dp}{dt} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Задача Коши для системы (1) состоит в нахождении ее решения при начальных условиях $u_i(0, x) = f_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, $p(0, x) = y(x)$.

Здесь u_i — компоненты вектора линейной скорости, p — давление, t — время, x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты, X_i — составляющие массовых сил. У авторов [1, 2] $\lambda + \mu = \nu/3$ и $\mu = \nu$.

Следуя [1], сделаем в (1) замену переменных по схеме [3, 8]:

$$\begin{pmatrix} t \equiv x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} &= \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial x_k}, \\ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_k} &= \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial t} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Внося (2) в (1) и опуская члены, не содержащие ни одну из производных $\frac{\partial u_i}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$, получаем

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{dz}{dt} = X_i - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial z}{\partial x_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x_k} + (\lambda + \mu) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial z} + \\ + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x_k^2} + \dots \\ \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \rho \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_k} + \dots = 0. \end{cases} \quad (3)$$